数学物理方法习题解答

一、复变函数部分习题解答

第一章习题解答

1、证明 $\mathrm{Re}\,z$ 在 z 平面上处处不可导。

证明： 令 $\mathrm{Re}\,z = u + iv$。$\because \mathrm{Re}\,z = x$，$\therefore u = x, v = 0$。

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$，$\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$，$\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$。

于是 u 与 v 在 z 平面上处处不满足 C－R 条件，

所以 $\mathrm{Re}\,z$ 在 z 平面上处处不可导。

2、试证 $f(z) = |z|^2$ 仅在原点有导数。

证明： 令 $f(z) = u + iv$。$\because$ $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ $\quad\therefore$ $u = x^2 + y^2, v = 0$。

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$。$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ 。

所以除原点以外，u,v 不满足 C－R 条件。而 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 在原点连续，且满足 C－R 条件，所以 $f(z)$ 在原点可微。

$$f'(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \text{。}$$

或： $f'(0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (\Delta z)^* = \lim\limits_{\substack{\Delta x = 0\\ \Delta y = 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0$。

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z + \Delta z|^2 + |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z z^* + \Delta z^* z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (z^* + \frac{\Delta z^*}{\Delta z} z) \xrightarrow{z=0} 0 \text{。}$$

【当 $z \neq 0, \Delta z = re^{i\theta}$，$\dfrac{\Delta z^*}{\Delta z} = e^{-i2\theta}$ 与趋向有关，则上式中 $\left|\dfrac{\Delta z^*}{\Delta z}\right| = \dfrac{|\Delta z^*|}{|\Delta z|} = 1$】

3、设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$，证明 $f(z)$ 在原点满足 C—R 条件，但不可微。

证明： 令 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases},$$

$$v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}。$$

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1,$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{-y^3}{y^3}=-1;$$

$$v_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1,$$

$$v_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{y^3}{y^3}=1。$$

$\therefore u_x(0,0)=v_y(0,0)$，$u_y(0,0)=-v_x(0,0)$

$\therefore f(z)$ 在原点上满足 C—R 条件。

但 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)(x+iy)}$。

令 y 沿 $y=kx$ 趋于 0，则

$$\lim_{z\to 0}\frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)(x+iy)}=\frac{1-k^3+i(1+k^3)}{(1+k^2)(1+ik)}=\frac{k^4-k^3+k+1+i(k^4+k^3-k+1)}{(k^2+1)^2}$$

依赖于 k，$\therefore f(z)$ 在原点不可导。

4、若复变函数 $f(z)$ 在区域 D 上解析并满足下列条件之一，证明其在区域 D

上必为常数。

（1）$f(\mathrm{z})$在区域D上为实函数；

（2）$f^*(\mathrm{z})$在区域D上解析；

（3）$\mathrm{Re}\, f(\mathrm{z})$在区域$D$上是常数。

证明：（1）令$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$。

由于$f(\mathrm{z})$在区域D上为实函数，所以在区域D上$v(x,y)=0$。

$\because f(z)$在区域D上解析。由C－R条件得

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$。

$\therefore$在区域D上$u(x,y)$为常数。从而$f(\mathrm{z})$在区域D上为常数。

（2）令$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则$f^*(z)=u(x,y)-iv(x,y)$。

$\because f(z)$在区域D上解析。由C－R条件得

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$。（1）

又$f^*(z)$在区域D上解析，由C－R条件得

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$。（2）

联立（1）和（2），得

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$。

$\therefore u,v$在区域D上均为常数，从而$f(z)$在区域D上为常数。

（3）令$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则$\mathrm{Re}\, f(z)=u(x,y)$。

由题设知$u(x,y)$在区域D上为常数，$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$。

又由C－R条件得，在区域D上

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0$，于是$v$在区域$D$上为常数。

$\therefore u,v$在区域D上均为常数，从而在区域D上$f(z)$为常数。

5、证明xy^2不能成为z的一个解析函数的实部。

证明：令$u=xy^2$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0+2x=2x$。

$\therefore u$ 不满足拉普拉斯方程。从而它不能成为z的一个解析函数的实部。

6、若$z=x+iy$，试证：

（1）$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$；

（2）$\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$；

（3）$|\sin z|^2$＝$\sin^2 x+\sinh^2 y$；

（4）$|\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y$。

证明：（1）$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)$

$\because \cos(iy)=\cos hy, \sin(iy)=i\sinh y$，

$\therefore \sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$。

（2）$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos(iy)-\sin x\sin(iy)$

$\because \cos(iy)=\cos hy, \sin(iy)=i\sinh y$，

$\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$。

（3）$|\sin z|^2=(\sin x\cosh y)^2+(\cos x\sinh y)^2=\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y$

$=\sin^2 x(1+\sinh^2 y)+\cos^2 x\sinh^2 y$

$=\sin^2 x+(\sin^2 x+\cos^2 x)\sinh^2 y=\sin^2 x+\sinh^2 y$。

（4）$\left|\cos z\right|^2=(\cos x\cosh y)^2+(\sin x\sinh y)^2=\cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y$

$$=\cos^2 x(1+\sinh^2 y)+\sin^2 x\sinh^2 y$$

$$=\cos^2 x+\cos^2 x\sinh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y$$

$$=\cos^2 x+(\cos^2 x+\sin^2 x)\sinh^2 y=\cos^2 x+\sinh^2 y\text{。}$$

7、试证若函数$f(z)$和$\varphi(z)$在z_0解析。$f(z_0)=\varphi(z_0)=0$，$\varphi'(z_0)\neq 0$，

则$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}=\dfrac{f'(z_0)}{\varphi'(\mathrm{z}_0)}$。（复变函数的洛必达法则）

证明：

$$\frac{f'(z_0)}{\varphi'(z_0)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi(z)}\text{。}$$

或倒过来做。

8、求证：$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$。

证明： $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(\sin z)'}{z'}=\lim\limits_{z\to 0}\cos z=1$。

第二章习题解答

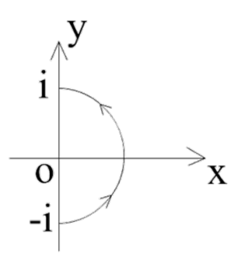
9、利用积分估值，证明

a．$\left|\int_{-i}^{i}\left(x^2+iy^2\right)dz\right|\leq\pi$　积分路径是从$-i$到i的

右半圆周。

b．证明$\int_{i}^{2+i}\dfrac{dz}{z^2}\leq 2$积分路径是直线段。

证明： a．（方法一）



$$\left|\int_{-i}^{i}\left(x^2+iy^2\right)dz\right|\leq\int_{-i}^{i}\left|\left(x^2+iy^2\right)\right|\left|dz\right|=\int_{-i}^{i}\sqrt{x^4+y^4}\left|dz\right|$$

$$\leq\int_{-i}^{i}\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}\left|dz\right|=\int_{-i}^{i}\sqrt{(x^2+y^2)^2}\left|dz\right|=\pi\text{。}$$

（方法二）在半圆周 $x^2+y^2=1$ 上， $x^2\le 1$，$y^2\le 1$，从而

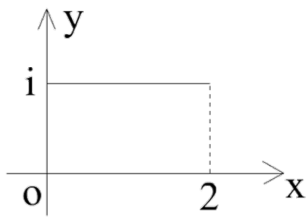
$$x^4\le x^2\ ,\ y^4\le y^2\Rightarrow x^4+y^4\le x^2+y^2$$

在半圆周 $x^2+y^2=1$ 上，$\left|x^2+iy^2\right|=\sqrt{x^4+y^4}\le\sqrt{x^2+y^2}=1$， $\max\sqrt{x^4+y^4}\Big|_c=1$，

$\left|\int_{-i}^{i}\left(x^2+iy^2\right)dz\right|\le\int_{-i}^{i}\left|x^2+iy^2\right|\left|dz\right|\le\int_{-i}^{i}\sqrt{x^2+y^2}\left|dz\right|=\int_{-i}^{i}\left|dz\right|=\pi$ 。

或：$\left|\int_{-i}^{i}\left(x^2+iy^2\right)dz\right|\le\max\sqrt{x^4+y^4}\Big|_c\pi=\pi$ 。

b．证: $\max\left|\frac{1}{z^2}\right|_{z=x+i}=\max\frac{1}{\left|z^2\right|_{z=x+i}}=\max\frac{1}{x^2+1}=1$



$\therefore\int_{i}^{2+i}\frac{dz}{z^2}\le\max\left|\frac{1}{z^2}\right|_{z=x+i}\cdot 2=2$ 。

10、不用计算，证明下列积分之值均为零，其中 c 均为圆心在原点，半径为1的单位圆周。

a．$\oint_c\frac{dz}{\cos z}$；b．$\oint_c\frac{e^z dz}{z^2+5z+6}$ 。

证明： a．$\frac{1}{\cos z}$ 的奇点为 $z_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,n=0,\pm1,\cdots$， 由于 $\left|z_n\right|>1$，所以它们均不在以原点为圆心的单位圆内。

$\therefore\frac{1}{\cos z}$ 在以原点为圆心的单位圆内无奇点，处处解析。

由柯西定理: $\oint_c\frac{dz}{\cos z}=0$ 。

b．$\frac{e^z}{z^2+5z+6}=\frac{e^z}{(z+2)(z+3)}$ 的奇点为 $z_1=-2$， $z_2=-3$，它们均不在以原点为圆心的单位圆内。

$\therefore\frac{e^z}{z^2+5z+6}$ 在以原点为圆心的单位圆内处处解析。

由柯西定理: $\oint_c\frac{e^z dz}{z^2+5z+6}=0$ 。

11、计算

a．$\oint_c \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz \quad (c:|z|=2)$；b．$\oint_c \frac{2z^2-z+1}{(z-1)^2}dz \quad (c:|z|=2)$。

解: a．$2z^2-z+1$在$|z|=2$所围区域内解析，且$z=1$在$|z|=2$所围区域内。

由柯西积分公式得

$$\oint_c \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz = 2\pi i\,(2z^2-z+1)\Big|_{z=1} = 2\pi i\times 2 = 4\pi i\ 。$$

b．$2z^2-z+1$ 在$|z|=2$所围区域内解析，且$z=1$在$|z|=2$所围区域内。

由推广的柯西积分公式得

$$\oint_c \frac{2z^2-z+1}{(z-1)^2}dz = 2\pi i\left(2z^2-z+1\right)'\Big|_{z=1} = 2\pi i(4z-1)\Big|_{z=1} = 2\pi i\times 3 = 6\pi i\ 。$$

12、求积分$\oint_c \frac{e^z}{z}dz$（$c:|z|=1$），从而证明$\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta=\pi$。

解: e^z在$|z|=1$所围区域内解析，且$z=0$在$|z|=1$所围区域内。

由柯西积分公式得$\oint_c \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i\,e^z\Big|_{z=0} = 2\pi i$。　　（1）

在c上令$z=e^{i\theta}$，$-\pi\le\theta\le\pi$，则

$$\oint_c \frac{e^z}{z}dz = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta+i\sin\theta}d\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\left[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)\right]d\theta$$

$$= i\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta = 2i\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta\ ,$$

其中利用了，由于$e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$是$\theta$的奇函数，而$e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$是$\theta$的偶函数，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta = 0\ ,\quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = 2\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta\ 。$$

$\therefore \oint_c \frac{e^z}{z}dz = 2i\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos\theta(\sin\theta)\,d\theta$。　　（2）

从而，联立（1）和（2），得

$\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi$。

13、由积分$\int_c \frac{dz}{z+2}$之值，证明$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos}d\theta = 0$，$c$为单位圆周$|z|=1$。

证明：$\frac{1}{z+2}$在单位圆周$|z|=1$所围区域内解析。由柯西定理:

$\oint_c \frac{dz}{z+2} = 0$。　　（1）

另一方面，在c上$z=e^{i\theta}$，$-\pi \le \theta < \pi$，

$$\oint_c \frac{dz}{z+2} = \oint_c \frac{\overline{z}+2}{(z+2)(\overline{z}+2)}dz = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i\theta}+2}{(e^{i\theta}+2)(e^{-i\theta}+2)}ie^{i\theta}d\theta$$

$$= i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2e^{i\theta}}{1+2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+4}d\theta = i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta+2i\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

$$= i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta - 2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta \qquad （2）$$

$\because \frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}$为$\theta$的奇函数，

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0$　　（3）

由（1）、（2）及（3）得

$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0$。（4）

又$\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}$为$\theta$的偶函数，

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$。（5）

于是由（4）和（5）得

$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = 0$。

14、设$F(z)=\frac{z+6}{z^2-4}$，证明积分$\oint_c F(z)dz$

a.当c是圆周$x^2+y^2=1$时，等于0；

b.当c是圆周$(x-2)^2+y^2=1$时，等于$4\pi i$；

c.当c是圆周$(x+2)^2+y^2=1$时，等于$-2\pi i$。

证明： $F(z)=\dfrac{z+6}{z^2-4}=\dfrac{z+6}{(z+2)(z-2)}$的奇点为$z_1=2$及$z_2=-2$。

a.当c是圆周$x^2+y^2=1$时，$z_1=2$及$z_2=-2$均在圆外，$F(z)$在圆内解析。由柯西定理: $\oint_c \dfrac{z+6}{(z+2)(z-2)}dz=0$。

b.当c是圆周$(x-2)^2+y^2=1$时，仅$z_1=2$在圆内。由柯西积分公式得$\oint_c \dfrac{z+6}{(z+2)(z-2)}dz=2\pi i\left.\dfrac{z+6}{z+2}\right|_{z=2}=2\pi i\times 2=4\pi i$。

c.当c是圆周$(x+2)^2+y^2=1$时，仅$z_2=-2$在圆内。由柯西积分公式得$\oint_c \dfrac{z+6}{(z+2)(z-2)}dz=2\pi i\left.\dfrac{z+6}{z-2}\right|_{z=-2}=2\pi i\times(-1)=-2\pi i$。

第三章习题解答

15、求下列级数的收敛半径，并对 c 讨论级数在收敛圆周上的敛散情况。

a.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}z^n$；b.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n z^n$；c.$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^k z^n$（$k>0$为常数）。

解： a. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$。

b. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$。

c. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{(n+1)^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^k=1$。

或$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{k}{n}}}=1$。

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = 1$【$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$（洛必达法则）】

在收敛圆周$|z|=1$上，$z=e^{i\theta}$，级数成为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k e^{in\theta}$。

$\because k>0$，$\therefore$它的通项$n^k e^{in\theta}$在$n\to\infty$时，不趋于0。

故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k e^{in\theta}$发散。

16、试求下列级数的收敛半径。

a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$；b. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$；c. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{a^n+ib^n}\left(a>0,b>0\right)$。

解: a.当$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|z^{(n+1)!}\right|}{\left|z^{n!}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\left(z^{n!}\right)^{n+1}\right|}{\left|z^{n!}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}|z|^{n!n} < 1$时，级数收敛。

当$\lim\limits_{n\to\infty}|z|^{n!n} > 1$时，级数发散。

亦即当$|z|<1$时，级数收敛。而当$|z|>1$时，级数发散。

于是收敛半径$R=1$。

b. $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!/n^n}{(n+1)!/(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$。

c.$\because R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$，$R = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a^n+ib^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{2n}+b^{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}$。

又因为$\max\{a,b\} \le \left(a^{2n}+b^{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} \le 2^{\frac{1}{2n}}\max\{a,b\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2n}} = 1$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{2n}+b^{2n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \max\{a,b\}$。

于是所求级数的收敛半径$R=\max\{a,b\}$。

或：$\because R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，$\therefore R = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{a^{2n+2}+b^{2n+2}}{a^{2n}+b^{2n}}}$。

当$a>b$时，$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{a^{2n+2}+b^{2n+2}}{a^{2n}+b^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{a^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2n}b^2}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2n}}}=a$，

当$a<b$时，$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{a^{2n+2}+b^{2n+2}}{a^{2n}+b^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n}a^2+b^2}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n}+1}}=b$，

$\therefore R=\max\{a,b\}$

17、将下列函数按z的幂展开，并指明收敛范围。

a. $\int_0^z e^{z^2}dz$；b. $\cos^2 z$。

解: a.$e^{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{n!}$，$|z|<\infty$，

$$\therefore \int_0^z e^{z^2}dz=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z\frac{z^{2n}}{n!}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}\qquad |z|<\infty。$$

b. $\cos^2 z=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2z)$，$\cos 2z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}$ $|z|<\infty$，

$$\therefore \cos^2 z=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}\qquad |z|<\infty。$$

18、将下列函数按$z-1$的幂展开，并指出收敛范围。

a. $\cos z$；b. $\dfrac{z}{z+2}$；c. $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$。

解: a.$\cos z=\cos[1+(z-1)]=\cos 1\cos(z-1)-\sin 1\sin(z-1)$。

$$\cos(z-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{(2n)!}，\quad \sin(z-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}，$$

$$\cos z=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{(2n)!}-\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad |z-1|<\infty。$$

$$\because (-1)^n\cos 1=\cos\left(\frac{2n\pi}{2}+1\right)，\quad (-1)^n\sin 1=-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi+1\right)。$$

$$\therefore \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2n}{2}\pi+1\right)}{(2n)!}(z-1)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi+1\right)}{(2n+1)!}(z-1)^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n}{2}\pi+1\right)}{n!}(z-1)^{n}\qquad |z-1|<\infty\text{。}$$

或：令 $f(z)=\cos z$，则 $f^{(n)}(z)=\cos\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)$， $f^{(n)}(1)=\cos\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(z-1)^{n}\qquad |z-1|<\infty$。

b. $\frac{z}{z+2}=1-\frac{2}{z+2}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$

$$=1-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{z-1}{3}\right)^{n}=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(z-1)^{n}}{3^{n+1}}\qquad |z-1|<3$$

c. $\frac{z}{z^{2}-2z+5}=\frac{z-1+1}{(z-1)^{2}+4}=\frac{z-1}{(z-1)^{2}+4}+\frac{1}{(z-1)^{2}+4}$

$$=\frac{z-1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{2}\right)^{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{2}\right)^{2}}$$

令 $\left(\frac{z-1}{2}\right)^{2}=t$， $\because\ \frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}t^{n}\quad |t|<1$

$$\therefore\ \frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{2}\right)^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-1)^{2n}}{4^{n}}，\quad \left|\frac{z-1}{2}\right|<1\Rightarrow |z-1|<2$$

从而 $\frac{z}{z^{2}-2z+5}=\frac{z-1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-1)^{2n}}{4^{n}}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-1)^{2n}}{4^{n}}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-1)^{2n+1}}{4^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(z-1)^{2n}}{4^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{4^{n+1}}\left[(z-1)^{2n}+(z-1)^{2n+1}\right]\qquad |z-1|<2$$

进一步，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{4^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{4^{n+1}}$

$$=\sum_{n=\text{奇数}}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n+1}}(z-1)^n+\sum_{n=\text{偶数}}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n+2}}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}\left[n-\frac{1-(-1)^n}{2}\right]}}{2^{n+\frac{3+(-1)^n}{2}}}(z-1)^n$$

所以 $\frac{z}{z^2-2z+5}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{1}{2}\left[n-\frac{1-(-1)^n}{2}\right]}}{2^{n+\frac{3+(-1)^n}{2}}}(z-1)^n \qquad |z-1|<2$。

19、将下列函数在指定的环域内展成罗朗级数。

a. $\frac{z+1}{z^2(z-1)}, 0<|z|<1, 1<|z|<\infty$；b. $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} \quad ,1<|z|<2$。

解: a. $\frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{z-1+2}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^2(z-1)}$。

在 $0<|z|<1$ 内，$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n$，

$\therefore \frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-2}=\frac{1}{z^2}-2\sum_{n=-2}^{\infty}z^n=-\frac{1}{z^2}-2\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$。

在 $1<|z|<\infty$ 内，$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$，

$\therefore \frac{z+1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}=\frac{1}{z^2}+2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{z^n}$。

b. $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}$

在 $1<|z|<2$ 内，$\frac{|z|}{2}<1$，且 $\left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{z^2}\right|<1$，

$\therefore \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$。

$$\frac{2}{z^2+1}=\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n}},$$

$$\therefore\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{2n}}\text{。}$$

20、将下列函数在指定点的无心邻域内展成罗朗级数，并指出成立范围。

a. $\frac{1}{(z^2+1)^2}$,$z=i$ 【$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-i)^n$】；b. $(z-1)^2e^{\frac{1}{1-z}}$,$z=1$【$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-1)^n$】。

解: a. $z=i$ 的无心邻域为 $0<|z-i|<R$，

$$\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\text{，}\quad\text{且}\ \frac{1}{(z+i)^2}=-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+i}\right),$$

$$\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i+z-i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}\qquad【i=(-1)^{\frac{1}{2}}】$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(z-i)^n}{2^{n+1}}\qquad |z-i|<|2i|=2\text{。}$$

$$\frac{1}{(z+i)^2}=-\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(z-i)^n}{2^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n(z-i)^{n-1}}{2^{n+1}},$$

$$\therefore\frac{1}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n(z-i)^{n-1}}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}n(z-i)^{n-3}}{2^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n+3)(z-i)^n}{2^{n+4}}\qquad 0<|z-i|<2\text{。}$$

b. $\because$ 当 $|z|<\infty$ 时，$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，

$$\therefore e^{\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(1-z)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}\qquad 0<|z-1|<\infty,$$

$$\therefore (z-1)^2 e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^{n-2}} = \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)!(z-1)^n} \qquad 0<|z-1|<\infty \text{。}$$

21、把 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 展成下列级数。

（1）在 $|z|<1$ 上展成 z 的泰勒级数；

（2）在 $|z|>1$ 上展成 z 的罗朗级数；

（3）在 $|z+1|<2$ 上展成 $(z+1)$ 的泰勒级数；

（4）在 $|z+1|>2$ 上展成 $(z+1)$ 的罗朗级数。

解:（1）在 $|z|<1$ 上，$\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$，【$\dfrac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 上解析】。

（2）在 $|z|>1$ 上，$\dfrac{1}{1-z}=-\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$。

（3）$\dfrac{1}{1-z}$ 在 $|z+1|<2$ 上解析，且 $\left|\dfrac{z+1}{2}\right|<1$，所以

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2-(z+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} \text{。}$$

（4）在 $|z+1|>2$ 上，$\left|\dfrac{2}{z+1}\right|<1$，所以

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2-(z+1)}=-\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z+1}}=-\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n} \text{。}$$

第四章习题解答

22、确定下列各函数的孤立奇点，并指出它们是什么样的类型（对于极点，要指出它们的阶），对于无穷远点也要加以讨论：

（1）$\dfrac{z-1}{z(z^2+1)^2}$；（2）$\cos\dfrac{1}{z+i}$；（3）$\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$。

解: （1） $z=0,z=i,z=-i$ 是 $\dfrac{z-1}{z\left(z^2+1\right)^2}$ 的孤立奇点且是极点。

$$\because\left[z\left(z^2+1\right)^2\right]'\Big|_{z=0}=\left[\left(z^2+1\right)^2+4z^2\left(z^2+1\right)\right]\Big|_{z=0}=1\neq 0,$$

$\therefore z=0$ 是 $z\left(z^2+1\right)^2$ 的一阶零点，从而是 $\dfrac{z-1}{z\left(z^2+1\right)^2}$ 的一阶极点；

$$\because\left[z\left(z^2+1\right)^2\right]'\Big|_{z=\pm i}=\left[\left(z^2+1\right)^2+4z^2\left(z^2+1\right)\right]\Big|_{z=\pm i}=0,$$

$$\left[z\left(z^2+1\right)^2\right]''\Big|_{z=\pm i}=\left[\left(z^2+1\right)^2+4z^2\left(z^2+1\right)\right]'\Big|_{z=\pm i}$$

$$=\left[4z\left(z^2+1\right)+8z\left(z^2+1\right)+8z^3\right]\Big|_{z=\pm i}=8\left(\pm i\right)^3\neq 0,$$

$\therefore z=\pm i$ 是 $z\left(z^2+1\right)^2$ 的二阶零点，从而是 $\dfrac{z-1}{z\left(z^2+1\right)^2}$ 的二阶极点。

$\because \dfrac{z-1}{z\left(z^2+1\right)^2}$ 在 $1<|z|<\infty$ 内解析， $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z-1}{z\left(z^2+1\right)^2}=0$， $\therefore z=\infty$ 是可去奇点，

四阶零点。

（2） $\because \cos\dfrac{1}{z+i}$ 在 $z=-i$ 的罗朗展开式 $\cos\dfrac{1}{z+i}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z+i)^{2n}}$ 的主要

部分有无穷多项，

$\therefore z=-i$ 是 $\cos\dfrac{1}{z+i}$ 的本性奇点。

$\because \cos\dfrac{1}{z+i}$ 在 $1<|z|<\infty$ 内解析， $\lim\limits_{z\to\infty}\cos\dfrac{1}{z+i}=1$，

$\therefore \infty$ 是 $\cos\dfrac{1}{z+i}$ 的可去奇点。

（3） $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin z+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos z\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)}$，

$\sin\left(z+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的零点 $z_n=n\pi-\dfrac{\pi}{4},n=0,\pm1,\pm2,\cdots$， 是 $\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$ 的极点。

又$\left[\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)'\right]\Bigg|_{z=z_n=n\pi-\frac{\pi}{4}}=\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{z=z_n=n\pi-\frac{\pi}{4}}=(-1)^n\neq 0$，

$\therefore z_n=n\pi-\frac{\pi}{4}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$是$\sin z+\cos z$的一阶零点，从而是$\frac{1}{\sin z+\cos z}$的一阶极点。

$z=\infty$是$\frac{1}{\sin z+\cos z}$的奇点，但不是孤立奇点，因为在无穷远点的的任何邻域$r<|z|<\infty$内,总有其它奇点。

23、求$f(z)=\frac{1-e^z}{1+e^z}$在孤立奇点处的留数。

解:$1+e^z=0$的解$z_n=i(2n+1)\pi.\ \ n=0,\pm1,\pm2\cdots$，是$\frac{1-e^z}{1+e^z}$的奇点。

由于$\lim\limits_{z\to i(2n+1)\pi}\frac{1-e^z}{1+e^z}=\infty$，$\therefore z_n=i(2n+1)\pi$是$\frac{1-e^z}{1+e^z}$的极点。又

$$\left(\frac{1+e^z}{1-e^z}\right)'\Bigg|_{z=z_n=i(2n+1)\pi}=\frac{e^z\left(1-e^z\right)+e^z\left(1+e^z\right)}{\left(1-e^z\right)^2}\Bigg|_{z=z_n=i(2n+1)\pi}$$

$$=\frac{2e^z}{\left(1-e^z\right)^2}\Bigg|_{z=z_n=i(2n+1)\pi}=\frac{-2}{2^2}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

$\therefore z_n=i(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$是$\frac{1+e^z}{1-e^z}$的一阶零点，从而是$\frac{1-e^z}{1+e^z}$的一阶极点。

$z=\infty$不是$\frac{1-e^z}{1+e^z}$的孤立奇点，因为在它的任一邻域$r<|z|<\infty$内,总有其它的奇点。

由推论 2：$\mathrm{Re}sf\left[i(2n+1)\pi\right]=\frac{1-e^z}{\left(1+e^z\right)'}\Bigg|_{z=z_n=i(2n+1)\pi}=\frac{1-e^z}{e^z}\Bigg|_{z=z_n=i(2n+1)\pi}=\frac{1+1}{-1}=-2$。

【$\oint_{|z|=4}\frac{1-e^z}{1+e^z}dz=2\pi i\sum\limits_{n=-1}^{0}\mathrm{Re}sf\left[i(2n+1)\pi\right]=2\pi i\times(-2-2)=-8\pi i$】

24、求下列函数在指定点处的留数。

（1）$\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ 在 $z=\pm1,\ \infty$；

（2）$\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 在 $z=0$，∞。

解:（1）$z=1$ 为 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ 的一阶级点.，

$z=-1$ 为 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ 的二阶极点。

$\therefore \operatorname{Re}sf(1)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{z}{(z+1)^2}=\dfrac{1}{4}$，

$\operatorname{Re}sf(-1)=\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{d}{dz}\left[(z+1)^2\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right]=\lim\limits_{z\to-1}\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)=-\dfrac{1}{4}$。

由于 $z=\pm1$ 已是 $f(z)$ 的所有有限孤立奇点，

$\therefore \operatorname{Re}sf(\infty)=-\left[\operatorname{Re}sf(1)+\operatorname{Re}sf(-1)\right]=0$。

（2）$f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$ 在 $z=0$ 的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2z)^n}{n!}}{z^4}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n z^{n-4}}{n!}=-\sum_{n=-3}^{\infty}\frac{2^{n+4}z^n}{(n+4)!}$$

$\therefore a_{-1}=-\dfrac{2^3}{3!}=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow \operatorname{Re}sf(0)=-\dfrac{4}{3}$。

由于 $z=0$ 是 $f(z)$ 的仅有的一个有限孤立奇点，

$\therefore \operatorname{Re}sf(\infty)=-\operatorname{Re}sf(0)=\dfrac{4}{3}$。

【$f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^3}$ 在 $z=0$ 的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!}}{z^3}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n z^{n-3}}{n!}=-\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{2^{n+3}z^n}{(n+3)!}$$

$\therefore a_{-1}=-\frac{2^2}{2!}=-2\Rightarrow \mathrm{Res} f(0)=-2$ 】

25、求下列函数在其奇点（包括无穷远点）处的留数，（m 是自然数）

（1）$z^m\sin\frac{1}{z}$ （m 是自然数）;

（2）$\frac{e^z}{(z-1)^2}$；

（3）$\frac{e^z-1}{\sin^3 z}$ 。

解: （1）$z=0$ 是 $f(z)=z^m\sin\frac{1}{z}$ 的有限远孤立奇点。在 $z=0, f(z)$ 的罗朗展开式为 $f(z)=z^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1-m}}$ 。

令 $2n+1-m=1$,则 $n=\frac{m}{2}$ 。

$\because n$ 为非负整数，$\therefore$ 只有 m 为偶数时上式才成立。

而当 m 为奇数时,$2n+1-m\neq 1$，即 $f(z)$ 在 $z=0$ 的罗朗展开式中没有 -1 次幂项，即 $a_{-1}=0$ 。

$\therefore$ 当 m 为奇数时，$\mathrm{Res} f(0)=0$ 。

当 m 为偶数时,$n=\frac{m}{2}$ 的项是 -1 次幂项，$a_{-1}=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(m+1)!}$，所以，此时

$\mathrm{Res} f(0)=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(m+1)!}$ 。

总之，不管 m 为偶数或奇数，都有 $\operatorname{Re}sf(0)=\dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(m+1)!}\cdot\dfrac{1+(-1)^m}{2}$ 。

（2） $z=1$ 是 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ 的唯一的有限奇点,且是二阶极点。

$$\therefore \operatorname{Re}sf(1)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2}\right]=e,$$

$$\therefore \operatorname{Re}sf(\infty)=-\operatorname{Re}sf(1)=-e$$

（3） $z=n\pi$ ， $n=0,\pm1,\cdots$ ，是 $f(z)=\dfrac{e^{z-1}}{\sin^3 z}$ 的孤立奇点。

$f(z)$ 在 $z=n\pi$ 点的罗朗展开式为

$$f(z)=\frac{e^{n\pi}e^{z-n\pi}-1}{(-1)^n\sin^3(z-n\pi)}$$

$$=(-1)^n\frac{e^{n\pi}-1+e^{n\pi}\left[(z-n\pi)+\dfrac{(z-n\pi)^2}{2!}+\dfrac{(z-n\pi)^3}{3!}+\cdots\right]}{\left[(z-n\pi)-\dfrac{(z-n\pi)^3}{3!}+\dfrac{(z-n\pi)^5}{5!}+\cdots\right]^3}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(z-n\pi)^3}\cdot\frac{e^{n\pi}-1+e^{n\pi}\left[(z-n\pi)+\dfrac{(z-n\pi)^2}{2!}+\dfrac{(z-n\pi)^3}{3!}+\cdots\right]}{\left[1-\dfrac{(z-n\pi)^2}{6}+\dfrac{(z-n\pi)^4}{5!}+\cdots\right]^3}$$

$\left[1-\dfrac{(z-n\pi)^2}{6}+\dfrac{(z-n\pi)^4}{5!}+\cdots\right]^{-3}$ 在 $z=n\pi$ 解析，且为 $(z-n\pi)$ 的偶函数,所以它在 $z=n\pi$ 处的泰勒展开式中只有 $(z-n\pi)$ 的偶次项。而

$$\left[1-\frac{(z-n\pi)^2}{6}+\frac{(z-n\pi)^4}{5!}+\cdots\right]^{-3}\Bigg|_{z=n\pi}=1,$$

$$及\left\{\left[1-\frac{(z-n\pi)^2}{6}+\frac{(z-n\pi)^4}{5!}+\cdots\right]^{-3}\right\}''\Bigg|_{z=n\pi}$$

$$=-3\left\{\left[-\frac{z-n\pi}{3}+\frac{4(z-n\pi)^3}{5!}+\cdots\right]\left[1-\frac{(z-n\pi)^2}{6}+\frac{(z-n\pi)^4}{5!}+\cdots\right]^{-4}\right\}'\Bigg|_{z=n\pi}$$

$$=-3\left\{\left[-\frac{1}{3}+\frac{12(z-n\pi)^2}{5!}+\cdots\right]\left[1-\frac{(z-n\pi)^2}{6}+\frac{(z-n\pi)^4}{5!}+\cdots\right]^{-4}\right.$$

$$\left.-4\left[-\frac{z-n\pi}{3}+\frac{4(z-n\pi)^3}{5!}+\cdots\right]^2\left[1-\frac{(z-n\pi)^2}{6}+\frac{(z-n\pi)^4}{5!}+\cdots\right]^{-5}\right\}\Bigg|_{z=n\pi}=1$$

$$\therefore\left[1-\frac{(z-n\pi)^2}{6}+\frac{(z-n\pi)^4}{5!}+\cdots\right]^{-3}=1+\frac{1}{2}(z-n\pi)^2+a_4(z-n\pi)^4+\cdots。$$

$$f(z)=\frac{(-1)^n}{(z-n\pi)^3}\left\{e^{n\pi}-1+e^{n\pi}\left[(z-n\pi)+\frac{(z-n\pi)^2}{2!}+\frac{(z-n\pi)^3}{3!}+\cdots\right]\right\}\times$$

$$\times\left[1+\frac{(z-n\pi)^2}{2}+a_4(z-n\pi)^4+\cdots\right],$$

-1次幂项的系数$a_{-1}=(-1)^n\left[\frac{1}{2}\left(e^{n\pi}-1\right)+\frac{1}{2}e^{n\pi}\right]=(-1)^n\left(e^{n\pi}-\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore \operatorname{Res} f(n\pi)=(-1)^n\left(e^{n\pi}-\frac{1}{2}\right)。$$

$z=\infty$不是$f(z)$的孤立奇点。

26、求下列函数在其孤立奇点（包括无穷远点）处的留数。

（1）$e^{\frac{\alpha}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$；（2）$\dfrac{1}{(z-\alpha)^m(z-\beta)}$ $(\alpha\neq\beta)$。

解:（1）$z=0$是$f(z)=e^{\frac{\alpha}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$的本性奇点，$z=\infty$为其孤立奇点。

$f(z)$在$z=0$点的罗朗展开式为

$$e^{\frac{\alpha}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=e^{\frac{\alpha}{2}z}e^{-\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n z^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^m}{m!z^m}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n z^n}{n!}\sum_{m=-\infty}^{0}\frac{1}{|m|!}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^{-m}z^m=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{0}\frac{(-1)^{-m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-m}}{n!|m|!}z^{n+m}。$$

当$m+n=-1$时，即$m=-n-1$，$n-m=2n+1$时,z^{m+n}的系数a_{-1}即为

$\mathrm{Re}sf(0)$，所以

$$\mathrm{Re}sf(0)=a_{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-(-n-1)}}{n!(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$ 【利用了$m=-n-1$】。

$$\mathrm{Re}sf(\infty)=-\mathrm{Re}sf(0)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}。$$

（2）$z=\alpha$是$f(z)=\dfrac{1}{(z-\alpha)^m(z-\beta)}$的$m$阶极点，而$z=\beta$是$f(z)$的一阶（单）

极点。

$$\therefore \operatorname{Res} f(\alpha)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-\alpha)^m\frac{1}{(z-\alpha)^m(z-\beta)}\right]$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\frac{1}{z-\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z-\beta)^m}=\frac{(-1)^{m-1}}{(\alpha-\beta)^m}=-\frac{1}{(\beta-\alpha)^m},$$

$$\operatorname{Res} f(\beta)=\lim_{z\to\beta}(z-\beta)\frac{1}{(z-\alpha)^m(z-\beta)}=\lim_{z\to\beta}\frac{1}{(z-\alpha)^m}=\frac{1}{(\beta-\alpha)^m}\text{。}$$

$\because z=\alpha,\beta$ 是 $f(z)$ 的仅有的二个有限远孤立奇点，

$\therefore \operatorname{Res} f(\infty)=-\left[\operatorname{Res} f(\alpha)+\operatorname{Res} f(\beta)\right]=0$ 。

27、计算下列积分

（1）$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}$；

（2）$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$, $|a|<1, |b|<1, a\neq b,\ n$ 为自然数；

（3）$\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{1+z^2}dz$ 。

解:（1） $z=0$是被积函数$f(z)=\frac{1}{z\sin z}$在单位圆内的孤立奇点。

$$\because (z\sin z)\big|_{z=0}=0\text{，}\quad (z\sin z)'\big|_{z=0}=(\sin z+z\cos z)\big|_{z=0}=0$$

$(z\sin z)''\Big|_{z=0}=(2\cos z-z\sin z)\Big|_{z=0}=2\neq 0$ 。

$\therefore z=0$ 是 $z\sin z$ 的二阶零点，也就是 $f(z)$ 的二阶极点。

$$\therefore \operatorname{Re}sf(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{1}{z\sin z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\sin z}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-\cos z+z\sin z}{2\sin z\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\cos z}=0$$ 。

由留数定理，得

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\sin z}=2\pi i\operatorname{Re}sf(0)=0$$ 。

（2）由于 $|a|<1$，$|b|<1$，$\therefore$ 被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}$ 在单位圆内有二个 n 阶极点 $z_1=a$，$z_2=b$。于是

$$\operatorname{Re}sf(a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}\right]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-b)^{-n}\right]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}(-n)(-n-1)\cdots[-n-(n-2)](z-b)^{-n-(n-1)}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}$$ 。

同理 $\operatorname{Re}sf(b)=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}\cdot\dfrac{1}{(b-a)^{2n-1}}$ 。

由留数定理，得

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}=2\pi i\left[\operatorname{Res}f(a)+\operatorname{Res}f(b)\right]$$

$$=2\pi i(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}\left[\frac{1}{(a-b)^{2n-1}}+\frac{1}{(b-a)^{2n-1}}\right]=0\text{。}$$

（3）被积函数 $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{1+z^2}=\dfrac{e^{2z}}{(z-i)(z+i)}$，

$\therefore z_1=i$， $z_2=-i$ 是 $f(z)$ 在圆 $|z|<2$ 内的二个一阶极点。

$$\operatorname{Res}f(i)=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{2z}}{(z-i)(z+i)}\right]=\frac{e^{2i}}{2i},$$

$$\operatorname{Res}f(-i)=\lim_{z\to -i}\left[(z+i)\frac{e^{2z}}{(z-i)(z+i)}\right]=-\frac{e^{-2i}}{2i}\text{。}$$

由留数定理，得

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{1+z^2}dz=\frac{1}{2\pi}2\pi i\left[\operatorname{Res}f(i)+\operatorname{Res}f(-i)\right]=i\left(\frac{e^{2i}-e^{-2i}}{2i}\right)=i\sin 2\text{。}$$

28、求下列各积分值

（1）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$ ；　　（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}$ $(a>0)$。

解:（1）$\because \cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，

$$\therefore I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}=\int_0^{2\pi}\frac{2d\theta}{3+\cos 2\theta}=\int_0^{4\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}+\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}\text{。}$$

令 $\varphi=\theta-2\pi$，则 $\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}\overset{\varphi=\theta-2\pi}{=}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{3+\cos\varphi}=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}$，

$\therefore I=2\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta}$。

令 $z=e^{i\theta}$，$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，$d\theta=\frac{dz}{iz}$，则

$$I=2\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(3+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)iz}=\frac{4}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+6z+1}\text{。}$$

$f(z)=\frac{1}{z^2+6z+1}$ 有二个一阶极点 $z_1=-3+\sqrt{8}$，$z_2=-3-\sqrt{8}$。

$\because |z_2|=3+\sqrt{8}>1$，$\therefore z_2$ 在单位圆 $|z|<1$ 外。

又 $\because |z_1|=3-\sqrt{8}<3-\sqrt{4}=1$，$\therefore z_1$ 在单位圆 $|z|<1$ 内。

由关于极点的留数定理的推论 2，得

$$\operatorname{Res}f(z_1)=\left.\frac{1}{\left(z^2+6z+1\right)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{1}{2z+6}\right|_{z=-3+\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{8}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\text{。}$$

由留数定理，得

$$I=\frac{4}{i}\times 2\pi i\operatorname{Res}f(z_1)=\frac{4}{i}\times 2\pi i\times\frac{1}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi\text{。}$$

（2）$\because \sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，

$$\therefore I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a+\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d\theta}{2a+1-\cos 2\theta}=\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{2a+1-\cos\theta}\text{。}$$

令 $\theta=2\pi-\varphi$，则 $\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{2a+1-\cos\theta}\overset{\theta=2\pi-\varphi}{=}-\int_{2\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{2a+1-\cos\varphi}=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{2a+1-\cos\theta}$。

$$\therefore I=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{2a+1-\cos\theta}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{2a+1-\cos\theta}\right]=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{2a+1-\cos\theta}\text{。}$$

令 $z=e^{i\theta}$，$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，$d\theta=\frac{dz}{iz}$，则

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2a+1-\cos\theta}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\left(2a+1-\frac{z+z^{-1}}{2}\right)iz}=i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2(2a+1)z+1}。$$

$f(z)=\frac{1}{z^2-2(2a+1)z+1}$有两个一阶极点$z_1=(2a+1)+2\sqrt{a^2+a}$和

$z_2=(2a+1)-2\sqrt{a^2+a}$。

$|z_1|=(2a+1)+2\sqrt{a^2+a}>1$，$\therefore z_1$在单位圆$|z|<1$外。

$|z_2|=(2a+1)-2\sqrt{a^2+a}<2a+1-2a=1$，$\therefore z_2$在单位圆$|z|<1$内。

由关于极点的留数定理的推论 2，得

$$\operatorname{Res}f(z_2)=\left.\frac{1}{\left[z^2-2(2a+1)z+1\right]'}\right|_{z=z_2}=\left.\frac{1}{2z-2(2a+1)}\right|_{z=(2a+1)-2\sqrt{a^2+a}}=-\frac{1}{4\sqrt{a^2+a}}。$$

由留数定理，得

$$I=i\times2\pi i\operatorname{Res}f(z_2)=i\times2\pi i\times\frac{-1}{4\sqrt{a^2+a}}=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}。$$

29、求下列各积分的值

（1）$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ ；　　（2）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$；

（3）$\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}dx$ （$m>0,a>0$）。

解:（1）$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$。

$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$在实轴上无奇点，且$zf(z)\xrightarrow{z\to\infty}0$。

$f(z)$有四个一阶极点，但只有二个$z_1=i$，$z_2=2i$在上半平面。

$$\operatorname{Res}f(i)=\lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z^2+4)}\right]=-\frac{1}{6i},$$

$$\mathrm{Re}\,sf(2i)=\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z-2i)(z+2i)}\right]=\frac{1}{3i}\text{。}$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\mathrm{Re}\,sf(i)+\mathrm{Re}\,sf(2i)\right]=\frac{\pi}{6}\text{。}$$

（2） $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$ 在实轴上无奇点,当 $z\to\infty$ 时, $f(z)\to 0$ 。

$F(z)=f(z)e^{iz}$ 在上半平面有两个一阶极点 $z_1=i$ 和 $z_2=3i$ 。

$$\mathrm{Re}\,sF(i)=\lim_{z\to i}\left[\frac{(z-i)e^{iz}}{(z-i)(z+i)(z^2+9)}\right]=\frac{e^{-1}}{16i},$$

$$\mathrm{Re}\,sF(3i)=\lim_{z\to 3i}\left[\frac{(z-3i)e^{iz}}{(z^2+1)(z-3i)(z+3i)}\right]=\frac{-e^{-3}}{48i}\text{。}$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x dx}{(x^2+1)(x^2+9)}=2\pi i\left[\mathrm{Re}\,sF(i)+\mathrm{Re}\,sF(3i)\right]=\pi\left[\frac{1}{8e}-\frac{1}{24e^3}\right]\text{。}$$

（3） $f(z)=\dfrac{z}{z^4+a^4}$ 在实轴上无奇点,且 $f(z)\xrightarrow{z\to\infty}0$ 。

$F(z)=f(z)e^{imz}=\dfrac{ze^{imz}}{z^4+a^4}$ 在上半平面有二个一阶极点 $z_1=ae^{i\frac{\pi}{4}}$ 和 $z_2=ae^{i\frac{3}{4}\pi}$ 。

由关于极点的留数定理的推论 2，得

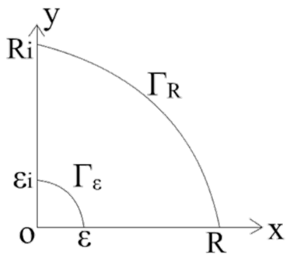
$$\mathrm{Re}\,sF(z_1)=\left.\frac{ze^{imz}}{(z^4+a^4)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{e^{imz}}{4z^2}\right|_{z=ae^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{e^{im\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)}}{4a^2i}=\frac{e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}e^{i\frac{ma}{\sqrt{2}}}}{4a^2i},$$

$$\mathrm{Re}\,sF(z_2)=\left.\frac{ze^{imz}}{(z^4+a^4)'}\right|_{z=z_2}=\left.\frac{e^{imz}}{4z^2}\right|_{z=ae^{i\frac{3}{4}\pi}}=-\frac{e^{im\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i)}}{4a^2i}=-\frac{e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}e^{-i\frac{ma}{\sqrt{2}}}}{4a^2i}\text{。}$$

$$\therefore\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^4+a^4}dx=\pi\left[\mathrm{Re}\,sF(z_1)+\mathrm{Re}\,sF(z_2)\right]$$

$$=\pi\left(\frac{e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}e^{i\frac{ma}{\sqrt{2}}}}{4a^2i}-\frac{e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}e^{-i\frac{ma}{\sqrt{2}}}}{4a^2i}\right)=\frac{\pi}{2a^2}e^{-\frac{ma}{\sqrt{2}}}\sin\frac{ma}{\sqrt{2}}\text{。}$$

30、从$\oint_c \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz$出发，其中$c$为如图所示之围线，方向沿逆时针方向。证明



$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$ 。

解:$\because \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}$在$c$所围的区域内解析，$\therefore$由柯西定理:$\oint_c \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz = 0$。（1）

又$\oint_c \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz + \int_R^\varepsilon \frac{e^{-y}}{\sqrt{iy}}idy + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz$。（2）

令$z = Re^{i\theta}$,则

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz \le \int_\Gamma \left|\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\right||dz| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{\sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}}\right| \left|iRe^{i\theta}d\theta\right| = \sqrt{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta,$$

$$\therefore \left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz\right| \le \sqrt{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta$$ 。

又$\frac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \le \theta, -\theta \le -\sin\theta \le -\frac{2\theta}{\pi}, \forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\therefore \left|\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz\right| \le \sqrt{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta \le \sqrt{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{R}}\left[1 - e^{-R}\right] \xrightarrow{R\to\infty} 0$$ 。（3）

$$\because \left|\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz\right| \le \int_{\Gamma_\varepsilon} \left|\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\right||dz| \overset{z=\varepsilon e^{i\theta}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{e^{i\varepsilon(\cos\theta + i\sin\theta)}}{\sqrt{\varepsilon}e^{i\frac{\theta}{2}}}\right| \left|i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right| = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\varepsilon\sin\theta}d\theta,$$

$$\therefore \left|\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz\right| \le \sqrt{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\varepsilon\sin\theta}d\theta$$ 。

又$0 \le \sin\theta \le 1$，$\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\therefore \left|\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz\right| \le \sqrt{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\varepsilon\sin\theta}d\theta \le \sqrt{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$ 。（4）

$\therefore$令$R \to \infty, \varepsilon \to 0$,由（1）、（2）、（3）、（4）得

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{i}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy$$，（5）

而 $\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy \overset{y=t^2}{=} 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$，及 $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$，

于是 $\sqrt{i}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(1+i) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$。（6）

由（5）和（6）得

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx + i\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$。（7）

比较（7）两边的实部和虚部，得

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$。（8）

进一步，若令 $x = y^2$，则（8）成为

$$2\int_0^\infty \cos y^2 dy = 2\int_0^\infty \sin y^2 dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$，

从而 $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$。

二、数学物理方程及特殊函数部分习题解答

第五章习题解答

31、弦在阻尼介质中振动，单位长度的弦所受阻力 $F = -Ru_t$（比例常数 R 叫做阻力系数），试推导弦在这阻尼介质中的振动方程。

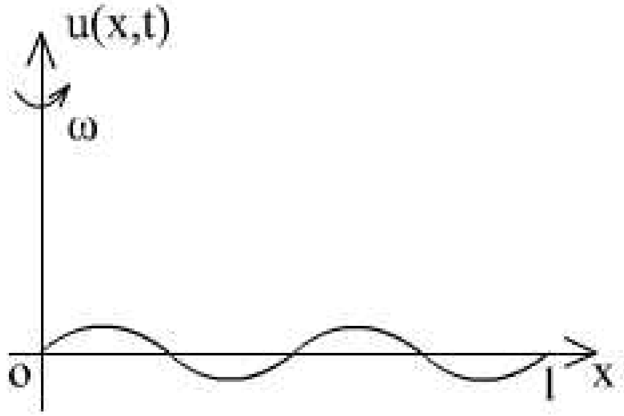
解： 与课上推导弦的受迫振动方程一样，令其中的 $F(x,t) = -Ru_t$，

$$f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho} = -\frac{R}{\rho}u_t$$，

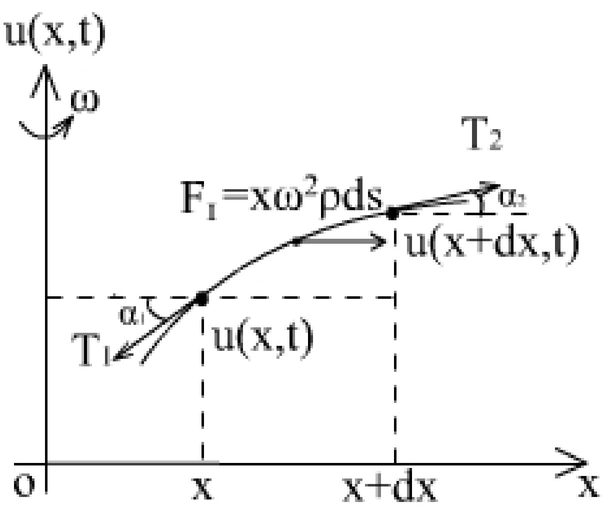
$\therefore$弦在介质中的振动方程为：$u_{tt}=a^2u_{xx}-\frac{R}{\rho}u_t$，即

$u_{tt}+bu_t=a^2u_{xx}$， $a^2=\frac{T}{\rho}$， $b=\frac{R}{\rho}$。

32、长为l柔软均质轻绳，一端（$x=0$）固定在以匀速ω转动的竖直轴上。由于惯性离心力的作用，这绳的平衡位置应是水平线。试推导此绳相对于水平线的横振动方程。



解： 研究位于x到$x+dx$这一段绳A的振动情况。设绳的质量密度为ρ。A在纵向没有运动，于是A所受的纵向合力为零，即A所受的张力在纵向的合力等于其所受的惯性离心力，



$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1+\rho ds\omega^2x=0$

即 $T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=-\rho ds\omega^2x$ （1）

在横向，由牛顿第二定律$\bar{F}=m\bar{a}$，得

$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=\rho dsu_{tt}$ （2）

在小振动条件下，有

$\cos\alpha_1\approx\cos\alpha_2\approx1$， $ds\approx dx$，

注意到$T_2 = T\big|_{x+dx}$，$T_1 = T\big|_x$，由（1）得

$$T\big|_{x+dx} - T\big|_x = -\rho dx\omega^2 x，$$

即 $dT = -\rho\omega^2 xdx$

于是绳中任一点x处的张力为

$T(x) = \int_0^T dT = -\int_l^x \rho\omega^2 xdx = \int_x^l \rho\omega^2 xdx = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2 - x^2\right)$。（3）【$(x,l)$段的惯性离心力】

又$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = u_x\big|_x$，$\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = u_x\big|_{x+dx}$，代入（2）得

$$\left(Tu_x\right)\big|_{x+dx} - \left(Tu_x\right)\big|_x = \rho dx u_{tt}，\quad \Rightarrow \frac{\left(Tu_x\right)\big|_{x+dx} - \left(Tu_x\right)\big|_x}{dx} = \rho u_{tt}$$

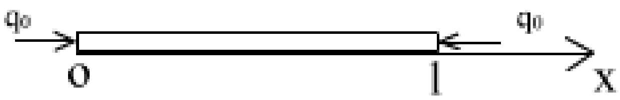
即$\frac{\partial\left(Tu_x\right)}{\partial x} = \rho u_{tt}$，（4）

将$T(x)$的表达式（3）代入（4），得绳相对于水平线的横振动方程为

$u_{tt} = \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2 - x^2\right)u_x\right]$ 　　　与ρ无关。

【$0 < x < l$，边界条件$u\big|_{x=0} = 0$，$u\big|_{x=l}$有限（自然边界条件）】

33、长为l的均匀杆，两端由恒定热流进入，其强度为q_0。试写出这个热传导问题的边界条件。



解： 由热传导的傅里叶定律

$\vec{q} = -k\nabla u$，在边界Σ上有$\vec{q}\cdot\vec{n}\big|_\Sigma = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma$，其中$\vec{n}$为边界$\Sigma$的单位法线矢量，$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u\cdot\vec{n}$为$u$沿$\vec{n}$的方向导数。在$x = 0$端，$\vec{q}\cdot\vec{n} = q_0\vec{i}\cdot\left(-\vec{i}\right) = -q_0$，而$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$，所以

$$-q_0 = -k\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} \Rightarrow q_0 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}。$$

在 $x=l$ 端，$\vec{q}\cdot\vec{n}=\left(-q_0\vec{i}\right)\cdot\vec{i}=-q_0$，而 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}$，所以

$-q_0=-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}\Rightarrow q_0=k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$。

即边界条件为：$\left.u_x\right|_{x=0}=-\frac{q_0}{k}$，$\left.u_x\right|_{x=l}=\frac{q_0}{k}$。

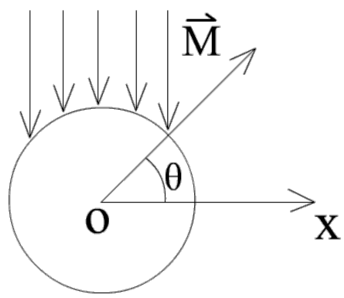
或：在一维时，$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}$，而 $\vec{q}=\begin{cases}q_0\vec{i}, & x=0\\ -q_0\vec{i}, & x=l\end{cases}$，由热传导的傅里叶定律

$\vec{q}=-k\nabla u$，得 $-k\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}=\begin{cases}q_0\vec{i}, & x=0\\ -q_0\vec{i}, & x=l\end{cases}$，所以边界条件为

$\left.u_x\right|_{x=0}=-\frac{q_0}{k}$，$\left.u_x\right|_{x=l}=\frac{q_0}{k}$。

34、半径为 R 而表面燻黑的金属长圆柱，受到阳光照射，阳光方向垂直于柱轴，热流强度为 M。设圆柱外界的温度为 u_0，试写出这个圆柱的热传导问题的边界条件。

解法一：如图取极坐标系，极轴垂直于阳光，由阳光照射而产生的，通过圆柱表面流入圆柱体的热流强度为



$$\overline{q_1}=\begin{cases}-M\sin\theta\overline{e_\rho} & (0<\theta<\pi)\\ 0 & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases},$$

同样由阳光照射而产生的，通过圆柱表面流出圆柱体的热流强度为

$$\overline{q_1}'=-\overline{q_1}=\begin{cases}M\sin\theta\overline{e_\rho} & (0<\theta<\pi)\\ 0 & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases}。$$

由圆柱本身的温度分布产生的热流强度为 $\overline{q_2}=-k\nabla u$，而在极坐标系中 $\nabla=\overline{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\overline{e_\theta}\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$，故其通过圆柱表面流出圆柱体的热流强度为

$\overline{q_2}'=-k\frac{\partial u}{\partial\rho}\overline{e_\rho}$。总的通过圆柱表面流出圆柱体的热流强度为 $\overline{q_1}'+\overline{q_2}'$，其

在表面的大小为$q=\left[\left(\overline{q_1}'+\overline{q_2}'\right)\cdot\overline{e_\rho}\right]\Big|_{\rho=R}=-k\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}+f(\theta)$，其中

$$f(\theta)=\begin{cases}M\sin\theta & (0<\theta<\pi)\\ 0 & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases}。$$

由牛顿热交换定律，知q应与$\left(u|_{\rho=R}-u_0\right)$成正比，即

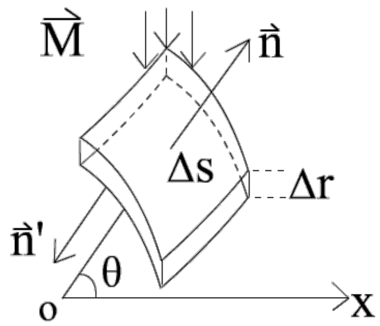
$$-k\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}+f(\theta)=h\left(u|_{\rho=R}-u_0\right),$$

$$\therefore\left(-k\frac{\partial u}{\partial\rho}-hu\right)\Big|_{\rho=R}=-f(\theta)-hu_0=\begin{cases}-M\sin\theta-hu_0 & (0<\theta<\pi)\\ -hu_0 & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases},$$

两边除以$-h$，即得边界条件为：

$$\left(u+H\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\Big|_{\rho=R}=\begin{cases}\dfrac{M}{h}\sin\theta+u_0 & (0<\theta<\pi)\\ u_0 & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases},\quad H=\frac{k}{h}。$$

解法二：取如图的圆柱表面的一个小块来分析。



小块的面积为Δs，厚度为Δr，两个表面分别为Σ和Σ'，$\vec{n}$为Σ的外法线方向单位矢量，而$\vec{n}'$为Σ'的内法线方向单位矢量。单位时间流出小块的热量等于其能量的减少率，即

$$-c\rho\Delta r\Delta s\frac{\partial u}{\partial t}=\vec{n}'\cdot(-k\nabla u)\Big|_{\Sigma'}\Delta s+h\left(u|_\Sigma-u_0\right)\Delta s+\overline{q_1}\cdot\vec{n}\Delta s，（*）$$

其中$\overline{q_1}=\begin{cases}-M\sin\theta\overline{e_\rho} & (0<\theta<\pi)\\ 0 & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases}$，$\vec{n}=\overline{e_\rho}$。

令$\Delta r\to0$，则$\Sigma^{'}\to\Sigma$，$\vec{n}'\to-\vec{n}$，（*）的左边趋于0，（*）成为

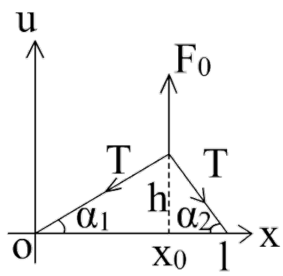
$$k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma+h\left(u|_\Sigma-u_0\right)+f(\theta)=0，（**）$$

其中$f(\theta)=\overline{q_1}\cdot\vec{n}=\begin{cases}-M\sin\theta & (0<\theta<\pi)\\ 0 & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases}$，（**）两边除以$h$，即得边界条件:

$$\left(u+H\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)\bigg|_{\rho=R}=u_0-f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{M}{h}\sin\theta+u_0 & (0<\theta<\pi) \\ u_0 & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases}，\quad H=\frac{k}{h}。$$

第六章习题解答

35、长为l的弦，两端固定，弦中张力为T，在距一端为x_0的一点以力F_0把弦拉开，然后突然撤除这力，求解此弦的振动。



解： 先求出初始位移，分$(0,x_0)$和(x_0,l)两段来考虑。

设x_0点的位移为h，则

在$0<x<x_0$中，$u=x\tan\alpha_1=\dfrac{h}{x_0}x$，

在$x_0<x<l$中，$u=(l-x)\tan\alpha_2=\dfrac{h}{l-x_0}(l-x)$。

在小振动，α_1、α_2很小的条件下，利用力的平衡条件和小振动条件

$\sin\alpha_1\approx\tan\alpha_1$，$\sin\alpha_2\approx\tan\alpha_2$，得

$$F_0=T\sin\alpha_1+T\sin\alpha_2\approx T\tan\alpha_1+T\tan\alpha_2=T\left(\frac{h}{x_0}+\frac{h}{l-x_0}\right)=\frac{Tlh}{x_0(l-x_0)},$$

于是 $h=\dfrac{F_0x_0(l-x_0)}{Tl}$。

$$\therefore u\big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{F_0(l-x_0)}{Tl}x & (0<x<x_0) \\ \dfrac{F_0x_0}{Tl}(l-x) & (x_0<x<l)\end{cases}。$$

$\therefore$定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (t>0,0<x<l) \\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0 & (t>0) \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{F_0(l-x_0)}{Tl}x & (0<x<x_0) \\ \dfrac{F_0x_0}{Tl}(l-x) & (x_0<x<l) \end{cases} \\ u_t\big|_{t=0}=0 & (0<x<l) \end{cases}$$ 。

分离变数，令$u(x,t)=X(x)T(t)$，代入方程及边界条件，可得既满足方程又满足边界条件的通解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$ 。

代入初始条件，得 $\varphi(x)=u\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x$，

$0=u_t\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$ 。 $\therefore B_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{x_0}\frac{F_0(l-x_0)}{Tl}x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+\int_{x_0}^{l}\frac{F_0x_0}{Tl}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\frac{F_0(l-x_0)}{Tl}\left(\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\Bigg|_0^{x_0}\right.$$

$$\left.-\frac{F_0x_0}{n\pi T}\cos\frac{n\pi}{l}x\Bigg|_{x_0}^{l}-\frac{F_0x_0}{Tl}\left(\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\Bigg|_{x_0}^{l}\right]=\frac{2F_0l}{Tn^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}$$ 。

$$\therefore u(x,t)=\frac{2F_0l}{T\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$$ 。

36、研究长为l，一端固定，另一端自由，初始位移为hx而初始速度为零的弦的自由振动情况。

解：即求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (t > 0, 0 < x < l) \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 & (t > 0) \\ u|_{t=0} = hx, u_t|_{t=0} = 0 & (0 < x < l) \end{cases}$$ 。

分离变数，令 $u(x,t) = X(x)T(t)$，

可得：$T'' + \lambda a^2 T = 0$，　（1）

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases},\qquad （2）$$

由（2）解得：$\lambda_n = \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{l^2}$，$X(x) = c_2 \sin \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ 。

由（1）解得：$T_n(t) = A_n \cos \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi a}{l} t + B_n \sin \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi a}{l} t$ 。

定解问题的通解为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi a}{l} t \right] \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x \text{ 。}$$

由初始条件 $u_t|_{t=0} = 0$，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x = 0 \text{，}$$

$\therefore B_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ 。

由初始条件 $u|_{t=0} = hx$，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l} x = hx \text{，}$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l hx\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}xdx=\frac{(-1)^n 2hl}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2},$$

$$\therefore u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2hl}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$$

$$=\frac{2hl}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x。$$

37、求解细杆的热传导问题。杆长为l，两端温度保持为零度，初始温度分布为$u\big|_{t=0}=\frac{bx(l-x)}{l^2}$。

解：定解问题为

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx} & (t>0,0<x<l)\\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0 & (t>0)\\ u\big|_{t=0}=\frac{bx(l-x)}{l^2} & (0<x<l)\end{cases}。$$

令$u(x,t)=X(x)T(t)$，则可求得$X(x)=C\sin\frac{n\pi}{l}x$，$n=1,2,\cdots$，

$T(t)$满足$T'+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T=0\Rightarrow T=A_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$。

定解问题的通解为$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$。

由初始条件$u\big|_{t=0}=\frac{bx(l-x)}{l^2}$得：$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{bx(l-x)}{l^2}$，

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l bx\frac{(l-x)}{l^2}\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2b}{l^3}\left[\int_0^l lx\sin\frac{n\pi}{l}xdx-\int_0^l x^2\sin\frac{n\pi}{l}xdx\right]$$

$$=\frac{2b}{l^3}\left[l\left(\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\Bigg|_0^l\right.$$

$$\left.+\left(\frac{lx^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x-\frac{2l^2x}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x-\frac{2l^3}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\Bigg|_0^l\right]$$

$$=\frac{2b}{l^3}\left[\frac{2l^3}{n^3\pi^3}-\frac{2l^3}{n^3\pi^3}\cos n\pi\right]=\frac{4b}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=\begin{cases}0 & (n\text{为偶数}, n=2k, k=1,2,\cdots)\\ \dfrac{8b}{(2k+1)^3\pi^3} & (n\text{为奇数}, n=2k+1, k=0,1,\cdots)\end{cases}。$$

$$\therefore u(x,t)=\frac{8b}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x$$

当$t\to\infty$时，$u\to 0$。整个杆达到平衡状态。

38、求解细杆的热传导问题。杆长为l，初始温度为均匀的u_0，两端温度分别保持为u_1和u_2。

解：定解问题为

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx} & (t>0,0<x<l)\\ u|_{x=0}=u_1,u|_{x=l}=u_2 & (t>0)\\ u|_{t=0}=u_0 & (0<x<l)\end{cases}。$$

先将非齐次边界条件化为齐次边界条件。令$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$，

使$w(x)$满足 $\begin{cases}w''(x)=0\\ w|_{x=0}=u_1,w|_{x=l}=u_2\end{cases}$，则$w(x)=Cx+D$，（*）

将（*）代入$w|_{x=0}=u_1$，得$w|_{x=0}=u_1\Rightarrow D=u_1$，

将（*）代入$w|_{x=l}=u_2$，得$w|_{x=l}=u_2\Rightarrow C=\frac{u_2-u_1}{l}$，

$\therefore w(x)=u_1+\frac{u_2-u_1}{l}x$。

于是$v(x,t)$满足$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} & (t>0, 0<x<l) \\ v|_{x=0} = u|_{x=0} - w|_{x=0} = 0 & (t>0) \\ v|_{x=l} = u|_{x=l} - w|_{x=l} = 0 & (t>0) \\ v|_{t=0} = u|_{t=0} - w(x) = u_0 - u_1 - \dfrac{u_2-u_1}{l}x & (0<x<l) \end{cases}$，

其通解为$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x$。

由初始条件$v|_{t=0} = u_0 - u_1 - \frac{u_2-u_1}{l}x$得：$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = u_0 - u_1 - \frac{u_2-u_1}{l}x$，

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(u_0 - u_1 - \frac{u_2-u_1}{l}x\right)\sin\frac{n\pi}{l}x dx$$

$$= \frac{2}{l}\left[-(u_0-u_1)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x - \frac{u_2-u_1}{l}\left(\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x - \frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\right]\Bigg|_0^l$$

$$= \frac{2(u_0-u_1)}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] + \frac{2(u_2-u_1)}{n\pi}(-1)^n = \frac{2}{n\pi}\left[u_0 - u_1 + (-1)^n(u_2-u_0)\right]。$$

$$\therefore v(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n}(u_0-u_1) + (-1)^n\frac{u_2-u_1}{n}\right\}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[u_0-u_1+(-1)^n(u_2-u_0)\right]e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x。$$

$$\therefore u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

$$= u_1 + \frac{u_2-u_1}{l}x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n}(u_0-u_1) + (-1)^n\frac{u_2-u_1}{n}\right\}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$= u_1 + \frac{u_2-u_1}{l}x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[u_0-u_1+(-1)^n(u_2-u_0)\right]e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x。$$

39、长为l的柱形管，一端封闭，另一端开放。管外空气中含有某种气体，其浓度为u_0，向管内扩散。求该气体在管内的浓度$u(x,t)$。

解：定解问题为

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (t > 0, 0 < x < l) \\ u\big|_{x=0} = u_0, u_x\big|_{x=l} = 0 & (t > 0) \\ u\big|_{t=0} = 0 & (0 < x < l) \end{cases}$$ 。

先将非齐次边界条件化为齐次边界条件，令$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$，

使$w(x)$满足$\begin{cases} w''(x)=0 \Rightarrow w(x)=Cx+D \\ w(0)=u_0 \Rightarrow D=u_0 \\ w'(l)=0 \Rightarrow C=0 \end{cases}$，

解之，得：$w(x)=u_0$。

$v(x,t)$满足$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} & (t>0, 0<x<l) \\ v\big|_{x=0} = u\big|_{x=0} - w\big|_{x=0} = 0 & (t>0) \\ v_x\big|_{x=l} = u_x\big|_{x=l} - w'\big|_{x=l} = 0 & (t>0) \\ v\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} - w(x) = -u_0 & (0<x<l) \end{cases}$。

令$v(x,t)=X(x)T(t)$，可求得

$$X(x)=B\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$T'(t)+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}T(t)=0，\quad T(t)=A_n e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}t} \quad (n=0,1,2,\cdots)。$$

定解问题的通解为：$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$。

由初始条件$v\big|_{t=0}=-u_0$得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x=-u_0,$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l(-u_0)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}xdx=-\frac{4u_0}{(2n+1)\pi} \qquad (n=0,1,2,\cdots)。$$

于是$v(x,t)=-\dfrac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x$，

$\therefore u(x,t)=w(x)+v(x,t)=u_0-\dfrac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x$。

40、均匀的薄板占据区域$0<x<a$，$0<y<\infty$。其边界上的温度为

$u\big|_{x=0}=0$，$u\big|_{x=a}=0$，$u\big|_{y=0}=u_0$，$\lim\limits_{y\to\infty}u=0$。求解板的稳定温度分布。

解：定解问题为

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0 & (0<x<a,0<y<\infty)\\ u\big|_{x=0}=u\big|_{x=a}=0 & (0<y<\infty)\\ u\big|_{y=0}=u_0,\ \lim\limits_{y\to\infty}u=0 & (0<x<a)\end{cases}。$$

关于x的边界条件是齐次的，用分离变数法来解：

令$u(x,y)=X(x)Y(y)$，代入方程可得

$\dfrac{X''}{X}=-\dfrac{Y''}{Y}=-\lambda$，

于是$Y''-\lambda Y=0$，　　　　　　　　　　　　　（1）

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(a)=0\end{cases}。\qquad（2）$$

由（2）求得$\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$，$X(x)=C\sin\dfrac{n\pi}{a}x$，$n=1,2,\cdots$

将λ的值代入（1）得：

$Y''-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}Y=0$，

$Y(y)=A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}$。

于是$u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x$。

由$\lim\limits_{y\to\infty}u(x,y)=0$，得$A_n=0$，$n=1,2,\cdots$。

由 $u\big|_{y=0}=u_0$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x=u_0$，

$$B_n=\frac{2}{a}\int_0^a u_0\sin\frac{n\pi}{a}xdx=\frac{2u_0}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=\begin{cases}0 & (n=2k,k=1,2,\cdots)\\ \frac{4u_0}{(2k+1)\pi} & (n=2k+1,k=0,1,2,\cdots)\end{cases}\text{。}$$

$$\therefore u(x,y)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(2k+1)\pi}{a}y}}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x\text{。}$$

41、研究处于重力场中，长为 l，一端固定，另一端自由，初始位移和初始速度均为零的弦的受迫振动情况，设重力加速度为 g。即试用分离变数法求解定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+g & (t>0,0<x<l)\\ u\big|_{x=0}=0,\ u_x\big|_{x=l}=0 & (t>0)\\ u\big|_{t=0}=0,\ u_t\big|_{t=0}=0 & (0<x<l)\end{cases}\text{。}$$

解：先将非齐次方程化为齐次方程。令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$，

使 $w(x)$ 满足 $\begin{cases}w''(x)=-\frac{g}{a^2}\\ w(0)=w'(l)=0\end{cases}$。

解之，得：$w=-\frac{g}{2a^2}x^2+C_1x+C_2$

$w(0)=0\Rightarrow C_2=0$，$w'(l)=0\Rightarrow-\frac{gl}{a^2}+C_1=0,C_1=\frac{gl}{a^2}$，

$$\therefore w(x)=-\frac{g}{2a^2}x^2+\frac{gl}{a^2}x=\frac{gx}{a^2}\left(l-\frac{x}{2}\right)\text{。}$$

$$v(x,t)\text{满足}\begin{cases}v_{tt}=a^2v_{xx} & (t>0,0<x<l)\\ v\big|_{x=0}=0,v_x\big|_{x=l}=0 & (t>0)\\ v\big|_{t=0}=u\big|_{t=0}-w(x)=\frac{g}{2a^2}x^2-\frac{gl}{a^2}x & (0<x<l)\\ v_t\big|_{t=0}=0 & (0<x<l)\end{cases}\text{。}$$

用分离变数法可求得 $v(x,t)$ 的通解为

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t\right]\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\text{。}$$

由 $v_t\big|_{t=0}=0$，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}\right]\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x=0\Rightarrow B_n=0\quad(n=0,1,2\cdots)\text{。}$$

由 $v\big|_{t=0}=\frac{g}{2a^2}x^2-\frac{gl}{a^2}x$，得：$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x=\frac{g}{2a^2}x^2-\frac{gl}{a^2}x$，利用

$$\int_0^l x^2\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}xdx=\left[-\frac{lx^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\right.$$

$$\left.+\frac{2l^2x}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x+\frac{2l^3}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\right]\Bigg|_0^l$$

$$=\frac{(-1)^n2l^3}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}-\frac{2l^3}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3},$$

及 $\int_0^l x\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}xdx=\frac{(-1)^nl^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$，得

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{g}{2a^2}x^2-\frac{gl}{a^2}x\right)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{(-1)^n2gl^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}-\frac{2gl^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3a^2}-\frac{(-1)^n2gl^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}=-\frac{16gl^2}{(2n+1)^3\pi^3a^2}\text{。}$$

$$\therefore v(x,t)=-\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}{l}t\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\text{。}$$

$$\therefore u(x,t)=v(x,t)+w(x)$$

$$=\frac{gx}{a^2}\left(l-\frac{x}{2}\right)-\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\text{。}$$

42、半径为a，表面燻黑了的均匀长圆柱，在温度为零度的空气中受着阳光的照射，阳光垂直于柱轴，热流强度为q，试求圆柱内的稳定温度分布。

解：取圆柱的轴为z轴，由于圆柱是均匀且长（可以认为无限长），显然温度分布与z无关，故只需在xy平面上研究就行了。取极坐标系，由牛顿热交换定律知：$f(\varphi)-ku_\rho\big|_{\rho=a}=h(u-0)\big|_{\rho=a}$ ，或

$$\left(hu+ku_\rho\right)\big|_{\rho=a}=f(\varphi)=\begin{cases}q\sin\varphi & (0<\varphi<\pi)\\ 0 & (\pi<\varphi<2\pi)\end{cases}\text{。}$$ 【利用 34 题的结果】

$\therefore$定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0 & (\rho<a)\\ \left(hu+ku_\rho\right)\big|_{\rho=a}=f(\varphi) & (0<\varphi<2\pi)\\ u\big|_{\rho\to0}=\text{有限值} & (0<\varphi<2\pi)\end{cases}\text{。}$$

方程的通解为

$$u(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi\right)\left(C_m\rho^m+\frac{D_m}{\rho^m}\right)\text{。}$$

$u\big|_{\rho\to0}=\text{有限值}\Rightarrow D_0=0,D_m=0,m=1,2,\cdots$。

故通解又可写为

$$u(\rho,\varphi)=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A'_m\cos m\varphi+B'_m\sin m\varphi\right)\rho^m\text{。}$$

由$\left(hu+ku_{\rho}\right)\Big|_{\rho=a}=f(\varphi)=\begin{cases} q\sin\varphi & (0<\varphi<\pi) \\ 0 & (\pi<\varphi<2\pi) \end{cases}$，得

$$hC_0+\sum_{m=1}^{\infty}(ha+km)a^{m-1}\left(A'_m\cos m\varphi+B'_m\sin m\varphi\right)=f(\varphi),$$

上式相当于在$[0,2\pi]$区间上将$f(\varphi)$展成傅里叶级数，由展开系数公式得:

$$C_0=\frac{1}{2h\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=\frac{q}{2h\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{q}{h\pi},$$

$$A'_m=\frac{1}{(ha+km)a^{m-1}\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos m\varphi d\varphi$$

$$=\frac{1}{(ha+km)a^{m-1}\pi}\int_0^{\pi}q\sin\varphi\cos m\varphi d\varphi$$

$$=\frac{q}{(ha+km)a^{m-1}\pi}\left[\frac{\cos(m-1)\varphi}{2(m-1)}-\frac{\cos(m+1)\varphi}{2(m+1)}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{q}{(ha+km)a^{m-1}\pi}\left[\frac{(-1)^{m-1}-1}{2(m-1)}-\frac{(-1)^{m+1}-1}{2(m+1)}\right]=\frac{q}{(ha+km)a^{m-1}\pi}\cdot\frac{1-(-1)^{m-1}}{1-m^2}$$

$$=\begin{cases} 0 & (当m\neq 1为奇数, m=2n+1, n=1,2,\cdots) \\ \dfrac{2q}{(ha+2nk)a^{2n-1}\pi}\cdot\dfrac{1}{(1-4n^2)} & (当m为偶数, m=2n, n=1,2,\cdots) \end{cases},$$

$$A'_1=\frac{1}{(ha+k)\pi}\int_0^{\pi}q\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{q}{2(ha+k)\pi}\int_0^{\pi}\sin 2\varphi d\varphi=-\frac{1}{4(ha+k)\pi}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi}=0。$$

$$B'_m=\frac{1}{(ha+km)a^{m-1}\pi}\int_0^{\pi}q\sin\varphi\sin m\varphi d\varphi$$

$$=\frac{q}{(ha+km)a^{m-1}\pi}\left[\frac{\sin(m-1)\varphi}{2(m-1)}-\frac{\sin(m+1)\varphi}{2(m+1)}\right]\Bigg|_0^{\pi}=0,当m\neq 1,$$

$$B'_1=\frac{q}{(ha+k)\pi}\int_0^{\pi}q\sin^2\varphi d\varphi=\frac{q}{2(ha+k)}。$$

$$\therefore u(\rho,\varphi)=\frac{q}{h\pi}+\frac{q}{2(ha+k)}\rho\sin\varphi+\frac{2q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n}\cos 2n\varphi}{a^{2n-1}(ha+2nk)(1-4n^2)}。$$

43、用傅里叶变换求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (-\infty<x<\infty\ ,y>0) \\ u\big|_{y=0}=\varphi(x), & (-\infty<x<\infty) \\ u\big|_{y\to\infty}=0, & (-\infty<x<\infty) \end{cases} 。$$

解： 由于x在$(-\infty,\infty)$内变化，对x进行傅里叶变换

$$\begin{cases} -\omega^2\tilde{u}+\tilde{u}_{yy}=0 \\ \tilde{u}\big|_{y=0}=\tilde{\varphi}(\omega),\ \tilde{u}\big|_{y\to\infty}=0 \end{cases}，（*）$$

其中$\tilde{u}=\tilde{u}(\omega,y)$，

（*）的通解为$\tilde{u}=C_1(\omega)e^{\omega y}+C_2(\omega)e^{-\omega y}$， $\omega\in(-\infty,\infty)$。

由$\tilde{u}\big|_{y\to\infty}=0$，得$\begin{cases} 当\omega<0时，C_1(\omega)=0,\tilde{u}=C_2(\omega)e^{-\omega y} \\ 当\omega<0时，C_2(\omega)=0,\tilde{u}=C_1(\omega)e^{\omega y} \end{cases}$，

所以总的可写为$\tilde{u}=\begin{Bmatrix} C_2(\omega)e^{-\omega y},\omega>0 \\ C_1(\omega)e^{\omega y},\omega<0 \end{Bmatrix}=C(\omega)e^{-|\omega|y}$，

其中$C(\omega)=\begin{cases} C_2(\omega),\omega>0 \\ C_1(\omega),\omega<0 \end{cases}$。

由$\tilde{u}\big|_{y=0}=\tilde{\varphi}(\omega)$，得$C=\tilde{\varphi}$。

$\therefore\tilde{u}=\tilde{\varphi}(\omega)e^{-|\omega|y}$。

进行傅里叶反变换，得

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\omega,y)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\omega)e^{-|\omega|y}e^{i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-i\xi\omega}d\xi\right)e^{-|\omega|y+i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\omega|y+i\omega(x-\xi)}d\omega\right]d\xi，$$

而$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\omega|y+i\omega(x-\xi)}d\omega=\int_{-\infty}^{0}e^{\omega y+i\omega(x-\xi)}d\omega+\int_{0}^{\infty}e^{-\omega y+i\omega(x-\xi)}d\omega$

$$=\left.\frac{e^{\omega y+i\omega(x-\xi)}}{y+i(x-\xi)}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{e^{-\omega y+i\omega(x-\xi)}}{-y+i(x-\xi)}\right|_{0}^{\infty}=\frac{1}{y+i(x-\xi)}-\frac{1}{-y+i(x-\xi)}$$

$$=\frac{2y}{(x-\xi)^2+y^2},$$

代入上、下限时应注意到$y>0$，

$$\therefore u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\varphi(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}。$$

第七章习题解答

44、试用平面极坐标系把二维波动方程分离变数。

解：二维波动方程在极坐标系中可表为

$$u_{tt}=a^2\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}\right)。\qquad（1）$$

令$u(\rho,\varphi,t)=T(t)R(\rho)\Phi(\varphi)$，代入（1），得：

$$T''R\Phi=a^2\left(TR''\Phi+\frac{1}{\rho}TR'\Phi+\frac{1}{\rho^2}TR\Phi''\right)。\qquad（2）$$

（2）的两边除以$a^2TR\Phi$，得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{R'}{\rho R}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\Phi''}{\Phi}。\qquad（3）$$

（3）的左边仅是t的函数，而右边却是ρ，φ的函数，

$\therefore$（3）的两边只能等于同一常数，记为$-k^2$，从而

$$T''(t)+k^2a^2T(t)=0\Rightarrow T(t)=A\cos kat+B\sin kat。$$

$$\frac{R''}{R}+\frac{R'}{\rho R}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\Phi''}{\Phi}=-k^2,\qquad（4）$$

（4）的两边乘以ρ^2，并移项得

$$\rho^2\frac{R''}{R}+\rho\frac{R'}{R}+k^2\rho^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}。$$

同理上式两边只能等于同一常数，记为λ。于是

$\Phi''+\lambda\Phi=0$， $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$， $\Phi'(\varphi)=\Phi'(\varphi+2\pi)$

$\lambda=m^2$， $(m=0,1,2,\cdots)$， $\Phi(\varphi)=C\cos m\varphi+D\sin m\varphi$。

$$\rho^2\frac{R''}{R}+\rho\frac{R'}{R}+k^2\rho^2=\lambda=m^2,$$

$$\rho^2R''+\rho R'+\left(k^2\rho^2-m^2\right)R=0,$$

令$x=k\rho$， $R(\rho)=y(x)$，得

$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(x^2-m^2\right)y(x)=0$，　　m阶 Bessel eq.

45、用平面极坐标系把二维输运方程分离变数。

解：在平面极坐标系中，二维输运方程为

$$u_t=a^2\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}\right) \qquad (1)$$

令$u(\rho,\varphi,t)=T(t)R(\rho)\Phi(\varphi)$，代入（1），得：

$$T'R\Phi=a^2\left(TR''\Phi+\frac{1}{\rho}TR'\Phi+\frac{1}{\rho^2}TR\Phi''\right)。 \qquad (2)$$

（2）的两边除以$a^2TR\Phi$，得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{R'}{\rho R}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

上式左边仅是t的函数，而右边却是ρ，φ的函数，

$\therefore$上式两边只能等于同一常数，记为$-k^2$，从而

$T'(t)+k^2a^2T(t)=0\Rightarrow T(t)=Ae^{-k^2a^2t}$。

R及Φ与上一题的相同。

46、求证$P_l(x)=P'_{l+1}(x)-2xP'_l(x)+P'_{l-1}(x)$， $l\geq1$。

证：勒让德多项式的生成函数为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^l P_l(x),\quad r<1\text{。（1）}$$

两边对x求导，得

$$\frac{r}{(1-2xr+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^l P_l'(x)\text{。}$$

两边乘以$(1-2xr+r^2)$，得

$$\frac{r}{\sqrt{1-2xr+r^2}}=(1-2xr+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}r^l P_l'(x)\text{，（2）}$$

（1）代入（2），得

$$\sum_{l=0}^{\infty}r^{l+1}P_l(x)=\sum_{l=0}^{\infty}r^l P_l'(x)-2x\sum_{l=0}^{\infty}r^{l+1}P_l'(x)+\sum_{l=0}^{\infty}r^{l+2}P_l'(x)\text{，}$$

比较两边r^{l+1}项的系数，得

$$P_l(x)=P_{l+1}'(x)-2xP_l'(x)+P_{l-1}'(x)\text{。}$$

47、利用上题和$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0$，$l\ge 1$，

求证$(2l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)$，$l\ge 1$。

证：对勒让德多项式的递推公式

$$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0\qquad\text{（1）}$$

两边对x求导，得

$$(l+1)P_{l+1}'(x)-(2l+1)P_l(x)-(2l+1)xP_l'(x)+lP_{l-1}'(x)=0\text{。}\qquad\text{（2）}$$

又由上题，得：$P_l(x)=P_{l+1}'(x)-2xP_l'(x)+P_{l-1}'(x)$，（3）

$(2)+l\times(3)$，得$P_{l+1}'(x)=xP_l'(x)+(l+1)P_l(x)$。（4）

从（3）及（4）中消去$P_{l+1}'(x)$，得

$$xP_l'(x)-P_{l-1}'(x)=lP_l(x)\text{。}\qquad\text{（5）}$$

$(4)+(5)$，得$(2l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)$。

48、在$[-1,1]$区间上将x^2用勒让德多项式展开。

解：由于x^2是偶函数，所以展开式中只含偶数阶的勒让德多项式，

$$x^2=\sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}P_{2n}(x)。$$

$$f_{2n}=(4n+1)\int_0^1 x^2 P_{2n}(x)\,dx，$$

$$f_0=\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}，$$

$$f_2=5\int_0^1 x^2 P_2(x)\,dx=5\frac{1}{2^2 2!}\int_0^1 x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^2 dx$$

$$=5\cdot\frac{1}{8}\int_0^1 x^2\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^2\right]dx=\frac{5}{8}\left[x^2\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^2\Big|_0^1-2\int_0^1 x\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^2 dx\right]$$

$$=-\frac{5}{4}\left[x\left(x^2-1\right)^2\Big|_0^1-\int_0^1\left(x^2-1\right)^2 dx\right]=\frac{5}{4}\int_0^1\left(x^2-1\right)^2 dx=\frac{5}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{3}，$$

当$n>1$时，

$$f_{2n}=\frac{4n+1}{2}\int_{-1}^1 x^2\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\cdot\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(x^2-1\right)^{2n}dx$$

$$=\frac{4n+1}{2\cdot 4^n(2n)!}\int_{-1}^1 x^2\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}\left(x^2-1\right)^{2n}\right]dx$$

$$=\frac{4n+1}{2\cdot 4^n(2n)!}\left[x^2\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}\left(x^2-1\right)^{2n}\Big|_{-1}^1-2\int_{-1}^1 x\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}\left(x^2-1\right)^{2n}dx\right]$$

$$=-\frac{4n+1}{4^n(2n)!}\int_{-1}^1 x\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}\left(x^2-1\right)^{2n}\right]dx$$

$$=-\frac{4n+1}{4^n(2n)!}\left[x\frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}\left(x^2-1\right)^{2n}\Big|_{-1}^1-\int_{-1}^1\frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}\left(x^2-1\right)^{2n}dx\right]$$

$$=\frac{4n+1}{4^n(2n)!}\left[\frac{d^{2n-3}}{dx^{2n-3}}\left(x^2-1\right)^{2n}\right]\Bigg|_{-1}^1=0。$$

$$\therefore x^2=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}P_0(x)=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}$$

或： 令 $x^2=f_2P_2(x)+f_1P_1(x)+f_0P_0(x)=\frac{3}{2}f_2x^2-\frac{1}{2}f_2+f_1x+f_0$

因为 $P_0(x)=1$， $P_1(x)=x$， $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，

所以 $x^2=f_2P_2(x)+f_1P_1(x)+f_0P_0(x)=\frac{3}{2}f_2x^2-\frac{1}{2}f_2+f_1x+f_0$，

比较上式两边系数，得

$\frac{3}{2}f_2=1, f_1=0, f_0-\frac{1}{2}f_2=0\Rightarrow f_2=\frac{2}{3}, f_0=\frac{1}{2}f_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$。

$\therefore x^2=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}P_0(x)=\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}$。

49、验证： $x^3=\frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}P_1(x)$。

证： 因为 $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$， $P_1(x)=x$，

所以 $\frac{2}{5}P_3(x)+\frac{3}{5}P_1(x)=\frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)+\frac{3}{5}x=x^3$。

50、证明： $\int_0^1 P_l(x)dx=\begin{cases}1, & l=0\\ 0, & l=2k,\ k=1,2,\cdots\\ (-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}, & l=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots\end{cases}$ 。

证法一： 当 $l=0$ 时， $\int_0^1 P_0(x)dx=\int_0^1 dx=1$。

当 $l\neq 0$ 时，

$$\int_0^1 P_l(x)dx=\frac{1}{2^l l!}\int_0^1\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx=\frac{1}{2^l l!}\cdot\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2^l l!}\cdot\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_{x=0}=-\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\frac{1}{2^l k!(l-k)!}\cdot\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}x^{2l-2k}\Big|_{x=0},$$

只有当 $2l-2k=l-1$，即 $l=2k-1$ 时，上式才不为 0。此时

$$\int_0^1 P_l(x)dx=(-1)^{k-1}\frac{[2(k-1)]!}{2^{(2k-1)}k!(k-1)!}\qquad l=2k-1,\ k=1,2,\cdots$$

$$=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\qquad l=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots$$ 。

$$\therefore \int_0^1 P_l(x)\,dx=\begin{cases}1, & l=0\\ 0, & l=2k,\ k=1,2,\cdots\\ (-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}, & l=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots\end{cases}$$ 。

证法二： 当 $l=0$ 时，$\int_0^1 P_0(x)\,dx=\int_0^1 dx=1$ 。

当 $l\neq 0$ 时，又 $P_l(x)=\dfrac{1}{2l+1}\left[P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)\right]$，

$$\therefore \int_0^1 P_l(x)\,dx=\frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(x)-P_{l-1}(x)\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2l+1}\left[P_{l+1}(1)-P_{l-1}(1)-P_{l+1}(0)+P_{l-1}(0)\right]$$ 。

当 $l=2k$， $k>0$ 时，

$P_{l+1}(0)=P_{2k+1}(0)=0$， $P_{l-1}(0)=P_{2k-1}(0)=0$，

又 $P_{2k+1}(1)=P_{2k-1}(1)=1$，

$$\therefore \int_0^1 P_{2k}(x)\,dx=\frac{1}{4k+1}\left[P_{2k+1}(1)-P_{2k-1}(1)-P_{2k+1}(0)+P_{2k-1}(0)\right]=0$$ 。

当 $l=2k+1$ 时，

$P_{l+1}(0)=P_{2k+2}(0)=(-1)^{k+1}\dfrac{(2k+2)!}{2^{2k+2}\left[(k+1)!\right]^2}$， $P_{l-1}(0)=P_{2k}(0)=(-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$，

又 $P_{2k+2}(1)=P_{2k}(1)=1$，

$$\therefore \int_0^1 P_{2k+1}(x)\,dx=\frac{1}{4k+3}\left[P_{2k+2}(1)-P_{2k}(1)-P_{2k+2}(0)+P_{2k}(0)\right]$$

$$=\frac{1}{4k+3}\left[(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}-(-1)^{k+1}\frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}\left[(k+1)!\right]^2}\right]$$

$$=\frac{(-1)^k}{4k+3}\cdot\frac{1}{2^{2k+2}\left[(k+1)!\right]^2}\left\{4(2k)!(k+1)^2+\left[2(k+1)\right]!\right\}$$

$$=\frac{(-1)^k(2k)!\left[4(k+1)^2+(2k+1)(2k+2)\right]}{(4k+3)2^{2k+2}\left[(k+1)!\right]^2}$$

$$=\frac{(-1)^k(2k)!2(k+1)(4k+3)}{(4k+3)2^{2k+2}\left[(k+1)!\right]^2}=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\text{。}$$

$$\therefore\int_0^1 P_l(x)\,dx=\begin{cases}1, & l=0\\ 0, & l=2k,\ k=1,2,\cdots\\ (-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}, & l=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots\end{cases}\text{。}$$

51、求解定解问题$\begin{cases}\nabla^2u=0 & (r<a)\\ u|_{r=a}=\cos^2\theta,\ u|_{r\to0}=\text{有限值} & (0<\theta<\pi)\end{cases}$。

解：所要求解的定解问题具有轴对称性，其轴对称球内解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l P_l(\cos\theta)\text{。}$$

由$u|_{r=a}=\cos^2\theta=\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)$，得

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_l a^l P_l(\cos\theta)=\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)\text{。}$$

比较两边的系数，得

$C_0=\frac{1}{3}$，$C_2a^2=\frac{2}{3}$，$C_2=\frac{2}{3a^2}$，$C_l=0\quad(l\neq0,2)$。

$$\therefore u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2r^2}{3a^2}P_2(\cos\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2r^2}{3a^2}\times\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)=\frac{1}{3}-\frac{r^2}{3a^2}+\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}\text{。}$$

52、求解定解问题$\begin{cases}\nabla^2u=0 & (r>a)\\ u|_{r=a}=\cos^2\theta,\ u|_{r\to0}=\text{有限值} & (0<\theta<\pi)\end{cases}$。

解：所要求解的定解问题具有轴对称性，其轴对称球外解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\text{。}$$

由$u|_{r=a}=\cos^2\theta=\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)$，得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)=\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)\text{。}$$

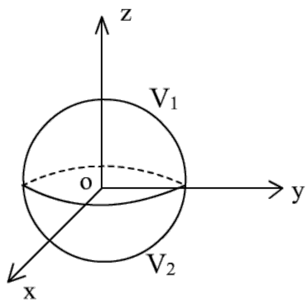
比较两边的系数，得

$\frac{D_0}{a}=\frac{1}{3}$， $D_0=\frac{a}{3}$， $\frac{D_2}{a^3}=\frac{2}{3}$， $D_2=\frac{2a^3}{3}$， $D_l=0 \quad (l\neq 0,2)$。

$$\therefore u(r,\theta)=\frac{D_0}{r}+\frac{D_2}{r^3}P_2(\cos\theta)=\frac{a}{3r}+\frac{2a^2}{3r^3}\times\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)=\frac{a}{3r}-\frac{a^3}{3r^3}+\frac{a^3\cos^2\theta}{r^3}$$ 。

53、用一层不导电的物质把半径为a的导体球壳分隔为两个半球壳，使半球壳各充电到电势为v_1和v_2，试计算球壳内外的电势分布。

解：本题可归结为求解如下的的定解问题



$$\begin{cases}\nabla^2 u=0 & (1)\\ u\big|_{r=a}=f(\theta)=\begin{cases}v_1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ v_2,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases} & (2)\end{cases}$$ 。

所要求解的定解问题有轴对称性，方程（1）的轴对称有界通解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l+\frac{D_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$ 。

在球内$r<a$中，$r\to 0$，u有界$\Rightarrow D_l=0, l=0,1,2,\cdots$，

所以，当$r<a$时，$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l P_l(\cos\theta)$。

由边界条件（2），得：$u\big|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}C_l a^l P_l(\cos\theta)=f(\theta)=\begin{cases}v_1, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ v_2,\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases}$，

$$\therefore C_l=\frac{2l+1}{2a^l}\int_0^{\pi}f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \qquad 【令 x=\cos\theta，\ f(x)=\begin{cases}v_1,\ 0<x<1\\ v_2,\ -1<x<0\end{cases}】$$

$$=\frac{2l+1}{2a^l}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx=\frac{2l+1}{2a^l}\left[\int_{-1}^{0}v_2P_l(x)dx+\int_0^1 v_1P_l(x)dx\right]$$

$$=\frac{2l+1}{2a^l}\left[v_2\int_0^1(-1)^l P_l(x)dx+v_1\int_0^1 P_l(x)dx\right]=\frac{2l+1}{2a^l}\left[v_1+(-1)^l v_2\right]\int_0^1 P_l(x)dx$$ 。

$$\because \int_0^1 P_l(x)\,dx = \begin{cases} 1, & l=0 \\ 0, & l=2k,\ k=1,2,\cdots \\ (-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}, & l=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots \end{cases},$$

$$\therefore C_l = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(v_1+v_2) & \text{当} l=0 \\ 0 & \text{当} l=2k, k>0 \\ \dfrac{4k+3}{2a^{2k+1}}(-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}(v_1-v_2) & \text{当} l=2k+1 \end{cases}。$$

所以，当$r<a$时，

$$u(r,\theta)=\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_1-v_2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k+3)(2k)!}{k!(k+1)!}\left(\frac{r}{2a}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)。$$

如果$v_1=v_2=v$，则$u(r,\theta)=v$，球壳为等势体，球壳内电场$\bar{E}\big|_{r<a}=0$。

在球外$r>a$中，$r\to\infty$，$u=0$，u有界$\Rightarrow C_l=0,1,2,\cdots$，

所以，当$r>a$时，$u(r,\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{D_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$。

同样，由边界条件（2），得：$u\big|_{r=a}=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{D_l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)=f(\theta)=\begin{cases} v_1, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ v_2, \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi \end{cases}$，

$$\begin{aligned}\therefore D_l &= \frac{2l+1}{2}a^{l+1}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\,dx=\frac{2l+1}{2}a^{l+1}\left[\int_{-1}^{0}v_2P_l(x)\,dx+\int_0^1 v_1P_l(x)\,dx\right] \\ &= \frac{2l+1}{2}a^{l+1}\left[v_2\int_0^1(-1)^l P_l(x)\,dx+v_1\int_0^1 P_l(x)\,dx\right] \\ &= \frac{2l+1}{2}a^{l+1}\left[v_1+(-1)^l v_2\right]\int_0^1 P_l(x)\,dx。\end{aligned}$$

用类似上面C_l的求解方法，可得

$$D_l = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(v_1+v_2)a & \text{当} l=0 \\ 0 & \text{当} l=2k,\ k>0 \\ \dfrac{4k+3}{2}a^{2k+2}(-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}(v_1-v_2) & \text{当} l=2k+1 \end{cases}。$$

所以，当$r>a$时，

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(v_1+v_2)a}{r}+(v_1-v_2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k+3)(2k)!}{k!(k+1)!}\left(\frac{a}{2r}\right)^{2k+2}P_{2k+1}(\cos\theta)\text{。}$$

如果$v_1=v_2=v$，则球壳外的电势分布$u(r,\theta)=\frac{va}{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，其中$Q=4\pi\varepsilon_0 va$，相当于一个带电量为$Q=4\pi\varepsilon_0 va$的点电荷产生的电势。

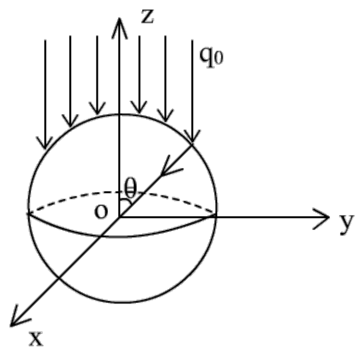
其实在$v_1=v_2=v$情况下，球壳为等势体，球壳所带的电荷可由电磁场的边值关系得到。计算如下：

球壳内电场$\bar{E}\big|_{r<a}=0$；球壳外$\bar{E}\big|_{r>a}=-\nabla u$,其法向分量大小$E_r=-\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{va}{r^2}$。

假定球壳内外为真空，球壳的面电荷密度$\sigma=\left(\varepsilon_0 E_r\big|_{r=a^+}-\varepsilon_0 E_r\big|_{r=a^-}\right)=\frac{\varepsilon_0 v}{a}$，

总电荷$Q=4\pi a^2\frac{\varepsilon_0 v}{a}=4\pi\varepsilon_0 va$。

54、半径为a，表面燻黑的均匀球，在温度为0^0的空气中，受着阳光的照射，阳光的热流强度为q_0，求解小球内的稳定温度分布。



解：本题可归结为求解如下的定解问题：

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0\,, & (r<a) \qquad (1)\\ \left.\left(u+H\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=a}=f(\theta)=\begin{cases}\frac{q_0}{h}\cos\theta, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ 0, \qquad \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases} & (2)\end{cases}$$

其中$H=\frac{k}{h}$，k为热传导系数，h为热交换系数。

本定解问题有轴对称性，方程（1）的轴对称球内通解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l P_l(\cos\theta)\,,\qquad r<a\text{。}$$

由边界条件（2），得

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l P_l(\cos\theta) + H\sum_{l=0}^{\infty} l C_l a^{l-1} P_l(\cos\theta) = f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{q_0}{h}\cos\theta, & 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi \end{cases},$$

即 $\sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{l-1}(a+Hl)P_l(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{q_0}{h}x, & 0<x<1 \\ 0, & -1<x<0 \end{cases}$。　　【令 $x=\cos\theta$】

$\therefore C_l = \dfrac{2l+1}{2a^{l-1}(a+Hl)}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx = \dfrac{(2l+1)q_0}{2h(a+Hl)a^{l-1}}\int_0^1 xP_l(x)dx$。

$\because (2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$，

$\therefore C_l = \dfrac{q_0}{2h(a+Hl)a^{l-1}}\left[(l+1)\int_0^1 P_{l+1}(x)dx + l\int_0^1 P_{l-1}(x)dx\right]$。（3）

又 $\int_0^1 P_{l+1}(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{当} l=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots \\ (-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}, & \text{当} l=2k,\ k=0,1,2,\cdots \end{cases}$，

$\int_0^1 P_{l-1}(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{当} l=1 \\ 0, & \text{当} l=2k+1,\ k>0 \\ (-1)^{k-1}\dfrac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}, & \text{当} l=2k,\ k>0 \end{cases}$。

$\therefore (l+1)\int_0^1 P_{l+1}(x)dx + l\int_0^1 P_{l-1}(x)dx$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当} l=2k+1,\ k>0 \\ 1, & \text{当} l=1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{当} l=0 \\ (2k+1)(-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!} + 2k(-1)^{k-1}\dfrac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}, & \text{当} l=2k,\ k>0 \end{cases}。$$

又 $(2k+1)(-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!} + 2k(-1)^{k-1}\dfrac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!}$

$$= (-1)^{k+1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k}k!}\left[\frac{4k}{(k-1)!} - \frac{(2k-1)2k(2k+1)}{2(k+1)!}\right]$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}\left[4k(k+1)-(2k-1)(2k+1)\right]=(-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!},$$

$$\therefore (l+1)\int_0^1 P_{l+1}(x)\,dx+l\int_0^1 P_{l-1}(x)\,dx=\begin{cases}0, & 当 l=2k+1,\ k>0\\ 1, & 当 l=1\\ \dfrac{1}{2}, & 当 l=0\\ (-1)^{k+1}\dfrac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}, & 当 l=2k,\ k>0\end{cases}\text{。（4）}$$

（4）代入（3），得：$C_0=\frac{q_0}{2h}\times\frac{1}{2}=\frac{q_0}{4h}$，$C_1=\frac{q_0}{2h(a+H)}$，$C_{2k+1}=0, k>0$，

$$C_{2k}=\frac{q_0}{2h(a+2kH)a^{2k-1}}(-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}$$

$$=\frac{q_0 a}{2h}(-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{(2a)^{2k}(a+2kH)(k-1)!(k+1)!},\ k>0\text{。}$$

于是小球内的稳定温度分布为

$$\therefore u(r,\theta)=\frac{q_0}{4h}+\frac{q_0 r}{2h(a+H)}\cos\theta$$

$$+\frac{q_0 a}{2h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{(a+2kH)(k-1)!(k+1)!}\left(\frac{r}{2a}\right)^{2k}P_{2k}(\cos\theta)\text{，}\quad r<a\text{。}$$

55、计算下列积分

（1）$\int x^3 J_0(x)\,dx$；（2）$\int J_3(x)\,dx$。

解：（1）由递推公式$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m(x)\right]=x^m J_{m-1}(x)$，得$\frac{d}{dx}(xJ_1)=xJ_0(x)$。①

由递推公式$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_m(x)}{x^m}\right]=-\frac{J_{m+1}(x)}{x^m}$，得$J_0'(x)=-J_1(x)$。②

$$\therefore \int x^3 J_0(x)\,dx\overset{利用①}{=}\int x^2\left[xJ_1(x)\right]'dx=\int x^2 d\left[xJ_1(x)\right]$$

$$=x^3J_1(x)-2\int x^2J_1(x)\,dx\overset{利用②}{=}x^3J_1(x)+2\int x^2J_0'(x)\,dx$$

$$=x^3J_1(x)+2\int x^2 dJ_0(x)=x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4\int xJ_0(x)\,dx$$

$$\overset{利用①}{=}x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4\int\left[xJ_1(x)\right]'dx$$

$$=x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4xJ_1(x)+C。$$

（2）由递推公式$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_m(x)}{x^m}\right]=-\frac{J_{m+1}(x)}{x^m}$，得

$$\left[\frac{J_2(x)}{x^2}\right]'=-\frac{J_3(x)}{x^2}，①$$

$$\left[\frac{J_1(x)}{x}\right]'=-\frac{J_2(x)}{x}。②$$

$$\therefore\int J_3(x)dx=\int x^2\frac{J_3}{x^2}dx\overset{\text{利用①}}{=}-\int x^2\left[\frac{J_2(x)}{x^2}\right]'dx$$

$$=-\int x^2d\left[\frac{J_2(x)}{x^2}\right]=-J_2(x)+2\int\frac{J_2(x)}{x}dx$$

$$\overset{\text{利用②}}{=}-J_2(x)-2\int\left[\frac{J_1(x)}{x}\right]'dx=-J_2(x)-\frac{2J_1(x)}{x}+C。③$$

又由递推公式$J_{m+1}(x)-\frac{2mJ_m(x)}{x}+J_{m-1}(x)=0$，得

$$J_2(x)=\frac{2J_1(x)}{x}-J_0(x)。④$$

将④代入③，得

$$\int J_3(x)dx=J_0(x)-\frac{2J_1(x)}{x}-\frac{2J_1(x)}{x}+C=J_0(x)-\frac{4J_1(x)}{x}+C。$$

56、半径为R而高为H的圆柱体下底面和侧面保持零度，上底面温度分布为$f(\rho)=\rho^2$，求圆柱体内各点的稳恒温度（稳定温度分布）。

解：本题可归结为求解如下的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0 & (\rho<R,0<\varphi<2\pi,0<z<H)\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=H}=\rho^2, & (\rho<R,0<\varphi<2\pi)\\ u|_{\rho=R}=0 & (0<\varphi<2\pi,0<z<H)\end{cases}$$

定解问题有轴对称性$(m=0)$，所以u与φ无关，$u(\rho,z)=R(\rho)Z(z)$。

$\therefore u$ 的径向部分 $R(\rho)$ 满足

$\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)+\mu^2\rho^2 R(\rho)=0$，　　　　【零阶 Bessel eq.】

其在 $\rho=0$ 处有界的解为 $R(\rho)=J_0(\mu\rho)$。

$u\big|_{\rho=R}=0\Rightarrow J_0(\mu R)=0,\ \mu_n R=x_n^{(0)},\ x_n^{(0)}\text{是}J_0(x)\text{的第}n\text{个零点},\ n=1,2,\cdots$，

本征值为 $\mu_n=\dfrac{x_n^{(0)}}{R}$，本征函数为 $R(\rho)=J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)$，$n=1,2,\cdots$。

u 的 z 方向部分 $Z(z)$ 满足

$Z''(z)-\mu_n^2 Z(z)=0$，

其解为 $Z(z)=C_n\cosh\mu_n z+D_n\sinh\mu_n z=C_n\cosh\dfrac{x_n^{(0)}}{R}z+D_n\sinh\dfrac{x_n^{(0)}}{R}z$。

定解问题的特解为

$$u_n(\rho,z)=\left(C_n\cosh\frac{x_n^{(0)}}{R}z+D_n\sinh\frac{x_n^{(0)}}{R}z\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right),$$

定解问题的通解为

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cosh\frac{x_n^{(0)}}{R}z+D_n\sinh\frac{x_n^{(0)}}{R}z\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)。\qquad（1）$$

$$u\big|_{z=0}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=0\Rightarrow C_n=0,\ n=1,2,\cdots。\qquad（2）$$

$$u\big|_{z=H}=\rho^2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}H\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=\rho^2,$$

于是 $D_n\sinh\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}H\right)=\dfrac{1}{\left[N_n^{(0)}\right]^2}\displaystyle\int J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho^3d\rho$。　　（3）

$$\int_0^R J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho^3d\rho\overset{\text{令}x=\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho}{=}\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^4}\int_0^{x_n^{(0)}}J_0(x)x^3dx$$

$$=\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^4}\left[x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4xJ_1(x)\right]\Big|_0^{x_n^{(0)}}$$ 【利用了 54 题（1）的结果】

$$=\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^4}\left[\left(x_n^{(0)}\right)^3J_1\left(x_n^{(0)}\right)-4x_n^{(0)}J_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]=\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^3}\left[\left(x_n^{(0)}\right)^2-4\right]J_1\left(x_n^{(0)}\right)。\quad (4)$$

又 $\left[N_n^{(0)}\right]^2=\frac{1}{2}R^2J_1^2\left(x_n^{(0)}\right)$，　　（5）

将（4）和（5）代入（3），得

$$\therefore D_n\sinh\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}H\right)=\frac{2}{R^2J_1^2\left(x_n^{(0)}\right)}\cdot\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^3}\left[\left(x_n^{(0)}\right)^2-4\right]J_1\left(x_n^{(0)}\right)=\frac{2R^2\left[\left(x_n^{(0)}\right)^2-4\right]}{\left(x_n^{(0)}\right)^3J_1\left(x_n^{(0)}\right)},$$

$$D_n=\frac{2R^2\left[\left(x_n^{(0)}\right)^2-4\right]}{\left(x_n^{(0)}\right)^3}\cdot\frac{1}{\sinh\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}H\right)J_1\left(x_n^{(0)}\right)},\ n=1,2,\cdots。(6)$$

将（2）和（6）代入（1），得圆柱体内各点的稳恒温度为

$$u(\rho,z)=2R^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(x_n^{(0)}\right)^2-4\right]}{\left(x_n^{(0)}\right)^3}\cdot\frac{\sinh\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}z\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)}{\sinh\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}H\right)J_1\left(x_n^{(0)}\right)}。$$

57、设半径为 R 的无限长圆柱形物体的侧面温度为 0^0，初始温度 $u|_{t=0}=\rho^2-R^2$，

求此物体的温度分布随时间的变化规律。(无限长 $\to u$ 与 φ 无关)

解：此问题可归结为求解如下的定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\nabla^2u & (t>0,\rho<R,0<\varphi<2\pi,-\infty<z<\infty)\\ u|_{\rho=R}=0 & (t>0,0<\varphi<2\pi,-\infty<z<\infty)\\ u|_{t=0}=\rho^2-R^2 & (\rho<R,0<\varphi<2\pi,-\infty<z<\infty)\end{cases}$$

定解问题有轴对称性，所以 u 与 φ 无关。

又圆柱为无限长，故 u 又与 φ 无关。

令$u(\rho,t)=R(\rho)T(t)$，

代入方程，得

$$R(\rho)T'(t)=a^2\left(R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\right)T(t),$$

$$\therefore \frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)}{R}=-\mu^2。$$

于是$T'(t)+\mu^2a^2t=0\Rightarrow T(t)=Ae^{-\mu^2a^2t}$，

$$R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)+\mu^2R(\rho)=0。\qquad（1）\qquad【0 \text{ order Bessel eq.}】$$

（1）在$\rho=0$处有限的解为$R(\rho)=J_0(\mu\rho)$。

$u\big|_{\rho=R}=0\Rightarrow J_0(\mu R)=0$， $\mu_nR=x_n^{(0)}$, $x_n^{(0)}$是$J_0(x)$的第n个零点，$n=1,2,\cdots$

本征值为$\mu_n=\dfrac{x_n^{(0)}}{R}$, $n=1,2,\cdots$，

本征函数为$R(\rho)=J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)$, $n=1,2,\cdots$。

$$\therefore u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\right)^2a^2t}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)。\qquad（1）$$

由初始条件$u\big|_{t=0}=\rho^2-R^2$，得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=\rho^2-R^2,$$

$$A_n=\frac{1}{\left[N_n^{(0)}\right]^2}\int_0^RJ_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\left(\rho^2-R^2\right)\rho d\rho。\qquad（2）$$

而$\displaystyle\int_0^RJ_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho^3d\rho\overset{令x=\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho}{=}\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^4}\int_0^{x_n^{(0)}}J_0(x)x^3dx$

$$=\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^4}\left[x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4xJ_1(x)\right]\Big|_0^{x_n^{(0)}}$$ 【利用了 54 题（1）的结果】

$$=\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^4}\left[\left(x_n^{(0)}\right)^3J_1\left(x_n^{(0)}\right)-4x_n^{(0)}J_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]=\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^3}\left[\left(x_n^{(0)}\right)^2-4\right]J_1\left(x_n^{(0)}\right),\qquad (3)$$

$$\int_0^R J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho d\rho \overset{令x=\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho}{=} \frac{R^2}{\left(x_n^{(0)}\right)^2}\int_0^{x_n^{(0)}}J_0(x)xdx$$

$$\overset{利用\frac{d}{dx}\left[x^mJ_m(x)\right]=x^mJ_{m-1}(x)}{=}\frac{R^2}{\left(x_n^{(0)}\right)^2}\int_0^{x_n^{(0)}}\left[xJ_1(x)\right]'dx=\frac{R^2}{\left(x_n^{(0)}\right)^2}\left[xJ_1(x)\right]\Big|_0^{x_n^{(0)}}=\frac{R^2J_1\left(x_n^{(0)}\right)}{x_n^{(0)}},\quad (4)$$

$$\left[N_n^{(0)}\right]^2=\frac{1}{2}R^2J_1^{\,2}\left(x_n^{(0)}\right)。\qquad (5)$$

将（3）、（4）和（5）代入（2），得

$$A_n=\frac{2}{R^2J_1^{\,2}\left(x_n^{(0)}\right)}\left\{\frac{R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^3}\left[\left(x_n^{(0)}\right)^2-4\right]J_1\left(x_n^{(0)}\right)-R^2\frac{R^2J_1\left(x_n^{(0)}\right)}{x_n^{(0)}}\right\}$$

$$=\frac{2}{R^2J_1^{\,2}\left(x_n^{(0)}\right)}\times\left[-\frac{4R^4}{\left(x_n^{(0)}\right)^3}J_1\left(x_n^{(0)}\right)\right]=-\frac{8R^2}{\left(x_n^{(0)}\right)^3J_1\left(x_n^{(0)}\right)}。\qquad (6)$$

将（6）代入（1），得物体的温度分布随时间的变化规律为

$$\therefore u(\rho,t)=-8R^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)}{\left(x_n^{(0)}\right)^3J_1\left(x_n^{(0)}\right)}e^{-\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\right)^2a^2t}。$$

58、圆柱体半径为R而高为H，上底面保持温度u_1，下底面保持温度u_2，侧面的温度分布为$f(z)=\frac{2u_1}{H^2}\left(z-\frac{H}{2}\right)z+\frac{u_2}{H}(H-z)$，求解圆柱体内各点的稳恒温度（稳定温度分布）。

解：本题可归结为求解如下的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0 & (\rho < R, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < H) \\ u\big|_{z=0} = u_2,\ u\big|_{z=H} = u_1 & (\rho < R, 0 < \varphi < 2\pi) \\ u\big|_{\rho=R} = f(z) = \dfrac{2u_1}{H^2}\left(z - \dfrac{H}{2}\right)z + \dfrac{u_2}{H}(H - z) & (0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < H)\end{cases}$$ 。

先将上、下底面的非齐次边界条件齐次化。

令 $u(\rho,\varphi,z) = v(\rho,\varphi,z) + w(z)$，（1）

使 $w(z)$ 满足

$$\left.\begin{array}{l} w''(z) = 0 \\ w(0) = u_2,\ w(H) = u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow w(z) = u_2 + \frac{u_1 - u_2}{H} z$$ 。（2）

v 满足 $$\begin{cases}\nabla^2 v = 0 & (\rho < R, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < H) \\ v\big|_{z=0} = v\big|_{z=H} = 0 & (\rho < R, 0 < \varphi < 2\pi) \\ v\big|_{\rho=R} = u\big|_{\rho=R} - w(z) = f(z) - w(z) = \dfrac{2u_1}{H}\left(\dfrac{z}{H} - 1\right)z & (0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < H)\end{cases}$$ 。

v 的定解问题有轴对称性，所以 u 与 φ 无关。

$$\nabla^2 v = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$ 。（3）

令 $v(\rho,z) = R(\rho)Z(z)$，代入（3），得 $\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)Z + RZ'' = 0$，

两边除以 $R(\rho)Z(z)$，并移项，得

$$\frac{R'' + \frac{1}{\rho}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda,$$

从而 $\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0 \\ Z(0) = Z(H) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{H^2},\ Z = C\sin\dfrac{n\pi}{H}z,\ n = 1, 2, \cdots$。（4）

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho}R'(\rho) - \frac{n^2\pi^2}{H^2}R(\rho) = 0 \Rightarrow \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \frac{n^2\pi^2}{H^2}\rho^2 R(\rho) = 0$$ 。（5）

令 $x=\frac{n\pi}{H}\rho$， $R(\rho)=y(x)$，则（5）成为

$x^2y''(x)+xy'(x)-x^2y(x)=0$，　　　【0阶虚宗量 Bessel eq.】

其在 $x=0$（即 $\rho=0$）处有界的解为

$$R(\rho)=y(x)=I_0(x)=I_0\left(\frac{n\pi}{H}\rho\right)\text{。}\qquad（6）$$

由（5）和（6），v 的定解问题满足上、下底面齐次边界条件的特解为

$$v_n(\rho,z)=C_nI_0\left(\frac{n\pi}{H}\rho\right)\sin\frac{n\pi}{H}z\text{，}$$

v 的定解问题满足上、下底面齐次边界条件的通解为

$$v(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nI_0\left(\frac{n\pi}{H}\rho\right)\sin\frac{n\pi}{H}z\text{。}\qquad（7）$$

由 $v\big|_{\rho=R}=\frac{2u_1}{H}\left(\frac{z}{H}-1\right)z$，得

$$\frac{2u_1}{H}\left(\frac{z}{H}-1\right)z=\sum_{n=1}^{\infty}C_nI_0\left(\frac{n\pi}{H}R\right)\sin\frac{n\pi}{H}z\text{。}$$　　【傅里叶正弦数】

$$C_nI_0\left(\frac{n\pi}{H}R\right)=\frac{2}{H}\int_0^H\frac{2u_1}{H}\left(\frac{z}{H}-1\right)z\sin\frac{n\pi}{H}zdz\text{，}$$

$$C_n=\frac{4u_1}{I_0\left(\frac{n\pi}{H}R\right)}\cdot\frac{1}{H^2}\left[\frac{1}{H}\int_0^H z^2\sin\frac{n\pi}{H}zdz-\int_0^H z\sin\frac{n\pi}{H}zdz\right]$$

$$=\frac{4u_1}{I_0\left(\frac{n\pi}{H}R\right)}\cdot\frac{1}{H^2}\left\{-\frac{H^2}{n\pi}(-1)^n+\frac{2H^2}{(n\pi)^3}\left[(-1)^n-1\right]+\frac{H^2}{n\pi}(-1)^n\right\}$$

$$=\frac{8u_1}{I_0\left(\frac{n\pi}{H}R\right)}\frac{(-1)^n-1}{(n\pi)^3},\ n=1,2,\cdots\text{，}$$

因此，$C_{2k}=0,\ k=1,2,\cdots$，　（8）

$$C_{2k+1}=\frac{8u_1}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{H}R\right]}\cdot\frac{-2}{(2k+1)^3\pi^3}=-\frac{16u_1}{\pi^3 I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{H}R\right](2k+1)^3}\text{。}\quad(9)$$

将（8）和（9）代入（7），得

$$v(\rho,z)=-\frac{16u_1}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{H}\rho\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)}{H}R\right]}\cdot\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{H}z}{(2k+1)^3}\text{。}\qquad(10)$$

将（2）和（10）代入（1），得圆柱体内各点的稳恒温度为

$$u(\rho,z)=w(z)+v(\rho,z)=u_2+\frac{u_1-u_2}{H}z-\frac{16u_1}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{H}\rho\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)}{H}R\right]}\cdot\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{H}z}{(2k+1)^3}\text{。}$$