目　录

2016年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、选择题（共6题, 每题3分, 共18分）

1. 已知$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$, 则$z^{100}+z^{50}+1$的值是（　　）

   A. $-\mathrm{i}$.　B. i.　C. 1.　D. -1.

2. 下列关于复对数函数$w=\operatorname{Ln} z$的说法正确的是（　　）

   A. $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$.

   B. $\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.

   C. 若$z=x$为实数, 则$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} x = \ln x$.

   D. $\operatorname{Ln} z^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\operatorname{Ln} z$.

3. 设函数$f(z)$在区域D内解析, 则与$f(z)\equiv$常数不等价的是（　　）

   A. $f'(z)\equiv 0$.　B. $\operatorname{Re} f(z)\equiv \operatorname{Im} f(z)$.　C. $\overline{f(z)}$解析.　D. $|f(z)|\equiv$常数.

4. 函数$f(z)$在单连通区域D内解析是$f(z)$沿D内任一围线积分为零的（　　）

   A. 充分条件.　B. 必要条件.　C. 充要条件.　D. 既非充分也非必要条件.

5. 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$的收敛半径是$R>0$, 则该级数（　　）

   A. 在$|z|\le R$上收敛.　　B. 在$|z|\le \dfrac{R}{2}$上一致收敛.

   C. 在$|z|<R$上一致收敛.　　D. 在$|z|\le R$上绝对收敛.

6. 已知$f(x)$的傅里叶变换$F(\lambda)=\mathbb{F}[f(x)]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$, 则$\mathbb{F}[f(x)\sin\lambda_0 x]=$（　　）

   A. $\dfrac{\mathrm{i}}{2}[F(\lambda+\lambda_0)-F(\lambda-\lambda_0)]$.　　B. $\dfrac{\mathrm{i}}{2}[F(\lambda+\lambda_0)+F(\lambda-\lambda_0)]$.

   C. $\dfrac{1}{2}[F(\lambda+\lambda_0)-F(\lambda-\lambda_0)]$.　　D. $\dfrac{1}{2}[F(\lambda+\lambda_0)+F(\lambda-\lambda_0)]$.

二、填空题（共6题, 每题3分, 共18分）

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+(-1)^n\mathrm{i}}$的收敛半径是__________.

2. $\displaystyle\int_0^{1+\mathrm{i}}(x-y+\mathrm{i}x^2)\,\mathrm{d}z=$__________, 其中积分路径是从0到$1+\mathrm{i}$的直线段.

3. $\displaystyle\oint_C \frac{\tan\pi z}{z^3}\,\mathrm{d}z=$__________, 其中$C:|z|=\dfrac{1}{4}$.

4. $\operatorname{Res}\left(\dfrac{2z}{3+z^2},\infty\right)=$__________.

5. 解析变换$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$在点$z=\mathrm{i}$处的伸缩比为__________.

6. 设$f(x)$为连续函数, $a>0$, 则积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax-x_0)f(x)\,\mathrm{d}x=$__________.

三、计算与证明题（共5题, 每题6 分, 共30分）

1. 函数$f(z)=(x^2-y^2-x)+\mathrm{i}(2xy-y^2)$在何处可导？何处解析？

2. 把函数$f(z)=\dfrac{1}{z(\mathrm{i}-z)}$在$0<|z|<1$和$0<|z-\mathrm{i}|<1$内分别展成洛朗级数.

3. 计算积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

4. 试证明若a为$f(z)$的n阶零点, 则$\mathrm{Res}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right)=n$.

5. 简述孤立奇点的分类及分类依据.

四、应用题（共 4 题, 共 34 分）

1. (10分) 用分离变量法求解如下拉普拉斯方程的边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (0<x<a,0<y<b) \\ u(0,y)=0,u(a,y)=0, & \\ u(x,0)=0,u(x,b)=\varphi(x). & \end{cases}$$

2. (10分) 用行波法求解如下波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0, & (-\infty<x<+\infty,y>0) \\ u(x,0)=\sin x, & \\ u_y(x,0)=0. & \end{cases}$$

提示：先作变量替换$\xi=x+y,\eta=3x-y$.

3. (10分) 利用拉普拉斯变换求解常微分方程

$$\begin{cases} y''(t)+y(t)=4, \\ y(0)=A,y'(0)=B, \end{cases}$$

其中A和B均为常数.

4. (4分) 有一长为l的细杆, 侧面绝热, 左端保持 0 度, 右端绝热. 杆的初始温度为$\varphi(x)$. 写出杆上各点的温度u所满足的定解问题.（**无需求解**）

2015年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、选择题（共5题, 每题3分, 共15分）

1. 若$a \neq 0$且$a \neq \infty$, 下列关于∞的性质错误的是（　　）

   A. $\infty + a = \infty$.　B. $\infty \cdot a = \infty$.　C. $\dfrac{a}{0} = \infty$.　D. $\infty + \infty = \infty$.

2. 下列说法正确的是（　　）

   A. 若$f(z) = u + \mathrm{i}v$在一点满足柯西–黎曼条件, 则在该点可微.

   B. 若$\overline{f(z)}$为解析函数, 则$f(\overline{z})$也必解析.

   C. 若$f(z) = u + \mathrm{i}v$解析, 则$f(z) = v + \mathrm{i}u$ 也解析.

   D. $\sin z$是有界的整函数.

3. $z \cos \dfrac{1}{z}$以$z = 0$为（　　）

   A. 可去奇点.　B. 极点.　C. 本性奇点.　D. 非孤立奇点.

4. 下列说法错误的是（　　）

   A. 若∞为$\cos z$的本性奇点.

   B. 若a为$f(z)$的n阶极点, 则$\mathrm{Res}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = n$.

   C. 设$f(z)$在区域D内解析且$f'(z) \neq 0$, 则$f(z)$不一定为单叶函数.

   D. 设$f(z)$在复平面上解析且在$|z| < 1$内$f(z) \equiv 0$, 则在复平面上$f(z) \equiv 0$.

5. 下列关于$f(x)$的傅里叶变换$F(\lambda) = \mathbb{F}[f(x)]$的叙述错误的是（　　）

   A. $F(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\, \mathrm{d}x$.　　B. $\mathbb{F}[f^{(n)}(x)] = (\mathrm{i}\lambda)^n \mathbb{F}[f(x)]$.

   C. $\mathbb{F}[f(x) + g(x)] = \mathbb{F}[f(x)] + \mathbb{F}[g(x)]$.　　D. $\mathbb{F}[f(x)g(x)] = F[f(x)] \cdot F[g(x)]$.

二、填空题（共7题, 每题3分, 共21分）

1. 8的所有三次方根是___________.

2. $\mathrm{i}^{1+\mathrm{i}}$=___________.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{[3 + (-1)^n]^n}$的收敛半径是_____.

4. $\displaystyle\int_C \overline{z}\, \mathrm{d}z$=_____, 其中$C$是从$-1$到$1$的上半单位圆周.

5. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\, \mathrm{d}z$=_____, 其中$C: |z-2| = \dfrac{1}{2}$.

6. $\mathrm{Res}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}, \infty\right)$=_____.

7. 若一光滑曲线在过$1 + \mathrm{i}$处的切线与x轴正向的夹角是$\dfrac{\pi}{6}$, 则经过变换$w = u + \mathrm{i}v = z^2$后其像曲线在$(1 + \mathrm{i})^2$处与$u$轴正向的夹角是_____.

三、计算及简述题（共4题, 每题6 分, 共24分）

1. 试求以$v=4xy$为虚部的解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$, 并且满足$f(0)=1$.

2. 把函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$在$2<|z|<3$和$0<|z-2|<1$内分别展成洛朗级数.

3. 计算积分$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2-\sin\theta}$.

4. 从下列定理中任选两个, 简述其内容.

(1) 柯西积分定理 (2) 模的最大值原理 (3) 刘维尔定理
(4) 莫雷拉定理 (5) 幂级数的阿贝尔定理 (6) 留数定理

四、应用题（共 4 题, 共 40 分）

1. (12分) 设有一长为l的均匀弦, 两端固定, 作自由振动. 已知弦上各点的初始位移为$\sin\dfrac{2\pi x}{l}$, 初始速度为$\sin\dfrac{3\pi x}{l}$.

(1) 写出弦上各点的位移u所满足的定解问题;
(2) 求解此定解问题.

2. (8分) 求解如下热传导方程的半无界问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & (0<x<+\infty, t>0) \\ u(x,0)=\psi(x), & (0\le x<+\infty) \\ u_x(0,t)=0. & (t\ge 0) \end{cases}$$

提示: 热传导方程初值问题的解为$u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi$.

3. (10分) 用行波法求解如下波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & (-\infty<x<+\infty, t>0) \\ u(x,0)=\sin x, & \\ u_t(x,0)=x^2. & \end{cases}$$

提示: 先作变量替换$\xi=x-t, \eta=x+t$, 化简方程.

4. (10分) 利用拉普拉斯变换求解常微分方程

$$\begin{cases} x''(t)-x(t)=\mathrm{e}^{2t}, \\ x(0)=0, x'(0)=1. \end{cases}$$

2015年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、选择题（每题3分, 共18分）

1. 下列各命题中, 正确的是（　　）

   A. 复数域上, $\sqrt{z}$是多值函数.

   B. 复数域上, e^{zi}是以$2\pi i$为周期的解析函数.

   C. 存在不是常函数的有界整函数.

   D. 变换$f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$在原点处的旋转角为$\dfrac{\pi}{2}$.

2. 设C是围线$|z|=1$, 则下列哪个积分值为零.（　　）

   A. $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$.　B. $\displaystyle\int_C \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}$.　C. $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{|z|}$.　D. $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z}$.

3. 下列哪一个结论是正确的（　　）

   A. 如果u是v的共轭调和函数, 则v也是u的共轭调和函数.

   B. 如果u和v在原点的偏导数均存在, 且满足柯西-黎曼条件, 则$f(z)=u+iv$在原点可导.

   C. 设$f(z)$在$|z|<1$上解析, 且在该区域上有无穷多个零点, 则$f(z)\equiv 0$.

   D. 如果a是解析函数$f(z)$的4阶零点, 则a必是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的1 阶极点.

4. $z=0$是函数$\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$的（　　）

   A. 可去奇点.　B. 非孤立奇点.　C. 极点.　D. 本性奇点.

5. 偏微分方程$u_t=u_{xx}$可以用来表示（　　）

   A. 弦的横向振动.　B. 杆的纵向振动.　C. 均匀细杆上的热量传导.　D. 拉普拉斯方程.

6. 记$f(x)$的傅里叶变换为$\mathbb{F}[f(x)]=F(\lambda)$, 形式上, 下列哪一个结论是错误的.（　　）

   A. $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{R^1} F(\lambda)e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$.　　B. $\mathbb{F}[3f(x)]=3\mathbb{F}[f(x)]$.

   C. $\mathbb{F}[f^{(2015)}(x)]=(i\lambda)^{2015}\mathbb{F}[f(x)]$.　　D. $\mathbb{F}[f(x)g(x)]=\mathbb{F}[f(x)]\mathbb{F}[g(x)]$.

二、填空题（每题3分, 共18分）

1. 方程$e^z=1+\sqrt{3}\,i$的解为$z=$__________.

2. 幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2+(-1)^n)^n z^n$的收敛半径$R=$__________.

3. 积分$\displaystyle\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=$__________, 其中$C$为从0到$1+i$的直线段.

4. 以$2y$为虚部的解析函数是__________.

5. 积分$\displaystyle\int_{|z|=n}\tan(\pi z)\,\mathrm{d}z=$__________, 其中$n$为正整数.

6. 一个偏微分方程定解问题是适定的, 如果该问题的解具有存在性、唯一性和__________.

三、计算、陈述题（共 4 题, 每题 6 分, 共 24 分）

1. 讨论函数$f(z)=x^2-x+\mathrm{i}y^2$的可导性和解析性.
2. 将函数$f(z)=\dfrac{1}{2-3z+z^2}$在$|z|<1$内展成幂级数, 在$1<|z|<2$内展成罗朗级数.
3. 计算复积分$\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z$.
4. 写出教材上的任意两个定理的内容.

四、应用题（共 3 题, 共 36 分）

1. （10 分）长为 1 的均匀细杆, 侧面绝热, 无热源, 左端点保持在零度, 右端点绝热, 初始温度分布为$\sin\dfrac{\pi x}{2}$.
   (1) 列出该细杆所满足的热传导方程、边值条件、初值条件.
   (2) 用分离变量法解该问题.
2. （16 分）解下列方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & x\in R, t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R, \\ u_t(x,0)=0, & x\in R. \end{cases}$$

   并用图示标出区间$[0,1]$的决定区域、影响区域分别是什么?
3. （10 分）用拉普拉斯变换法解下列常微分方程

$$\begin{cases} y''(t)=f(t), \\ y(0)=0, \\ y'(0)=0. \end{cases}$$

五、证明题（4 分） 设∞为$f(z)$ 的可去奇点, 且$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$, 证明:

$$\mathrm{Res}[f(z);\infty]=\lim_{z\to\infty}z(A-f(z)).$$

2014年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、选择题（每题3分，共18分）

1. 下列各命题中, 正确的是（　　）

   A. $\arg z$是解析函数.

   B. 设C为关于原点对称的光滑简单闭曲线, $f(z)$是连续的偶函数, 则$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

   C. 当$z\neq 0$时, $\mathrm{Ln}\,(z^2)=2\,\mathrm{Ln}\,(z)$.

   D. $f(z)$为整函数的充要条件是$f(\overline{z})$也为整函数.

2. 设C是从原点到$1+\mathrm{i}$点的直线段, 则$\int_C |z|\,\mathrm{d}z=$（　　）.

   A. $1-\mathrm{i}$　B. $1+\mathrm{i}$　C. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$　D. $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

3. 下列哪一个结论是错误的.（　　）

   (a) $\mathrm{Res}(f(z)+g(z),a)=\mathrm{Res}(f(z),a)+\mathrm{Res}(g(z),a)$.

   (b) 若$f(z)$是偶函数, 且0是$f(z)$的孤立奇点, 则$\mathrm{Res}(f(z),0)=0$.

   (c) 若∞是$f(z)$的可去奇点, 则$\mathrm{Res}(f(z),\infty)=0$.

   (d) 设$f(z)$在区域D上单叶解析, 则$f'(z)\neq 0,\forall z\in D$.

4. 在无界的弦振动方程$u_{tt}=u_{xx}$中, $u(x,t)$在$(x,t)=(1,2)$处的依赖区间是（　　）.

   A. $[-1,3]$　B. $[1,3]$　C. $[1,2]$　D. $[0,2]$.

5. 下列哪一个结论是错误的.（　　）

   (a) 设0是$f(z)$的2阶零点, $g(z)$的4 阶极点, 则0是$g(f(z))$的8阶极点.

   (b) 设0是$f(z)$的3阶零点, 则0是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的1阶极点.

   (c) 设0是$f(z)$的极点, $g(z)$的本性奇点, 则0是$f(z)g(z)$的本性奇点.

   (d) 设0是$f(z)$的本性奇点, 也是$g(z)$的本性奇点, 则0是$f(z)+g(z)$的本性奇点.

6. 记$f(x)$的傅里叶变换为$\mathbb{F}[f(x)]=F(\lambda)$, 下列哪一个结论是错误的.（　　）

   A. $\mathbb{F}[\delta(x-1)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}$.　　　B. $\mathbb{F}[f(x)*g(x)]=\mathbb{F}[f(x)]\cdot\mathbb{F}[g(x)]$.

   C. $\mathbb{F}[f'(x)]=\mathrm{i}\lambda\mathbb{F}[f(x)]$.　　　D. $\mathbb{F}[f(2x)]=2F(2\lambda)$.

二、填空题（每题3分，共18分）

1. 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$的和函数是$1-z-z^2$, 则该幂级数的收敛半径$R=$__________.

2. 若变换$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-1}{z+1}$在$z=1$处的旋转角为$\dfrac{\pi}{2}$, 则$\theta=$__________.

3. $f(z)=\dfrac{z^6+1}{(1+z^2)^2(z+2)^3}$在$\infty$ 处的留数为__________.

4. $u=xy$的共轭调和函数是__________.

5. 计算积分$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z|=7}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z$=___________.

6. 设0是$f(z)$的2015阶极点, 则$\mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},0\right)$=___________.

三、计算、陈述题（共4题, 每题6 分, 共24分）

1. 将函数$f(z)=\frac{1}{(3-z)(2-z)}$在$|z|<2$内展成幂级数, 在$0<|z-3|<1$内展成罗朗级数.

2. 函数$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$的奇点有哪些? 各是什么类型的奇点?

3. 计算实积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$.

4. 写出至少3种判别函数$f(z)$在单连通区域D上解析的方法.

四、应用题（共4题, 每题10分, 共40分）

1. 用分离变量法求解下面的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l},u_t(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}, & 0\leq x\leq l.\end{cases}$$

2. 用达朗贝尔方法解下列弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & x\in R,t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R,\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in R.\end{cases}$$

3. 解下列问题的特征值及相应的特征函数

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda x(t)=0,\\ x'(0)=x'(1)=0.\end{cases}$$

4. 用拉普拉斯变换法解下列积分方程

$$y(t)=\cos t+\int_0^t y(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

2014年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、判断题（共6题, 每题2分, 共12分）

1. 若二元函数$u(x,y)$和$v(x,y)$可微, 则$f(z)=u+\mathrm{i}v$可导. ( )

2. $f(z)=\mathrm{e}^z$为周期函数. ( )

3. 若$f(z)$与$\overline{f(z)}$同为区域D内的解析函数, 则$f(z)$在D内必为常数. ( )

4. $f(z)=\sin^{-1}\dfrac{1}{z}$以$z=0$为本性奇点. ( )

5. 对$z\neq 0$, 我们有$\mathrm{Ln}\,(z^2)=2\,\mathrm{Ln}\,z$. ( )

6. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在区域$D$上内闭一致收敛, 则该级数在$D$上必一致收敛. ( )

二、填空题（共6题, 每题3分, 共18分）

1. $-2-\mathrm{i}2\sqrt{3}$的指数形式是__________.

2. $\mathrm{Ln}\,(1-\mathrm{i})$=__________.

3. $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^n},0\right)$=__________（其中$n$为自然数）.

4. $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2-1},\infty\right)$=__________.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$的收敛半径是__________.

6. 解析变换$f(z)=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})z+2-\mathrm{i}$在$z=1$处的旋转角是__________.

三、计算与证明题（共5题, 每题6 分, 共30分）

1. 已知$u(x,y)=x^2-y^2+xy$, 证明$u(x,y)$为调和函数并求以u为实部的解析函数$f(z)$.

2. 计算积分$\displaystyle\int_C (x^2+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}z$, 其中$C$是从原点沿抛物线$y=x^2$到$1+\mathrm{i}$.

3. 把函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在$|z|<1$和$0<|z-1|<1$内分别展成罗朗（或泰勒）级数.

4. 设$f(z)$在区域D内解析, C为D内任一围线, 证明：对在D内但不在C上的任一点z_0, 等式

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$$

成立.

5. 计算实积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

四、应用题（共4题, 每题10分, 共40分）

1. 设有一长为l的弹性弦, 两端固定, 弦上各点的初始位移为$\sin\dfrac{\pi x}{l}$, 初始速度为$\sin\dfrac{3\pi x}{l}$. 试写出弦上各点的位移$u(x,t)$所满足的定解问题并求解.

2. 求解热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

3. 利用行波法求解初值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xt} - 3u_{tt} = 0, & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (-\infty < x < +\infty) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

提示：首先作变量替换$\xi = x - \dfrac{t}{3}, \eta = x + t$, 化简方程并求通解.

4. 利用拉普拉斯变换求解常微分方程

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = t, \\ y(0) = 0, y'(0) = -2. \end{cases}$$

提示：拉普拉斯变换$L(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

2013年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、判断题（正确的划“✓”，错误的划“×”．共6题，每题2分，共12分）

1. $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$是以$2\pi$为周期的解析函数. （　　）
2. 有界区域D上的解析函数$f(z)$一定是有界的函数. （　　）
3. 如果$f(z)$和$\overline{f(z)}$都是区域D上的解析函数，则$f(z)$必是常函数. （　　）
4. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$在$z=\mathrm{i}$处收敛，则该级数必在$z=1$处也收敛. （　　）
5. 变换$w=\dfrac{1}{z-1}$会将圆周$|z|=1$变成一条直线. （　　）
6. 无穷远点∞是$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$的本性奇点. （　　）

二、填空题（每空3分，共18分）

1. 当$|z|<1$时，成立等式$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|\xi|=1}\dfrac{\xi^2}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$，则导函数$f'(z)=$__________.
2. 若$u(x,y)=x^2+ay^2$是调和函数，则$a=$__________.
3. 称定解问题是适定的，是指这个定解问题的解存在，唯一且__________.
4. $f(z)=\dfrac{z^2}{(1-\cos z)\sin z}$在$z=0$处的留数是__________.
5. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+2}$在∞处的留数是__________.
6. 积分$\displaystyle\int_C|z|\,\mathrm{d}z=$__________，其中曲线$C$是从$-\mathrm{i}$到$\mathrm{i}$的右半单位圆周.

三、计算、概述题（共4题，共30分）

1. （6分）计算实积分$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
2. （8分）将函数$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$在$|z+1|<2$上展成幂级数，在$1<|z|$上展成洛朗级数.
3. （8分）$f(z)$的孤立奇点a可以分为哪几类？如何判定它们？
4. （8分）请写出本教材上的定理（任选两个，写出定理及其内容，不用证明）.

四、应用题（共4题，每题10分，共40分）

1. 用分离变量法求解下列热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & (t>0,x\in(0,l)),\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & (t\geq 0),\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}, & (x\in[0,l]). \end{cases}$$

2. 已知下列的非齐次弦方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-\sin x, & x\in R,t>0,\\ u(x,0)=0, & x\in R,\\ u_t(x,0)=0, & x\in R. \end{cases}$$

(1) 令$w = u + \sin x$, 写出w所满足的泛定方程和初值问题.

(2) 用达朗贝尔方法解(1)中的w, 进而求出u.

3. 求解积分方程$f(t) = \sin t + \int_0^t f(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s$.（本题不限定方法, 可以选择拉普拉斯变换方法,（公式$L[\sin t] = \dfrac{1}{p^2+1}$）, 也可以用微积分中的方法.）

4. (1) 写出傅里叶变换及逆变换的公式.

(2) 求δ函数的傅里叶变换.

(3) 写出傅里叶变换的至少3个性质.

2013年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、判断题（正确的划“✓”，错误的划“×”．共6题，每题2分，共12分）

1. $u(x,y)=x^2y^2$是某个解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的实部. （　　）
2. 常函数是唯一的一类有界整函数. （　　）
3. 分式线性变换具有保角性. （　　）
4. 当$z\neq 0$时，$\mathrm{Arg}(z^2)=2\mathrm{Arg}(z)$. （　　）
5. 称定解问题是适定的，是指这个定解问题的解存在、唯一且稳定. （　　）
6. 若$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在一点满足柯西–黎曼条件，则函数在该点可导. （　　）

二、填空题（每空3分，共18分）

1. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2^nz^{2n}$的收敛半径$R=$______，和函数$f(z)=$___________.
2. 变换$f(z)=z^2$在$z=\mathrm{i}$处的旋转角为______.
3. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}$在$\infty$处的留数为______.
4. $z=0$是$f(z)=\dfrac{z^2}{(1-\cos z^2)\sin z^3}$的______阶极点.
5. 积分$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z=$___________.

三、计算、证明题（共5题，每题6 分，共30分）

1. 将函数$f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$在$|z|<1$内展成幂级数，在$0<|z-1|<1$内展成罗朗级数.
2. 计算实积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. 设$f(z)$在区域D上解析，且$|f(z)|$在D上是一常数，证明$f(z)$在D上必为常函数.
4. 计算$\displaystyle\int_C \mathrm{Re}z\,\mathrm{d}z$之值，其中$C$是连接原点到1点再到$1+\mathrm{i}$点的折线.
5. 求$u=\mathrm{e}^x\sin y$的共轭调和函数.

四、应用题（共4题，每题10分，共40分）

1. 有一根长为l的弦，其两端被钉子钉紧，作自由振动，它的初始位移为$\sin 3\pi x$，初始速度为0.
   (1) 列出弦所满足的方程及定解条件；
   (2) 解出该弦方程的付氏解.

2. 用达朗贝尔方法解下列弦振动方程的古尔萨问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & x\in R, t>0,\\ u(x,x)=\sin 2x, & x\in R,\\ u(x,-x)=2x, & x\in R.\end{cases}$$

3. 求解下列热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R. \end{cases}$$

4. 用拉普拉斯变换法解下列常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' + y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

2012年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、计算题（共6题，每题4分，共24分）

1. 计算$(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$.
2. 设$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，求$\dfrac{1}{z}$的三角表示.
3. 设C为原点到点$3+4\mathrm{i}$的直线段，求积分$\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$绝对值得一个上界.
4. 计算积分$\displaystyle\int_C \sin z\,\mathrm{d}z$，其中$C$是圆周$|z-1|=1$的上半周，走向从0到2.
5. 求积分值$\displaystyle\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z$.
6. 求函数$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{z^2}$在$z=0$处的留数.

二、计算及证明题（共5题，每题6分，共30分）

1. 求函数$f(z)=\dfrac{2z^5-z+3}{4z^2+1}$的解析性区域，并求该区域上的导函数.
2. 已知调和函数$u=2(x-1)y$，求解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$，使得$f(0)=-\mathrm{i}$.
3. 函数$\dfrac{1}{\sin z}$有些什么奇点？如果是极点，指出它的阶.
4. 把函数$\dfrac{1}{z}$表成形如$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-2)^n$的幂级数.
5. 求证：$f(z)=\arg z\,(z\neq 0)$在全平面除去原点和负实轴的区域上连续，在负实轴上不连续.

三、应用题（共5题，每题8分，共40分）

1. 论述波动方程定解问题傅里叶解的物理意义.
2. 给出波动方程$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx},\ -\infty<x<+\infty, t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$初值问题在点$(1,3)$的依赖区间、区间$[1,2]$的决定区域、点$x=5$的影响区域.
3. 求定解问题$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u_x(0,t)=0, u_x(l,t)=0, & (0<x<1, t>0) \\ u(x,0)=-2\varepsilon x+\varepsilon l, u_t(x,0)=0 \end{cases}$的解.
4. 求函数$f(t)=1$的傅氏变换.
5. 应用拉普拉斯变换，求$y''(t)+4y(t)=0$满足初始条件$y(0)=-2, y'(0)=4$的特解.

四、应用题（共1题，每题6分，共6分）

求解半无界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<+\infty, t>0), \\ u(0,t)=f(t), \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t)=0 & (t\geq 0), \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0 & (0\leq x<+\infty), \end{cases}$$

其中$f(t)$为充分光滑的已知函数.

2016年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. A　2. B　3. B　4. A　5. B　6. A.

二、1. 3.　2. $\dfrac{\mathrm{i}-1}{3}$.　3. 0.　4. -2.　5. 2.　6. $\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x_0}{a}\right)$.

三、

1. $f(z)$在直线$y=\dfrac{1}{2}$上可导；处处不解析.

2. $0<|z|<1$时，$f(z)=-\dfrac{\mathrm{i}}{z}-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-\mathrm{i})^n z^n$；$0<|z-\mathrm{i}|<1$时，$f(z)=\dfrac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{i}^n(z-\mathrm{i})^n$.

3. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

四、

1. $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi y}{a}}+D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$，其中$C_n=\left(\mathrm{e}^{\frac{n\pi b}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)^{-1}\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi$，$D_n=-C_n$.

2. $u(x,y)=\dfrac{3}{4}\sin\left(\dfrac{3x-y}{3}\right)+\dfrac{1}{4}\sin(x+y)$.

3. $y(t)=4+(A-4)\cos t+B\sin t$.

4.
$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0,\\ u(0,t)=0, u_x(l,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leq x\leq l.\end{cases}$$

2015年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. D　2. B　3. C　4. B　5. D.

二、1. $2, -1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}, -1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$;　2. $\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;　3. 2;　4. $-\pi\mathrm{i}$;

5. $-2\pi\mathrm{i}$;　6. -1（提示: 利用洛朗展式先计算$z=1$处的留数）;

7. $\dfrac{5\pi}{12}$（提示: $w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0)\Rightarrow \mathrm{Arg}w'(t_0)=\mathrm{Arg}f'(z_0)+\mathrm{Arg}z'(t_0)$）.

三、

1. 由$u_x=v_y=4x$推出$u=2x^2+\varphi(y)$, 再由$\varphi'(y)=u_y=-v_x=-4y$推出$\varphi(y)=-2y^2+C$. 所以$f(z)=2x^2-2y^2+C+\mathrm{i}4xy$. 由$f(0)=1$得$C=1$, 所以$f(z)=2x^2-2y^2+1+\mathrm{i}4xy=2z^2+1$.

2. 当$2<|z|<3$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}};$$

当$0<|z-2|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}\frac{1}{(z-2)-1}=\frac{-1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-2)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-2)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-2)^n.$$

3. 设$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\le\theta\le2\pi$, 则$\sin\theta=\dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$, $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$. 于是有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2-\sin\theta}&=-2\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-4\mathrm{i}z-1}=-2\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{[z-(2+\sqrt{3})\mathrm{i}][z-(2-\sqrt{3})\mathrm{i}]}\\&=-2\times2\pi\mathrm{i}\frac{1}{z-(2+\sqrt{3})\mathrm{i}}\Big|_{z=(2-\sqrt{3})\mathrm{i}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.\end{aligned}$$

4. (2) 模的最大值原理: 若$f(z)$在闭区域$\overline{D}$解析, 且不为常数, 则$|f(z)|$只能在边界上达到最大值.

其余见教材.

四、

1. (1)

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge0,\\ u(x,0)=\sin\dfrac{2\pi x}{l}, u_t(x,0)=\sin\dfrac{3\pi x}{l}, & 0\le x\le l.\end{cases}$$

(2) 设方程有变量分离形式的非零特解

$$u(x,t)=X(x)T(t).$$

将其代入泛定方程中得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t).$$

两边同除以$a^2X(x)T(t)$得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

可得两个常微分方程

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,$$
$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

将非零特解$u(x,t)=X(x)T(t)$代入边界条件中可得

$$X(0)=X(l)=0.$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l, \\ X(0)=X(l)=0, \end{cases}$$

得特征值和特征函数

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n=1,2,\cdots.$$

把特征值λ_n代入方程$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$ 中, 注意到$\lambda_n>0$, 得其通解为

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l},$$

其中C_n,D_n是任意常数. 于是可得对应于特征值λ_n的特解为

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad n=1,2,\cdots,$$

叠加所有变量分离形式的特解得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

由

$$\sin\frac{2\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

得

$$C_2=1, C_n=0,\ n=1,3,4,\cdots.$$

又由$u_t(x,0)=\sin\dfrac{3\pi x}{l}$得

$$\sin\frac{3\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi a}{l}D_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由此可知

$$D_3=\frac{l}{3\pi a}, D_n=0,\ n=1,2,4,5,\cdots.$$

所以

$$u(x,t)=\cos\frac{2\pi at}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}.$$

2. 将初值$\psi(x)$偶延拓为

$$\psi_e(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0, \\ \psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

利用初值问题的解的公式, 当$x\geq 0,t>0$时有

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_e(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi \\ &=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_{-\infty}^{0}\psi(-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{+\infty}\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi\right]. \end{aligned}$$

令$\xi=-\eta$, 则有

$$\int_{-\infty}^{0}\psi(-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi=\int_{0}^{+\infty}\psi(\eta)\mathrm{e}^{-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\eta.$$

于是有

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}\psi(\xi)\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}+\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]\mathrm{d}\xi.$$

3. 设

$$u(x,t)=f(x-t)+g(x+t).$$

把它代入初始条件中, 得

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=\sin x,\\ -f'(x)+g'(x)&=x^2.\end{aligned}$$

对第二式积分得

$$-f(x)+g(x)=\frac{x^3}{3}+c,$$

其中c是一个任意常数. 从上面的两个关于f和g的函数方程中可以解出

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{x^3}{3}+c\right),\\ g(x)&=\frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{x^3}{3}+c\right).\end{aligned}$$

所以

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x-t)+\sin(x+t)]+\frac{1}{6}[(x+t)^3-(x-t)^3]=\sin x\cos t+x^2t+\frac{t^3}{3}.$$

4. 对方程作拉普拉斯变换得

$$s^2\widehat{x}(s)-1-\widehat{x}(s)=\frac{1}{s-2}.$$

于是可得

$$\widehat{x}(s)=\frac{1}{s^2-1}+\frac{1}{(s^2-1)(s-2)}=\frac{1}{(s+1)(s-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+1}\right).$$

作逆变换得

$$x(t)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-t}\right).$$

2015年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. A 2. C 3. D 4. B 5. C 6. D.

二、1. $\ln 2+\mathrm{i}(\pi/3+2k\pi)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$; 2. 1/3; 3. 1;
4. $2x+c+\mathrm{i}2y$, c为任意实数; 5. $-4n\mathrm{i}$; 6. 稳定性.

三、

1. 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. 由$f(z)=x^2-x+\mathrm{i}y^2$可得

$$u(x,y)=x^2-x,\quad v(x,y)=y^2.$$

计算得

$$u_x=2x-1, u_y=0, v_x=0, v_y=2y.$$

显然这四个一阶偏导数都连续, 故$u(x,y)$和$v(x,y)$处处可微. 但只有当$x-y=1/2$时, C-R方程$u_x=v_y, u_y=-v_x$才成立. 所以$f(z)$只在直线$x-y=1/2$上可导. 根据解析点的定义, 直线$x-y=1/2$上的点都不是解析点, 所以$f(z)$无解析点.

2. $f(z)=\dfrac{1}{2-3z+z^2}=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. 当$|z|<1$时, $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$; 当$1<|z|<2$时, $f(z)=-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}$. 具体展开过程见教材.

3. 因为$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}};\infty\right]=-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=1$, 所以

$$\int_{|z|=2}\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}};0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}};1\right]\right)=-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}};\infty\right]=-2\pi\mathrm{i}.$$

四、

1.
$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & x\in(0,1), t>0,\\ u(0,t)=u_x(1,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2}, & x\in[0,1].\end{cases}$$

设$u(x,t)=X(x)T(t)$, 把它代入方程中得

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t),$$

即有

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

由此得到两个常微分方程

$$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0,$$
$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

再利用边界条件可得

$$X(0)T(t)=X'(1)T(t)=0.$$

因为$T(t)\not\equiv 0$, 故必有

$$X(0)=X'(1)=0.$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<1, \\ X(0)=X'(1)=0. \end{cases}$$

可得特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2, \quad X_n(x)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x, \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

由$T_n'(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0$可得

$$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}.$$

于是叠加所有变量分离形式的特解得

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

利用初始条件有

$$\sin\frac{\pi x}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

比较两端系数可得$C_0=1, C_n=0, n=1,2,\cdots$. 所以有

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{4}a^2 t}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

2. 设$u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$, 代入初始条件得

$$f(x)+g(x)=\varphi(x), \quad -f'(x)+g'(x)=0,$$

即

$$f(x)+g(x)=\varphi(x), \quad -f(x)+g(x)=c.$$

由此得

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{c}{2}, \quad g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{c}{2}.$$

代回通解形式得$u(x,t)=\dfrac{1}{2}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)]$.

以点$(0,0),(1,0)$和$(1/2,1/2)$为顶点的三角形区域为区间$[0,1]$的决定区域, 过点$(0,0)$的直线$t=-x$和过点$(1,0)$的直线$t=x-1$以及区间$[0,1]$所围的区域为区间$[0,1]$的影响区域.

3. 做拉普拉斯变换得$s^2\widehat{y}(s)=\widehat{f}(s)$, 即$\widehat{y}(s)=\dfrac{\widehat{f}(s)}{s^2}$. 于是由拉普拉斯变换的卷积性质可得$y(t)=\displaystyle\int_0^t(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

五、 设$f(z)$在∞的空心解析邻域内的洛朗展式为

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0.$$

由此可知$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=c_0$. 而由$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$可知$A=c_0$, 所以

$$z(A-f(z))=\cdots-\frac{c_{-n}}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{c_{-2}}{z}-c_{-1}.$$

由此可知$\lim\limits_{z\to\infty}z(A-f(z))=-c_{-1}$. 这就证明了$\mathrm{Res}[f(z);\infty]=\lim\limits_{z\to\infty}z(A-f(z))$.

2014年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. B 2. C 3. C 4. A 5. D 6. D.

二、1. $+\infty$; 2. $\dfrac{\pi}{2}$; 3. -1; 4. $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}+c$; 5. 6; 6. -2015.

三、

1. $f(z)=\dfrac{1}{(3-z)(2-z)}=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$.
当$|z|<2$时,

$$f(z)=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

当$0<|z-3|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-3+1}=\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-3)^n=\sum_{n=-1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(z-3)^n.$$

2. 由$\sin\frac{1}{z}=0$推出$\frac{1}{z}=n\pi$, 即$z=\frac{1}{n\pi}, n=\pm1,\pm2,\cdots$为奇点. 显然, $z=0,\infty$也是奇点. 由于当$n\to\infty$时, $\frac{1}{n\pi}\to 0$, 所以$z=0$是非孤立奇点. 由

$$\left(\sin\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}$$

可知$z=\frac{1}{n\pi}, n=\pm1,\pm2,\cdots$是$\sin\frac{1}{z}$的一阶零点, 所以它们是$f(z)$的一阶极点. 由$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$可知$z=\infty$ 是极点. 进一步, 由$w=0$是$\dfrac{1}{\sin w}$的一阶极点, 所以$z=\infty$是$f(z)$的一阶极点.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3};\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^3}\right|_{z=\mathrm{i}}=\pi\mathrm{i}\frac{12}{(2\mathrm{i})^5}=\frac{3\pi}{8}.$

四、

3. 对λ分类讨论:

1) 当$\lambda<0$时, 方程的通解为$x(t)=A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,t}+B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,t}$. 计算得$x'(t)=\sqrt{-\lambda}A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,t}-\sqrt{-\lambda}B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,t}$. 将其代入边界条件得

$$A-B=0,$$
$$A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}}-B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}}=0.$$

解此线性方程组可得$A=B=0$, 只有零解, 故在此种情形下特征值问题无解.

2) 当$\lambda=0$时, 方程的通解为$x(t)=At+B$. 将其代入边界条件得$A=0$. 故在此种情形下特征值问题有解$x(t)=B\neq0$.

3) 当$\lambda>0$时, 方程的通解为可表示为$x(t)=A\cos\sqrt{\lambda}\,t+B\sin\sqrt{\lambda}\,t$. 计算得$x'(t)=-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}\,t+\sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}\,t$. 由$x'(0)=0$得$B=0$. 又由$x'(1)=0$得$\sin\sqrt{\lambda}=0$. 由此可推出$\sqrt{\lambda}=n\pi$, 即$\lambda=(n\pi)^2$, $n=1,2,\cdots$. 相应的特征函数为$x(t)=A\cos n\pi t$.

综上所述, 特征值和特征函数为

$$\lambda_n=(n\pi)^2,\ x_n(t)=A_n\cos n\pi t,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

4. 作拉普拉斯变换得$\widehat{y}(s)=\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{\widehat{y}(s)}{s^2+1}$. 由此可得$\widehat{y}(s)=\dfrac{1}{s}$, 所以$y(t)=1$.

附 第二题第5题的计算过程如下:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z|=7}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2\pi\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};-2\pi\right].$$

由$z=0$是函数$\dfrac{z}{1-\cos z}$的一阶极点, 利用洛必达法则可得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\sin z}=2.$$

由留数的定义,

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2\pi\right]=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z-2\pi|=1}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z.$$

作积分变量替换$w=z-2\pi$, 有

$$\begin{aligned}\int_{|z-2\pi|=1}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z&=\int_{|w|=1}\frac{w+2\pi}{1-\cos w}\,\mathrm{d}w=\int_{|w|=1}\frac{w}{1-\cos w}\,\mathrm{d}w+\int_{|w|=1}\frac{2\pi}{1-\cos w}\,\mathrm{d}w\\&=\int_{|w|=1}\frac{w}{1-\cos w}\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2\pi\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]=2.$$

类似地可得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};-2\pi\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]=2.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z|=7}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2\pi\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};-2\pi\right]=6.$$

2014年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. 错 2. 对 3. 对 4. 错 5. 错 6. 错.

二、1. $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$或$4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$; 2. $\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k=0,\pm,1\pm2,\cdots$; 3. $\frac{1}{(n-1)!}$;

4. $\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{2}$或$-\sinh 1$; 5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6. $\frac{\pi}{3}$.

三、

1. 计算可得$u_x=2x+y, u_y=-2y+x, u_{xx}=2, u_{yy}=-2$, 显然在整个平面上满足拉普拉斯方程$u_{xx}+u_{yy}=0$. 所以$u(x,y)$是调和函数.

   解法一 由$v_y=u_x=2x+y$可推出$v(x,y)=2xy+\frac{y^2}{2}+\varphi(x)$. 又由$u_y=-v_x$, 即$-2y+x=-2y-\varphi'(x)$得$\varphi'(x)=-x$. 由此可知$\varphi(x)=-\frac{x^2}{2}+c$, 其中$c$为任意实常数. 因此所求解析函数$f(z)=(x^2-y^2+xy)+\mathrm{i}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+2xy+c\right)$. 令$y=0$可得$f(x)=\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)x^2+\mathrm{i}c$. 所以$f(z)=\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)z^2+\mathrm{i}c$.

   解法二 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=2x+y-\mathrm{i}(-2y+x)$. 令$y=0$可得$f'(x)=(2-\mathrm{i})x$. 由此可知$f'(z)=(2-\mathrm{i})z$. 所以$f(z)=\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)z^2+C$, 其中$C$是一个复常数. 但$f(z)$的实部$u(x,y)$已经给定, 所以$C$是纯虚数.

2. 设积分路径C的参数方程为$z=x+\mathrm{i}x^2$, $0\le x\le 1$, 则

$$\begin{aligned}\int_C (x^2+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (x^2+\mathrm{i}x^2)(1+\mathrm{i}2x)\,\mathrm{d}x=(1+\mathrm{i})\int_0^1(x^2+\mathrm{i}2x^3)\,\mathrm{d}x\\ &=(1+\mathrm{i})\left(\frac{x^3}{3}+\mathrm{i}\frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}+\mathrm{i}\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

3. 当$|z|<1$时

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

   当$0<|z-1|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

   或

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{1-(z-1)}\\ &=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.\end{aligned}$$

4. 本题条件有误, 应将区域D限制为单连通区域.

   当z_0在C内时, 由柯西积分公式和导数的柯西型积分公式有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f'(z_0)=\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z.$$

当z_0在C外时, 由柯西积分定理有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0 = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z.$$

5. 记$f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$, 它在上半平面内只有两个一阶极点$a_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k=0,1$.

$$\mathrm{Res}[f(z);a_k] = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=a_k} = \frac{1}{4a_k} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k=0,1.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times 2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right] = \frac{\pi\mathrm{i}}{4}\times(-\sqrt{2}\,\mathrm{i}) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

四、

1. 定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0, \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geq 0, \\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}, u_t(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{l}, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

解题过程略, 答案为

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi a t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi a t}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}.$$

2. 关于x作傅里叶变换. 记$\widehat{u}(\omega,t)=F[u], \widehat{\varphi}(\omega)=F[\varphi]$, 由微分性质和线性性质有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t)=-a^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t), \quad t>0, \\ \widehat{u}(\omega,0)=\widehat{\varphi}(\omega), \end{cases}$$

其中的ω视为参数. 解得

$$\widehat{u}(\omega,t)=\widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}.$$

对$\widehat{u}(\omega,t)$作傅里叶逆变换, 便可得到解$u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi$.

3. 利用算子分解

$$(\partial_x)^2+2\partial_x\partial_t-3(\partial_t)^2=(\partial_x+3\partial_t)(\partial_x-\partial_t),$$

可得坐标变换$\xi=x-\dfrac{t}{3}, \eta=x+t$. 在此变换下有

$$\begin{cases} u_x=u_\xi+u_\eta, \\ u_t=-\frac{1}{3}u_\xi+u_\eta. \end{cases}$$

由此可知

$$\begin{cases} \partial_x=\partial_\xi+\partial_\eta, \\ \partial_t=-\frac{1}{3}\partial_\xi+\partial_\eta. \end{cases}$$

计算可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

解得

$$u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta),$$

即

$$u(x,t)=f\left(x-\frac{t}{3}\right)+g(x+t).$$

将其代入初始条件得

$$\begin{aligned} f(x)+g(x)&=\varphi(x),\\ -\frac{1}{3}f'(x)+g'(x)&=\psi(x). \end{aligned}$$

对第二个等式积分得

$$-\frac{1}{3}f(x)+g(x)=\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+c.$$

于是可解得

$$\begin{aligned} f(x)=&\frac{3}{4}\left[\varphi(x)-\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-c\right],\\ g(x)=&\frac{1}{4}\left[\varphi(x)+3\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+3c\right]. \end{aligned}$$

将它们代回通解公式可得

$$u(x,t)=\frac{3}{4}\varphi\left(x-\frac{t}{3}\right)+\frac{1}{4}\varphi(x+t)+\frac{3}{4}\int_{x-\frac{t}{3}}^{x+t}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

4. 对方程作拉普拉斯变换可得

$$(s^2+1)\widehat{y}(s)+2=\frac{1}{s^2}.$$

解得

$$\widehat{y}(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}-\frac{2}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s^2+1}.$$

作逆变换得

$$y(t)=t-3\sin t.$$

2013年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. ✓ 2. × 3. ✓ 4. × 5. ✓ 6. ×.

二、1. $2z$; 2. -1; 3. 稳定; 4. 2; 5. -1; 6. $2\mathrm{i}$.

三、

1. 设$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 则由欧拉公式有

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+\mathrm{i}\sin(\sin\theta)].$$

由于函数$\mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$是奇函数, 所以

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+\mathrm{i}\sin(\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{z}\,\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z=2\pi.\end{aligned}$$

2. 当$|z+1|<2$时,

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2-(z+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}.$$

当$|z|>1$时,

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{-z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

3. 见教材4.5.1小节.

四、

1. 解题过程略, $u(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi x}{l}$.

2. (1)

$$\begin{cases}w_{tt}=u_{xx}, & x\in R, t>0,\\ w(x,0)=\sin x, & x\in R,\\ w_t(x,0)=0, & x\in R.\end{cases}$$

(2) 设$w(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$, 将其代入初始条件中得

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=\sin x,\\ f'(x)-g'(x)&=0.\end{aligned}$$

由第二式可得$f(x)-g(x)=c$, 其中c为任意常数. 于是可解得

$$f(x)=\frac{1}{2}[\sin x+c],\quad g(x)=\frac{1}{2}[\sin x-c].$$

由此可知$w(x,t)=\dfrac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)]=\sin x\cos t$, $u(x,t)=\sin x(\cos t-1)$.

3. 作拉普拉斯变换得

$$\widehat{f}(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{\widehat{f}(s)}{s^2+1}.$$

从中解出$\widehat{f}(s)=\dfrac{1}{s^2}$. 再作逆变换便可得$f(t)=t$.

4. (2) $F[\delta(x)]=1$.

2013年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. × 2. ✓ 3. ✓ 4. × 5. ✓ 6. ×.

二、1. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{1}{1-2z^2}$; 2. $\dfrac{\pi}{2}$; 3. 1; 4. 5; 5. 0.

三、

1. 当$|z|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

当$0<|z-1|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

或

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{1-(z-1)}\\&=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2};\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}=\frac{\pi}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

3. 不妨设$|f(z)|=r$, 则$u^2+v^2=r^2$. 两边关于x和y分别求偏导数得

$$\begin{cases}uu_x+vv_x=0,\\uu_y+vv_y=0.\end{cases}$$

利用C–R方程可重写为

$$\begin{cases}uu_x+vv_x=0,\\vu_x-uv_x=0.\end{cases}$$

此线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}u & v\\ v & -u\end{vmatrix}=-(u^2+v^2).$$

若$u^2+v^2=r^2=0$, 则$u=v\equiv 0$, 即$f(z)\equiv 0$; 若$u^2+v^2=r^2\neq 0$, 则上面的方程组只有零解, 即$u_x=v_x=0$. 再次利用C–R方程得$u_y=v_y=0$. 因此u和v在区域D上为常数, 所以$f(z)$为常函数.

4. 设直线段C_1的参数方程为：$z=t$, $0\le t\le 1$, 直线段C_2的参数方程为：$z=1+\mathrm{i}t$, $0\le t\le 1$, 则有

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z&=\int_{C_1}\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z+\int_{C_2}\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{Re}\,t\cdot 1\,\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

5. 由$v_y=u_x=\mathrm{e}^x\sin y$可推出$v(x,y)=-\mathrm{e}^x\cos y+\varphi(x)$. 再由$u_y=-v_x$即$\varphi'(x)=0$可知$\varphi(x)=c$, 其中$c$为一任意常数. 所以$v(x,y)=-\mathrm{e}^x\cos y+c$.

四、

1. (1)
$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<1, t>0, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\geq 0, \\ u(x,0)=\sin(3\pi x), u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq 1. \end{cases}$$
(2) $u(x,t)=\cos(3\pi t)\sin(3\pi x)$.

2. 设$u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$, 将其代入初始条件中得
$$\begin{aligned} f(2x)+g(0)&=\sin 2x, \\ f(0)+g(2x)&=2x. \end{aligned}$$
由此可得$f(x)=\sin x-g(0), g(x)=x-f(0)$. 于是有$u(x,t)=\sin(x+t)+x-t-[f(0)+g(0)]$. 易知$f(0)+g(0)=0$. 所以$u(x,t)=\sin(x+t)+x-t$.

3. 关于x作傅里叶变换. 记$\widehat{u}(\omega,t)=F[u], \widehat{\varphi}(\omega)=F[\varphi]$, 由微分性质和线性性质有
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t)=-\omega^2\widehat{u}(\omega,t), \quad t>0, \\ \widehat{u}(\omega,0)=\widehat{\varphi}(\omega), \end{cases}$$
其中的ω视为参数. 解得
$$\widehat{u}(\omega,t)=\widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-\omega^2 t}.$$
对$\widehat{u}(\omega,t)$作傅里叶逆变换, 便可得到解$u(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\mathrm{d}\xi$.

4. 作拉普拉斯变换得
$$s^2\widehat{y}(s)+\widehat{y}(s)=\widehat{f}(s).$$
从中解出$\widehat{y}(s)=\dfrac{\widehat{f}(s)}{s^2+1}$. 再作逆变换便可得
$$y(t)=\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

2012年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、

1. $(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i}) = -\sqrt{3}+\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1-3) = -4\mathrm{i}$.

2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$. 注意$\dfrac{1}{r}(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$是错误的.

3. 由积分估计定理有$\left|\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\right| \le \displaystyle\int_C \frac{1}{|z-\mathrm{i}|}|\,\mathrm{d}z|$. 利用相似三角形的知识, 易知$|z-\mathrm{i}|\ (z\in C)$的最小值是$\dfrac{3}{5}$. 所以
$$\left|\int_C \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{5}{3}\times 5 = \frac{25}{3}.$$

4. 由于$\sin z$在整个复平面上解析, 积分值$\displaystyle\int_C \sin z\,\mathrm{d}z$只与积分路径的起点和终点有关, 根据牛顿–莱布尼兹公式,
$$\int_C \sin z\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \sin z\,\mathrm{d}z = -\cos z\Big|_0^2 = 1-\cos 2.$$

5. $\displaystyle\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2}(\cos z)''\Big|_{z=\mathrm{i}} = -\pi\mathrm{i}\cos\mathrm{i} = -\frac{\pi\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e})}{2}$.

6. $\operatorname{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{z^2};0\right] = -1$.

二、

1. 由$4z^2+1=0$可得$f(z)$的全部奇点为$z=\pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}$. 它的解析区域为复平面上除去点$z=\pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}$的部分.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{2z^5-z+3}{4z^2+1} = \frac{(10z^4-1)(4z^2+1)-(2z^5-z+3)\cdot 8z}{(4z^2+1)^2} = \frac{24z^6+10z^4+4z^2-24z-1}{(4z^2+1)^2}.$$

2. 由$v_y=u_x=2y$可推出$v(x,y)=y^2+\varphi(x)$. 又由$v_x=\varphi'(x)=-u_y=2(1-x)$可推出$\varphi(x)=2x-x^2+C$, 其中$C$为任意常数. 于是$f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2+2x-x^2+C)$. 令$y=0$得$f(x)=\mathrm{i}(2x-x^2+C)$. 由此可知$f(z)=\mathrm{i}(2z-z^2+C)$. 由$f(0)=\mathrm{i}$可得$C=-1$. 所以$f(z)=-\mathrm{i}(1-z)^2$.

3. $z=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$全都是一阶极点; $z=\infty$是非孤立奇点.

4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(z-2)+2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}},\ |z-2|<2.$

5. 略.

三、

1. 见教材8.1.3和11.1.2小节.

2. 点$(1,3)$的依赖区间为$[-5,7]$; 区间$[1,2]$的决定区域为$\{(x,t)|1+2t\le x\le 2-2t, 0\le t\le 1/4\}$; 点$x=5$的影响区域为$\{(x,t)|5-2t\le x\le 5+2t, t\ge 0\}$. 最好绘制草图作答.

3. 设$u(x,t)=X(x)T(t)$, 把它代入方程中得
$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t),$$
即有
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

由此得到两个常微分方程

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,$$
$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

再利用边界条件可得

$$X'(0)T(t)=X'(l)T(t)=0.$$

因为$T(t)\not\equiv 0$, 故必有

$$X'(0)=X'(l)=0.$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<l, \\ X'(0)=X'(l)=0. \end{cases}$$

可得特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

由$T_n''(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0$可得

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}.$$

于是叠加所有变量分离形式的特解得

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

代入初始条件可得$D_n=0,1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned} C_0=&\frac{1}{l}\int_0^l(-2\varepsilon x+\varepsilon l)\,\mathrm{d}x=0, \\ C_n=&\frac{2}{l}\int_0^l(-2\varepsilon x+\varepsilon l)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=-\frac{4\varepsilon}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{4\varepsilon l}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]. \end{aligned}$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8\varepsilon l}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

4. $F[1]=2\pi\delta(\omega)$.

5. 作拉普拉斯变换得

$$s^2\widehat{y}(s)+2s-4+4\widehat{y}(s)=0.$$

从中解出$\widehat{y}(s)=\dfrac{4-2s}{s^2+4}=\dfrac{4}{s^2+4}-\dfrac{2s}{s^2+4}$. 再作逆变换便可得

$$y(t)=2\sin 2t-2\cos 2t.$$

四、除了教材上讲的拉普拉斯变换解法外, 还可以用行波法求解.
设$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$. 代入初始条件得

$$f_1(x)+f_2(x)=0, \quad af_1'(x)-af_2'(x)=0, \qquad x\geq 0.$$

由第二个等式积分可得$f_1(x)-f_2(x)=C$, 这里C为一任意常数. 于是可解得

$$f_1(x)=-\frac{C}{2}, \quad f_2(x)=\frac{C}{2}, \qquad x\geq 0.$$

利用边界条件有$f_1(at)+f_2(-at)=f(t)$. 由此可知

$$f_2(x)=f\left(-\frac{x}{a}\right)-f_1(-x), \qquad x<0.$$

所以

$$u(x,t)=\begin{cases} 0 & x\geq at, \\ f\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & x\leq at. \end{cases}$$