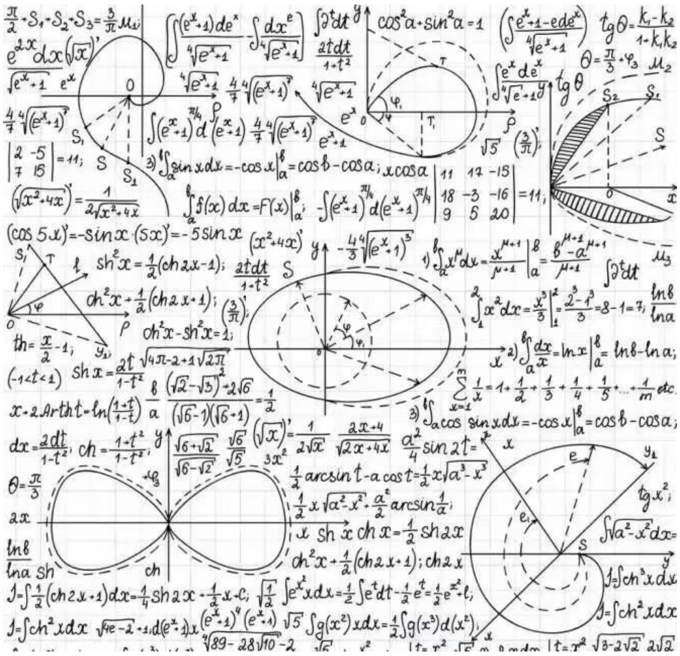


数学物理方法

整理：2019级大气科学　蒋斌

莫尔斯说：“数学是数学，物理是物理，但物理可以通过数学的抽象而受益，而数学则可通过物理的见识而受益。” 数学家拉克斯说：“数学和物理的关系尤其牢固，其原因在于数学的课题毕竟是一些问题，而许多数学问题是物理中产生出来的，并且不止于此，许多数学理论正是为处理深刻的物理问题而发展出来的。”

前言

《数学物理方法》课程主要包括两大模块：复变函数论与数学物理方程，其中复变函数部分的重要知识点有：复数的三种表达形式以及基本运算、解析函数可微的必要条件和充要条件、调和函数、常见初等解析函数的基本概念与运算性质、柯西定理与柯西积分公式、幂级数收敛半径的计算、幂级数的泰勒展开和洛朗级数展开、极点的判断、留数定理以及利用留数计算某一类积分、解析函数保角性的两个重要结论……这些都是提纲挈领的关键词，具体的概念、；而到了数学物理方程，重要的知识点有：(1) 有界情形下波动方程、热传导方程的初边值问题解法，主要是二维形式，核心的思想是分离变量法，由此导出的一些结论需要熟练掌握，从而在考试解题中能够直接写出相应结论，使整个解题过程简洁清晰；(2) 无界情形下，波动方程介绍了达朗贝尔解法，热传导问题介绍了柯西解法，由此再去求解半无界问题时，便可以延拓到无界情形，利用无界情形导出的结论求解半无界问题；(3) 最后一个就是傅里叶变换和拉普拉斯变换，重点在于记住定义，熟练性质，保证再运用时不会出错。

《数学物理方法》的考试更多的是考查我们对概念和结论的理解和记忆——这是比较“肤浅的”，我们应该更多的是去思考如何把学过的知识运用到实际中去。

在本资料的使用中，如发现有误之处还请大家批评指正，联系邮箱：lesnow_bin@163.com。最后，期末加油！

2021 年 6 月 22 日

目录

Part I 复变函数论

第一章 复数与复变函数

◆ ***重要知识点提要***

复平面、复数的三种表达式、复数的模与辐角、复数的运算（相等、加减、乘除、共轭、幂运算、方根运算）、复变函数（单值函数与多值函数）

◆ ***典型例题***

1. 计算 $\sqrt{a+bi}$ 的值为_______.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B. $\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a})$　　D. $\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}$

解析：C

已知 $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$，由欧拉公式，$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\rho e^{i\theta}}=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\rho}(\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2})$

由倍角公式，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos\theta-1}{2}},\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos\theta+1}{2}},\cos\theta=\dfrac{a}{\rho}$，代入上式，可知 C 选项正确.

2. 计算 $(1+i)^{-2}$ 的值为_______.

A. $\dfrac{i}{2}$　　B. $-\dfrac{i}{2}$　　C. $e^{i\frac{\pi}{2}}$　　D. $\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

解析：B　直接计算，有 $(1+i)^{-2}=\dfrac{1}{(1+i)^2}=\dfrac{1}{1^2+i^2+2i}=\dfrac{1}{2i}=-\dfrac{i}{2}$，也可以采用指数形式来进行计算：$(1+i)^{-2}=\dfrac{1}{(1+i)^2}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^2}=\dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

3. 计算 $\cos(1+i)$ 的值为_______.

A. $\frac{1}{2}(e^{1}+e^{-1})\cos 1$　　B. $\frac{1}{2}(e^{1}+e^{-1})\sin 1$

C. $\frac{i}{2}(e^{-1}-e^{1})\sin 1$　　D. $\frac{1}{2}(e^{-1}+e^{1})\cos 1+\frac{i}{2}(e^{-1}-e^{1})\sin 1$

解析：D 首先将 $\cos(1+i)$ 展开得到 $\cos 1\cos i-\sin 1\sin i$，由欧拉公式得 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$，从而解得：

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta});\sin\theta=-\frac{i}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$$

令上述的 θ 为 i，得到 $\cos i=\frac{1}{2}(e^{-1}+e^{1});\sin i=-\frac{i}{2}(e^{-1}-e^{1})$，从而可知 D 项正确。

4. 下列各式表示复平面上的什么区域？

(1) $\mathrm{Im}z+|z|\geq 2$　　(2) $0\leq\arg\frac{z-1}{z+1}<\frac{\pi}{2}$

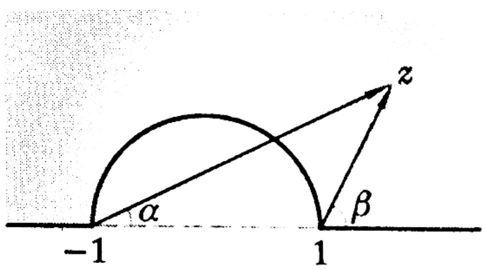
解 (1)设 $z=x+iy$，则上述不等式化为 $\sqrt{x^2+y^2}\geq 2-y$，其边界为 $\sqrt{x^2+y^2}=2-y$

它表示 z 点到原点的距离与它到直线 $y=2$ 距离相等，显然这是一条以 $y=2$ 为准线的抛物线，其方程为 $x^2=-4(y-1)$

而 $\sqrt{x^2+y^2}\geq 2-y$ 化简后为 $y\geq 1-\frac{x^2}{4}$，故 $\mathrm{Im}z+|z|\geq 2$ 表示的区域为抛物线的上方且包括边界

(2)（*解法一*）

如下图，在复平面上任取一点 $z=x+iy$，则 $\arg(z-1)=\beta,\arg(z+1)=\alpha$



将不等式 $0\leq\arg\frac{z-1}{z+1}=\arg(z-1)-\arg(z+1)=\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$ 取正切，有：

$$0 \le \tan(\beta-\alpha) < \infty \text{ 即 } 0 \le \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta} < \infty$$

由上图可知：$\tan\beta = \frac{y}{x-1}, \tan\alpha = \frac{y}{x+1}$，代入上式后化简得：

$$0 \le \frac{2y}{x^2+y^2-1} < \infty$$

由此得所表示的区域为：$\begin{matrix} y \ge 0 \\ x^2+y^2-1>0 \end{matrix}$

（解法二）

因为 $\frac{z-1}{z+1} = \frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}$，所以有：

$$0 \le \arg\frac{z-1}{z+1} = \arg\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2} < \frac{\pi}{2}$$

这表明复数 $\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}$ 的辐角在第一象限，所以它的实部与虚部均为非负，所以 $\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} > 0, \frac{2y}{(x+1)^2+y^2} \ge 0$，结果与解法一一样.

◆ *习题一*

1. (1)化简复数 $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n+2}}$；(2)求 $\sqrt{i}$ 的实部虚部及辐角.

2. 计算 $(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})(\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4})$.

3. 证明题：

(1) 若 $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$，证明 $z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta$.

(2) 证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明几何意义.

(3) 复平面上的直线方程可以写成 $a\bar{z}+\bar{a}z=c$（$a \ne 0$ 是复常数，c 是实常数）.

(4) 证明三角形的内角和为 π.

答案：

1. (1) $\frac{i^{n+2}}{2}$ ；(2) 提示: $\sqrt{i}$ 对应的复数有里两个: $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

2. $e^{\frac{7\pi}{12}i}$ (注意三角形式的表示方式)

3. 证明过程略.

第二章 解析函数

◆ ***重要知识点提要***

解析函数的定义、柯西-黎曼（C-R）条件、调和函数的概念、初等单值函数、初等多值函数

◆ ***典型例题***

1. 判断下列函数何处可导？何处解析？如果可导，并求其导数.

(1) $f(z)=z\operatorname{Im}z$；　　(2) $f(z)=2x^3+i3y^3$；

解：(1) $f(z)=z\operatorname{Im}z=xy+iy^2$，令 $u(x,y)=xy, v(x,y)=y^2$，于是：

$$u_x=y, u_y=x, v_x=0, v_y=2y$$

上述四个偏导数连续，当且仅当 $x=0, y=0$ 时 C-R 条件满足. 所以 $f(z)=z\operatorname{Im}z$ 只在 $z=0$ 处可导，在其余点均不可导，从而在全平面内不解析.

在 $z=0$ 处的导数为：

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{z=0}=0$$

(2) 令 $u(x,y)=2x^3, v(x,y)=3y^3$，于是：

$$u_x=6x^2, u_y=0, v_x=0, v_y=9y^2$$

上述四个偏导数连续，当且仅当 $6x^2=9y^2$，即 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ 时 C-R 条件满足，

因此 $f(z)=2x^3+i3y^3$ 在直线 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ 上可导，在这些点上的导数为：

$$f'(\mathrm{z})=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x}=6x^2(=9y^2)$$

但是两条直线上的任意一点在其领域内都不能处处可导，所以 $f(z)$ 在全平面上不解析

2. 设解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，若已知下列条件，求出 $f(z)$.

(1) $u(x,y)=e^y\sin x$；　　(2) $u(x,y)+v(x,y)=x^2-y^2-2xy$.

解：(1) *方法一* 因为 $f(z)$ 解析，所以 $u(x,y)$ $v(x,y)$ 均可为微，由 C-R 条件可得：

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy=-e^y\sin xdx+e^y\cos xdy=d(e^y\cos x)$$

所以 $v(x,y)=e^y\cos x+C$，这里 C 为任意实常数，于是 $f(z)$ 的表达式为：

$$f(z)=e^y\sin x+i(e^y\cos x+C)=ie^y(\cos x-i\sin x)+iC=ie^{-iz}+iC$$

方法二 用线积分的方法：

$$v(x,\mathrm{y})=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C$$

因积分与路径无关，取最简单的路径：$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$，于是有：

$$v(x,y)=\int_0^x\left(-e^y\sin x\right)_{y=0}dx+\int_0^y e^y\cos xdy+C=e^y\cos x+C$$

最后也可求出来 $f(z)=ie^{-iz}+iC$

方法三 不直接求出 $v(x,y)$. 根据 $\begin{cases}z=x+iy\\ \overline{z}=x-iy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}\\ y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\end{cases}$，可以类比得到：

$$\begin{cases}f(z)=u+iv\\ \overline{f(z)}=u-iv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}\\ v=\dfrac{f(z)-\overline{f(z)}}{2i}\end{cases}$$

$$u(x,y)=e^{y}\sin x=e^{\frac{z-\overline{z}}{2i}}\sin\frac{z+\overline{z}}{2}=e^{-\frac{z-\overline{z}}{2}}\frac{1}{2i}[e^{\frac{i}{2}(z+\overline{z})}-e^{-\frac{i}{2}(z+\overline{z})}]$$

因为

$$=\frac{1}{2i}(e^{i\overline{z}}-e^{-iz})=\frac{i}{2}(e^{-iz}-e^{i\overline{z}})=\frac{ie^{-iz}+\overline{ie^{-iz}}}{2}$$

所以 $f(z)=ie^{-iz}+iC$

(2) 由题意 $u(x,y)+v(x,y)=x^2-y^2-2xy$，不妨设：

$$\begin{aligned}F(z)&=\mathrm{U}(x,y)+i\,\mathrm{V}(x,y)=f(z)-if(z)=(1-i)f(z)\\&=(u+iv)-i(u+iv)=(u+v)+i(v-u)\end{aligned}$$

(构造有 $u+v$ 的项)

因为 $f(z)$ 解析，所以 $F(x,y)=(1-i)f(z)$ 也解析，从而可以通过 $F(x,y)$ 的实部 $\mathrm{U}(x,y)=u(x,y)+v(x,y)=x^2-y^2-2xy$ 来求的虚部 $\mathrm{V}(x,y)$：

$$\mathrm{V}(x,y)=\int\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}dx+\varphi(y)=-\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}dx+\varphi(y)=\int(2x+2y)dx+\varphi(y)=2xy+x^2+\varphi(y)$$

由 C-R 条件：$\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}=\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\Rightarrow 2x+\varphi'(y)=2x-2y$，解得 $\varphi(y)=-y^2+C$

所以 $F(z)=x^2-y^2-2xy+i(2xy+x^2-y^2+C)=z^2+i(z^2+C)$

从而 $f(z)=\dfrac{1}{1-i}F(z)=iz^2+(-1+i)C$

3. 计算 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2021}=$ __________.

解： 设 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，则 ω 可以看成是方程 $\omega^2-\omega+1=0$ 的根，对该方程进行变形，上述方程两边同时乘以 $\omega-1$，有 $\omega^3+1=0\Leftrightarrow\omega^3=-1$，所以 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2021}=\omega^{2021}=\left(\omega^3\right)^{673}\cdot\omega^2=\left(-1\right)^{673}\cdot\omega^2=-\omega^2$，根据方程还可以得到：$\omega^2=\omega-1$，所以 $\omega^{2021}=-\omega^2=1-\omega=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

4. 设 $v(x,y)=e^{px}\sin y$，求 p 的值，使得 $v(x,y)$ 为一调和函数，并找到一个函数

$u(x,y)$，使 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 为解析函数.

解：满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数，即：$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=e^{px}\sin y(p^2-1)$，

解得 $p=\pm 1$。

当 $p=1$ 时，有 $v(x,y)=e^x\sin y$，由 $v_x=e^x\sin y, v_y=e^x\cos y$，以及 C-R 条件，

$$du_x=u_x dx+u_y dy=v_y dx-v_x dy=e^x\cos y dx-e^x\sin y dy=d(e^x\cos y)$$

所以 $u(x,y)=e^x\cos y+C$，故 $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y+C=e^z+C$

(请读者自行完成 $p=-1$ 时的求解过程)

5. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 D 内解析，证明：$\Delta|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$

证明：令 $G(x,y)=|f(z)|^2=u^2(x,y)+v^2(x,y)$，则：

$$\Delta|f(z)|^2=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]$$

而 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$，即 $|f'(z)|^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2$

又因为 $u(x,y),v(x,y)$ 均为调和函数，满足拉普拉斯方程，即 $\Delta u=\Delta v=0$

联立以上各式可得：$\Delta|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$

◆ *习题二*

1. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)$ 在 $z=0$ 的极限为______.

   A.0　　B.不存在　　C. $4i$　　D. $-4i$

2. 下列哪个函数只在 $z=0$ 可导______.

   A. $(x-y)^2+2i(x+y)$　　B. $|z|$

   C. $z\,\mathrm{Re}\,z$　　D. $3x^2+2iy^3$

3. $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ 的导数为_______.

4. 已知 $v(x,y)=e^{-x}(x\sin x-y\cos y)$，则 $f(z)=$________.

5. 证明: 若函数 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $\overline{f(z)}$ 也在 D 内解析，则函数 $f(z)$ 在 D 内为一常数.

6. 证明极坐标系下的参数方程 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$，并利用此结论，在已知 $\omega=f(z)$ 解析，虚部为 $v=\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$ 时，求出实部 u.

答案：

1. B（可以把 z 写成指数形式；也可以利用 $z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2$ 进行变形）

2. C

3. $\cos z$

4. $f(z)=-ze^{-z}+C$

5. 证明略（提示：$f(z)$、$\overline{f(z)}$ 均满足 C-R 条件）

6. 证明略，$u(x,y)=\pm\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}+C$

第三章 柯西定理　柯西积分

◆ *重要知识点提要*

复变积分的概念及性质、柯西积分定理及复围线上的推广、柯西积分公式、解析函数的无限次可微性、整函数、莫雷拉定理

◆ *典型例题*

1. 试证：$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, (n=1) \\ 0, (n \neq 1且n为整数) \end{cases}$，$C$:以 a 为圆心，ρ 为半径的圆周.

证明：

方法一：利用参数方程进行转换

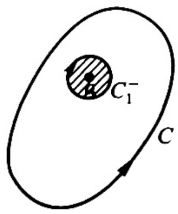
设 C:的参数方程为 $z-a=\rho e^{it}$，则 $dz = i\rho e^{it}dt$，于是：

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

当 $n \neq 1且n为整数$时，有：

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho^n e^{int}} = \frac{i}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}dt = \frac{i}{\rho^{n-1}}[\int_0^{2\pi} \cos(n-1)tdt - i\sin(n-1)tdt] = 0$$

方法二：利用复围线上的柯西积分定理



如上图所示，以 a 为圆心作圆周 C_1，使 C_1 包含在 C 内，有复围线上的柯西积分定理，有：$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$， 然后在利用方法一的参数方程转换证明。

2. 计算积分 $\int_C \operatorname{Re} z dz$，其路径分别为：

(1) $0 \to 1+i$ 的直线段；(2) $0 \to i \to 1+i$ 的折线段；(3) $0 \to 1 \to 1+i$ 的折线段.

解：(1) C 可表示为：$z=(1+i)t \quad (0 \le t \le 1)$，所以 $\operatorname{Re} z = t, dz = (1+i)dt$，于是：

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1+i)dt = (1+i)\int_0^1 tdt = \frac{1+i}{2}$$

(2) 可将 C 分为两段：$C_1: z = it \quad (0 \le t \le 1)$，$C_2: z = t + i \quad (0 \le t \le 1)$，于是：

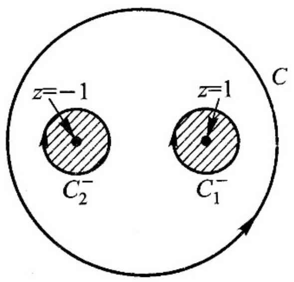
$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z dz \int_0^1 0dt + \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

(3) 可将 C 分为两段：$C_1: z = t \quad (0 \le t \le 1)$，$C_2: z = 1 + it \quad (0 \le t \le 1)$，于是：

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z dz \int_0^1 tdt + \int_0^1 1 \cdot idt = \frac{1}{2} + i$$

注：通过本例题可知；积分路径不同，积分值可以不同，这是因为$\operatorname{Re} z$ 不解析.

3. 计算$\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$，此处C是圆周$|z|=2$（如下图）.



解： 令$z^2-1=0$，得$z_1=2, z_2=-2$，在$|z|<2$内，z_1, z_2均为奇点. 分别以z_1, z_2为圆心，以充分小的ε为半径做两个圆周C_1, C_2，由复围线上的柯西积分定理得：

$$\oint_C \frac{dz}{z^2-1} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^2-1} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^2-1}$$

其中

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\oint_{C_1} \frac{dz}{z-1} - \oint_{C_1} \frac{dz}{z+1}\right) = \frac{1}{2}(2\pi i - 0) = \pi i$$

$$\oint_{C_2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\oint_{C_2} \frac{dz}{z-1} - \oint_{C_2} \frac{dz}{z+1}\right) = \frac{1}{2}(0 - 2\pi i) = -\pi i$$

所以

$$\oint_C \frac{dz}{z^2-1} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^2-1} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^2-1} = \pi i - \pi i = 0$$

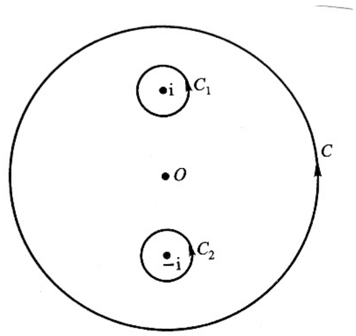
4. 计算$\oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$，其中$C$为：$|z|=2$.

解：在区域$|z|<2$内，被积函数的奇点为：$z=-i$，所以有：

$$\oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz=\oint_C \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z-(-i)}dz=2\pi i\left[\frac{z}{9-z^2}\right]_{z=-i}=\frac{\pi}{5}$$

5. 计算积分$I=\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$，其中$C$为$|z|=a(a>1)$确定的区域.

解：在$|z|<a(a>1)$内，$z=\pm 1$为奇点，分别以$z=\pm 1$为圆心，以充分小的ε为半径作圆周C_1, C_2，如图所示，由复围线上的柯西积分定理及柯西积分公式，有：



$$I=\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z/(z+i)^2}{(z-i)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z/(z-i)^2}{(z+i)^2}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i}+2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'_{z=-i}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i-\frac{\pi}{2}(1+i)e^{-i}=i\pi\sqrt{2}\sin(1-\frac{\pi}{4})$$

6. 由积分$\oint_C \frac{dz}{z+2}$之值证明$\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}=0$，其中$C$为单位圆周.

证明：在$|z|<1$内，被积函数处处解析，由柯西积分定理：$\oint_C \frac{dz}{z+2}=0$

通过观察可知，要将对z的积分转换为对θ的积分，需要用到复数的三角形式

由题可令$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，所以有：$\oint_C \frac{dz}{z+2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\theta+i\cos\theta}{\cos\theta+2+i\sin\theta}d\theta$，对比可知分母不含有虚部，因此通过共轭的方式把分母中的虚部消去，故有：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(-\sin\theta+i\cos\theta)(\cos\theta+2-i\sin\theta)}{(\cos\theta+2+i\sin\theta)(\cos\theta+2-i\sin\theta)}d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-2\sin\theta+i(1+2\cos\theta)}{5+4\cos\theta}d\theta$$

$$=-2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta+i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0+2i\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

从而$\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}=0$，证毕.

7. 设 C 为圆周 $x^2+y^2=3, f(z)=\oint_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}d\xi$，求 $f'(1+i)$.

解： 令 $F(z)=\frac{f(z)}{2\pi i}$，则

$$F'(z)=\frac{f'(z)}{2\pi i}=\frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{(\xi-z)^2}d\xi=\left[3\xi^2+7\xi+1\right]_{\xi=z}'=6z+7$$

故 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$，从而 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$

◆ *习题三*

1. 计算 $I=\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$，其中 C 为：(1) $|z-3|=\frac{1}{2}$；　(2) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

2. 计算 $I=\int_C z\sin z dz$，其中 C 为原点沿 $|z-\frac{i}{2}|=\frac{1}{2}$ 右半圆周到点 i 的曲线.

3. 计算下列积分的值.

(1) $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{\cos z}{z}dz$；　　(2) $\oint_{|z|=4}\frac{3z-1}{(z+1)(z-3)}dz$；

(3) $\oint_C \frac{\sin z}{(z-i)^3}dz$($C$为任一包含$i$ 的简单正向闭曲线)；

(4) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}dz\quad C:|z|=r>1$

4. 求积分 $\oint_C \frac{e^z}{z}dz(C:|z|=1)$，从而证明 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$.

答案：

1.

2. $-ie^{-1}$

3.(1) 1；(2) $6\pi i$；(3) $\frac{\pi}{2}(e-e^{-1})$；(4) $\pi i[\sin 1-\cos 1]$

4.略

第四章 解析函数的幂级数表示

◆ *重要知识点提要*

数项级数和函数项级数及其基本性质、幂级数的泰勒展开及其性质、解析函数的幂级数表示（泰勒展开式）和洛朗级数展开式、解析函数的零点与阶、孤立奇点的分类及判定

◆ ***典型例题***

1. 求 $e^z,\sin z,\cos z$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解：根据泰勒定理，有 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

对 e^z，在 $z=0$ 处的泰勒系数为：$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$，所以有

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,\quad (|z|<+\infty)$$

因为 $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$，所以

$$\cos z=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},\quad (|z|<+\infty)$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},\quad (|z|<+\infty)$$

2. 求多值函数 $f(z)=\mathrm{Ln}(1+z)$ 的各个分支在点 $z=0$ 的泰勒展开式.

解：多值函数 $f(z)=\mathrm{Ln}(1+z)$ 的支点为 $z=-1$ 和 ∞，于是沿负实轴从 $z=-1$ 到 ∞ 割破，得到无穷多个单值解析函数分支：

$f_k(z)=\ln(1+z)+2k\pi i,(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots)$

其中 $\ln(1+z)$ 代表主值支：

$$\ln(1+z)=\ln|1+z|+i\arg(1+z),-\pi<\arg(1+z)<\pi$$

无论哪个分支，与 $z=0$ 最近的奇点都是 $z=-1$，因此展开式的收敛圆都是 $|z|<1$，而在 $|z|<1$ 内有：$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{d\xi}{1+\xi}=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\xi^n d\xi$，逐项求积分得：

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z (-1)^n \xi^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

从而 $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} (|z|<1)$，故各支的展开式可表示为；

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + 2k\pi i, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$$

3. 已知函数 $\frac{e^z}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 内解析，求其泰勒展开式.

解：根据常见函数的泰勒展开式，有：

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad (|z| < +\infty)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots, (|\mathrm{z}| < 1)$$

两收敛级数相乘，可由对角线法则进行计算：

	1	$\frac{1}{1!}$	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{1!}$	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{1!}$	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{1!}$	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\cdots$
1	1	$\frac{1}{1!}$	$\frac{1}{2!}$	$\frac{1}{3!}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

写出展开相乘后的展开式为：

$$\frac{e^z}{1-z} = 1 + (1 + \frac{1}{1!})z + (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!})z^2 + (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}) z^n, |z| < 1$$

4. 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $0 < |z| < 1, 1 < |z| < 2, 2 < |z| < +\infty$ 内分别展开成洛朗级数.

解: (1) 在 $|z|<1$ 内，在此圆内，自然 $|z|<2$，为了利用几何级数公式，先将 $f(z)$ 的表达式做一个简单的调整：$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2}\right)}$，这样，都

满足几何级数展开的条件，于是有：

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

(2) 在$1<|z|<2$内，有$\frac{1}{|z|}<1,\frac{|z|}{2}<1$，$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)}$，于是：

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

(3) 在$2<|z|<+\infty$内，有$\frac{1}{|z|}<\frac{2}{|z|}<1$，于是有：

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z}\right)}-\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

注：在指定的环域进行展开，根据条件（不等式），转换成可以用几何级数展开的形式

5. 指出下列函数在$z=0$零点的阶.

(1) $z^2\left(e^{z^2}-1\right)$;　　　　(2) $6\sin z^3+z^3\left(z^6-6\right)$.

解：(1)（解法一）采用求导法，令$f(z)=z^2\left(e^{z^2}-1\right)$，则：

$$f'(z)=-2z+2\left(z^3+z\right)e^{z^2},f'(0)=0;$$

$$f''(z)=\left(4z^4+10z^2+2\right)e^{z^2}-2,f''(0)=0$$

$$f'''(z)=\left(8z^5+36z^3+24z\right)e^{z^2},f'''(0)=0;$$

$$f^{(4)}(z)=\left(16z^6+112z^4+156z^2+24\right)e^{z^2},f^{(4)}(0)=24\neq0$$

根据定义，可知$z=0$为$z^2\left(e^{z^2}-1\right)$的 4 阶零点

（解法二）利用泰勒级数展开：

$$e^{z^2}=1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{n!}+\cdots(|z|<+\infty)$$

所以 $z^2\left(e^{z^2}-1\right)=z^4+\frac{z^6}{2!}+\cdots+\frac{z^{2n+2}}{n!}+\cdots=z^4\varphi(z)(|z|<+\infty)$

其中 $\varphi(z)=1+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^{2n-2}}{n!}+\cdots(|z|<+\infty)$ 且 $\varphi(0)\neq 0$

根据定义，可知 $z=0$ 为 $z^2\left(e^{z^2}-1\right)$ 的 4 阶零点

(2) 对于高次幂，采用求导法显然十分麻烦，故采用泰勒展开法

$$\sin z^3=z^3-\frac{z^9}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{6n+3}}{(2n+1)!}+\cdots(|z|<+\infty)$$

$$6\sin z^3+z^3\left(z^6-6\right)=6\left(z^3-\frac{z^9}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{6n+3}}{(2n+1)!}+\cdots\right)+z^9-6z^3=z^{15}\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)=6\left(\frac{1}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{6n-12}}{(2n+1)!}+\cdots\right)$ 且 $\varphi(0)\neq 0$

根据定义，可知 $z=0$ 为 $6\sin z^3+z^3\left(z^6-6\right)$ 的 15 阶零点

注：对于求零点阶数，有以下简便的判断方法：

设 z_0 是 $f(z)$ 的 n 阶零点，同时也是 $g(z)$ 的 m 阶零点，有如下结论：

(1) z_0 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 零点；

(2) 如果 $m\neq n$， z_0 为 $f(z)\pm g(z)$ 的 $\min\{m,n\}$ 阶零点；

(3) 如果 $m=n$，则需要回到零点的定义继续求解；

(4) 复合函数零点的阶：设 $\xi=f(z), w=g(\xi)$ 均为解析函数，则 z_0 为为复合函数 $w=g[f(z)]$ 的 $m\cdot n$ 阶零点

6. 判断下列函数的奇点类型，如果是极点，请指出阶数.

(1) $\frac{z}{\left(1+z^2\right)\left(1+e^{\pi i}\right)}$；　　(2) $\frac{z^{2n}}{1+z^n}$ (n为正整数)

解： (1)令 $\left(1+z^2\right)\left(1+e^{\pi i}\right)=0$，解得 $z=\pm i, z=(2k+1)i\,(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

而 $\lambda(z)=z\neq 0$，并注意到当 $k=0,-1$，有 $z=\pm i$，所以：

$z=\pm i$ 为函数的 2 阶极点， $z=(2k+1)i\,(k=1,\pm2,\pm3,\ldots)$ 为函数的 1 阶极点.

(2) 令 $1+z^n=0$，解得 $z_k=e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}\,(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$，而 $\lambda(z_k)=z_k^n\neq0$，所以 $z_k=e^{\frac{\pi+2k\pi}{n}i}\,(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ 均为函数的 1 阶极点.

◆ *习题四*

1. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 在 $z=0$ 处的幂级数展开为________.

2. 设 C 为单位圆周 $|z|=1$ 内包围原点的任意一条正向简单闭曲线，则 $\oint_C\left(\sum\limits_{n=-2}^{\infty}z^n\right)dz=$ _______.

3. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $z=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right)$ 处收敛，则该幂级数在 $z=\dfrac{4}{5}i$ 处 _______.(“收敛”或“发散”)

4. $\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开为______，在 $z=1$ 处的泰勒展开为______.

5. 判断下列奇点的类型，如果是极点，则指出阶数.

(1) $\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$； (2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$； (3) $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$； (4) $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$；

(5) $e^{\frac{1}{z-1}}$； (6) $\dfrac{1}{z^2\left(e^z-1\right)}$

答案：

1. $f(z)=1-2z+3z^2-4z^3+\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots,|z|<1$ 2. $2\pi i$ 3. 收敛

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}(n+1)}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n$

5. (1) $z=0$ 为 1 阶极点； $z=\pm i$ 分别为 2 阶极点.

(2) $z=0$ 为 2 阶极点.

(3) $z=1$ 为 2 阶极点；$z=-1$ 为 1 阶极点

(4) $z=0$ 为可去奇点.

(5) $z=1$ 为本性奇点.

(6) $z=0$ 为 3 阶极点.

第五章 留数及其应用

◆ *重要知识点提要*

留数的定义、留数定理、留数的求法、无穷远点的留数、利用留数计算实数积分（$\int R(\cos\theta,\sin\theta)dx$、积分路径上无奇点、有奇点）

◆ *典型例题*

1. 计算下列积分的值.

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^2-1}dz$；　(2) $\oint_{|z|=n}\tan\pi z dz\,(n为整数)$；　(3) $\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{\left(1-e^z\right)^3}dz$

(4) $\oint_{|z|=4}\frac{z^{15}}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3}dz$.

解：(1) 在$|z|=2$内有两个一阶极点$z=i,z=-i$，故：

$$\mathrm{Res}\left[f(z),i\right]=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\left(\frac{1}{z+i}\right)_{z=i}=\frac{1}{2i}$$

$$\mathrm{Res}\left[f(z),-i\right]=\lim_{z\to i}(z+i)f(z)=\left(\frac{1}{z-i}\right)_{z=i}=-\frac{1}{2i}$$

由留数定理：$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^2-1}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),i\right]+2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),-i\right]=0$

(2) $\tan\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$，以$z_k=k+\frac{1}{2}(k=0,\pm1,\pm2,...)$为 1 阶极点

而$\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]=-\frac{\sin\pi z}{\pi\sin\pi z}=-\frac{1}{\pi}$，由留数定理：

$$\oint_{|z|=n}\tan\pi z dz=2\pi i\sum_{k=1,|k+\frac{1}{2}|<n}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]=2\pi i\cdot\left(-\frac{2n}{\pi}\right)=-4ni$$

(3) 在$|z|=2$内$z=0$为 1 阶极点，从而$\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to0}\frac{z^2\sin z}{\left(1-e^z\right)^3}=-1$

由留数定理，$\int_{|z|=1}\frac{z\sin z}{\left(1-e^z\right)^3}dz=2\pi i\cdot(-1)=-2\pi i$

(4) 令$\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3=0$，得奇点$z=\pm i,z=\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}(k=0,1,2,3)$共七个

如果直接计算将十分麻烦，注意到$z=\infty$也为奇点，根据定理，有：

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s\left[f(z),z_k\right]+\mathrm{Re}\,s\left[f(z),\infty\right]=0$$

下面来求 $z=\infty$ 处的留数

令 $t=\dfrac{1}{z}$，则 $z=\dfrac{1}{t}$，$\oint_{|z|=4}f(z)dz=\oint_{|z|=4}-f\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\dfrac{1}{t^2}dt$，从而有

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),\infty\right]=-\mathrm{Re}\,s\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2},0\right]$$（$z=\infty$ 转换为求 $t=0$）

（可以理解为进行倒代换后，转换成求 $z=0$ 处的留数）

$\dfrac{z^{15}}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3}\xlongequal{t=\frac{1}{z}}\dfrac{1}{t\left(t^2+1\right)^2\left(t^4+2\right)^3}$， $t=0$ 为 1 阶极点，从而

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),\infty\right]=-\lim_{t\to 0}(t-0)\frac{1}{t\left(t^2+1\right)^2\left(t^4+2\right)^3}=-1$$

故 $\oint_{|z|=4}\dfrac{z^{15}}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s\left[f(z),z_k\right]=-2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[f(z),\infty\right]=2\pi i$

注：第(2)问用到的推论：

若 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)},\varphi(z),\psi(z)$ 在 a 点解析且满足 $\psi(a)=0,\psi'(a)\neq 0$，则

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),a\right]=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

2. 计算下列积分.

(1) $I=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$, $\quad(0<\varepsilon<1)$;

(2) $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$, $\quad(0<|p|<1)$;

(3) $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta$.

解：(1) 令 $z=e^{i\theta}$，则 $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$，原式可化为：

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i\varepsilon\pi}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+\frac{2}{\varepsilon}z+1}$$

因 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+\dfrac{2}{\varepsilon}z+1}$ 的分母有两个一阶零点：

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon},z_2=\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

又因 $z_1z_2=1$ 且 $|z_1|<|z_2|$，故只有 $|z_1|<1$ 在单位圆周内，即 $f(z)$ 只有一个一阶极点 z_1，其留数为

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{1}{z_1-z_2}=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

再根据留数定理得

$$I=2\pi i\cdot\frac{1}{i\varepsilon\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

(2) 令 $z=e^{i\theta}$，则 $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$，原式可化为：$I=\dfrac{1}{i}\oint_{|z|=1}\dfrac{dz}{(z-p)(1-pz)}$

因为 $0<|p|<1$，所以在单位圆内，只有 $z=p$ 一个一阶极点，其留数为：

$$\mathrm{Res}\left[f(z),p\right]=\lim_{z\to p}(z-p)\frac{1}{(z-p)(1-pz)}=\left(\frac{1}{1-pz}\right)_{z=p}=\frac{1}{1-p^2}$$

根据留数定理：$I=\dfrac{1}{i}\cdot2\pi i\cdot\dfrac{1}{1-p^2}=\dfrac{2\pi}{1-p^2}$

(3) 令 $I'=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\left[\cos(n\theta-\sin\theta)-i\sin(n\theta-\sin\theta)\right]d\theta$，$z=e^{i\theta}$，则有：

$$I'=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cdot e^{-i(n\theta-\sin\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta-i(n\theta-\sin\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta+i\sin\theta-in\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}-in\theta}d\theta$$

亦即 $I'=\dfrac{1}{i}\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^{n+1}}dz$，可知 0 为 $n+1$ 阶极点，函数在 0 处的留数为：

$$\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]=\lim_{z\to0}\left[(z-0)^{n+1}\frac{e^z}{z^{n+1}}\right]^{(n+1)}=\frac{1}{n!}$$

从而 $I'=\dfrac{1}{i}\cdot2\pi i\cdot\dfrac{1}{n!}=\dfrac{2\pi}{n!}$，比较 I' 表达式两边的实部与虚部，可知 $I=\dfrac{2\pi}{n!}$

3. 计算下列积分.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$； (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx\left(m>0\right)$； (3) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{\left(a^2+x^2\right)^2}dx\left(a>0,m>0\right)$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx$

解：(1) 先写出被积函数的复变函数形式：$f\left(z\right)=\frac{1}{z^4+a^4}$，令 $z^4+a^4=0$，在上半平面内，$f\left(z\right)$ 有两个一阶极点 $a_k=ae^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}\left(k=0,1\right)$，两点处的留数为：

$$\mathrm{Res}\left[f\left(z\right),a_k\right]=\lim_{z\to a_k}\left(z-a_k\right)\frac{1}{z^4+a^4}=\frac{1}{4a_k^3}=-\frac{a_k}{4a^4}$$

再根据留数定理，有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}=\pi i\left(\mathrm{Res}\left[f\left(z\right),a_1\right]+\mathrm{Res}\left[f\left(z\right),a_2\right]\right)=-\pi i\frac{\left(a_1+a_2\right)}{4a^4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4a^3}$$

(2) 被积函数的类型为 $\int_0^{+\infty}f\left(x\right)\cos mxdx\left(m>0\right)$，且 $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}$ 为偶函数，满足 $\lim\limits_{z\to\infty}zf\left(z\right)=0$，故：

$$\int_0^{+\infty}f\left(x\right)\cos mxdx=\pi i\sum_{\mathrm{Im}z_k>0}\mathrm{Res}\left[f\left(z\right)e^{imz},z_k\right]$$

对于 $f\left(z\right)e^{imz}$，其在上半平面有一个 1 阶极点 $z=i$，所以

$$\mathrm{Res}\left[f\left(z\right)e^{imz},i\right]=\lim_{z\to i}\left(z-i\right)\frac{e^{imz}}{1+z^2}=\left(\frac{e^{imz}}{z+i}\right)_{z=i}=\frac{e^{-m}}{2i}$$

从而 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-m}$

(3) 被积函数的类型为 $\int_0^{+\infty}f\left(x\right)\sin mxdx\left(m>0\right)$，且 $f\left(x\right)=\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^2}$ 为奇函数，满足 $\lim\limits_{z\to\infty}zf\left(z\right)=0$，故：

$$\int_0^{+\infty}f\left(x\right)\cos mxdx=\pi\sum_{\mathrm{Im}z_k>0}\mathrm{Res}\left[f\left(z\right)e^{imz},z_k\right]$$

对于 $f\left(z\right)e^{imz}$，其在上半平面有一个 2 阶极点 $z=ai$，所以

$$\mathrm{Res}\left[f\left(z\right)e^{imz},ai\right]=\lim_{z\to ai}\left[\left(z-ai\right)^2\frac{ze^{imz}}{\left(z^2+a^2\right)^2}\right]'=\left(\frac{ze^{imz}}{\left(z+ai\right)^2}\right)'_{z=i}=\frac{me^{-am}}{4}$$

(4) 根据定理：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k>0} \mathrm{Res}\left[f(z)\mathrm{e}^{imz}, \mathrm{z}_k\right]$

令 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+10}=0$，在上半平面内，得 1 阶极点 $z=1+3i$，于是：

$$\mathrm{Res}\left[f(z)\mathrm{e}^{imz},1+3i\right]=\lim_{z\to 1+3i}\left[z-(1+3i)\right]\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}=\left(\frac{ze^{iz}}{z-(1-3i)}\right)_{z=1+3i}=\frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx=2\pi i\cdot\dfrac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}=\dfrac{\pi(1+3i)e^{-3+i}}{3}$

◆ ***习题五***

1. 计算下列积分的值.

(1) $\oint_{|z|=2}\dfrac{ze^z}{z^2-1}dz=$ ________.　　(2) $\oint_{|z|=2}\dfrac{z}{z^4-1}dz=$ ________.

(3) $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}dz=$ ________.　　(4) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{1}{z^{101}(1-z^2)}dz=$ ________.

2. 计算下列积分的值

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^3}$；　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos xdx}{(x^2+1)(x^2+9)}$；(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx\,(a>0)$

答案

1.(1) $\pi i\left(e+e^{-1}\right)$；　(2) 0;　(3) $2\pi i$；　(4) $2\pi i$

2.(1) $\dfrac{3\pi}{8}$；　(2) $\dfrac{\pi}{24e^3}\left(3e^2-1\right)$；　(3) $\dfrac{\pi}{ae^a}$

第六章　保形变换

◆ ***重要知识点提要***

单叶变换、$\arg\left[f'(z_0)\right]$与$|f'(z_0)|$的几何意义、常见的简单的保形变换、分式线性变换及其性质（保交比性）

◆ ***习题六***

1. 求下列分式线性变换在所给点的旋转角.

(1) $w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$ 在点 a 处 $(a=c+bi,b>0)$；

(2) $w=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ 在点 a 处 $(|a|<1)$.

2. 已知三对对应点，求出相应的分式线性变换表达式.

(1) $2\leftrightarrow -1, i\leftrightarrow i, -2\leftrightarrow 1$；

(2) $1\leftrightarrow\infty, i\leftrightarrow -1, -1\leftrightarrow 0$；

(3) $\infty\leftrightarrow 0, i\leftrightarrow i, 0\leftrightarrow\infty$；

(4) $\infty\leftrightarrow 0, 0\leftrightarrow 1, 1\leftrightarrow\infty$.

3. 若一光滑曲线在过 $1+i$ 处的切线与 x 轴正向的夹角是 $\dfrac{\pi}{6}$，则经过变换 $w=z^2$ 后其像曲线在 $(1+i)^2$ 处与 u 轴正向的夹角是_______.

答案：

1. (1) $\theta-\dfrac{\pi}{2}$；(2) θ

2.(1) $w=-\dfrac{iz+6}{3z+2i}$；(2) $w=\dfrac{1-i}{1+i}\dfrac{z+1}{z-1}$；　(3) $w=\dfrac{-1}{z}$　；(4) $w=\dfrac{-1}{z-1}$

3. $\dfrac{5\pi}{12}$

Part II 数学物理方程

★对高数中二阶线性微分方程知识点的一个简单回顾

1. 关于*二阶线性常系数齐次微分方程*的解的形式

$$y''+py'+qy=0\left(p,q=const\neq 0\right)$$

特征方程：$\lambda^2+p\lambda+q=0$，其特征根为λ_1,λ_2，那么：

(1) 当$\lambda_1\neq\lambda_2$且均为实数时，通解为$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$；

(2) 当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$且均为实数时，通解为$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{\lambda x}$；

(3) 当$\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm\beta i$时，通解为$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$.

2. 关于*二阶线性常系数非齐次微分方程*的解的给出

$$y''+py'+qy=f\left(x\right)\left(p,q=const\neq 0\right)$$

因为满足线性关系，满足解的叠加原理：

非齐次通解=齐次通解+非齐次特解

对于齐次方程的通解上面已给出结论，记为y，设特解为y^*. 一般根据$f\left(x\right)$的形式，相应的设出特解的形式：

(1) $f\left(x\right)=P_n\left(x\right)e^{\lambda x}$型

设特解为$y^*=x^kQ_n\left(x\right)e^{\lambda x}$

① λ不是对应的齐次方程的根，$k=0$；

② λ是对应的齐次方程的单根，$k=1$；

③ λ是对应的齐次方程的二重根，$k=2$.

(2) $f\left(x\right)=e^{\lambda x}\left[P_l\left(x\right)\cos\beta x+Q_n\left(x\right)\sin\beta x\right]$型

设特解为$y^*=x^ke^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}\left(x\right)\cos\beta x+R_m^{(2)}\left(x\right)\sin\beta x\right]\left(m=\max\left\{l,n\right\}\right)$

① $\lambda\pm\beta i$不是对应的齐次方程的根，$k=0$；

② $\lambda\pm\beta i$是对应的齐次方程的单根，$k=1$；

3. 关于*二阶线性变系数非齐次微分方程*的解的给出——常数变易法

已知二阶微分方程：$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)\left(P(x),\mathrm{Q}(x)\neq 0\right)$

设其对应的齐次方程具有 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 形式的通解，采用常数变易法，

将 $C_1\to C_1(x),C_2\to C_2(x)$，得非齐次方程的一个特解形式为：

$$y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

于是 $\left(y^*\right)'=C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)$

继续求导会使项数增多，为了简化处理，令 $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$

从而 $\left(y^*\right)''=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)$

代入原方程整理后可得：

$$C_1(x)\left[y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+y_1(x)\right]+C_2(x)\left[y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+y_2(x)\right]+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)$$

因为 $y_1(x),y_2(x)$ 满足对应的齐次方程，所以，最后的约束方程组为：

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0\\C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

从而解得 $C_1'(t)=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ f(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}=\dfrac{-y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)}$

$$C_2'(t)=-\frac{C_1'(x)y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)}$$

再通过积分，结合相关初始条件，可以确定 $C_1(x),C_2(x)$

4. 二阶线性偏微分方程的一般形式

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0$$

(1) 特征方程：$a_{11}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\dfrac{dy}{dx}+a_{22}=0$

(2) 判别式：$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\begin{cases} <0, 双曲型方程 \\ =0, 抛物型方程 \\ >0, 椭圆形方程 \end{cases}$

两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{14.15}$$

其中 a_{ij}, a, b, c, f 为 x, y 在某一区域 D 上的实函数，它们的光滑性，假定应有尽有，a_{ij}不全为 0. 方程中含二阶导数的部分称为方程的主部. 我们的目的是通过自变量的变换简化方程的主部，且用方程在此种变换下的不变性质对方程进行分类.

作自变量的变换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \tag{14.16}$$

要求此变换可逆，即雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

此时存在逆变换

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$$

函数 $u(x, y)$ 经过自变量的变换变为 ξ, η 的函数，为简单起见，仍记为 $u(\xi, \eta)$. 由复合函数的求导法则可得

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy},$$

将这些关系式代入方程(14.15),得到二阶线性方程

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+Au_\xi+Bu_\eta+Cu=F, \tag{14.17}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_{11}&=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\
A_{12}&=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\
A_{22}&=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,\\
A&=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+a\xi_x+b\xi_y,\\
B&=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+a\eta_x+b\eta_y,\\
C&=c,\\
F&=f.
\end{aligned}$$

为了化简(14.17)式,设法选择变换(14.16)使形式上相同的 A_{11} 或 A_{22} 为0. 为此,只需找到一阶偏微分方程

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0 \tag{14.18}$$

的两个函数无关解 $\varphi=\varphi_1(x,y)$ 及 $\varphi=\varphi_2(x,y)$,然后取

$$\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,y),\\ \eta=\varphi_2(x,y)\end{cases}$$

即可. 而此一阶偏微分方程的求解问题可以转化为求常微分方程

$$a_{11}(\mathrm{d}y)^2-2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+a_{22}(\mathrm{d}x)^2=0 \tag{14.19}$$

在(x,y)平面上的积分曲线问题.

设 $\varphi_1(x,y)=C$ 是方程(14.19)的一族积分曲线,则 $z=\varphi_1(x,y)$ 就是方程(14.18)的解.

称方程(14.19)的积分曲线为方程(14.15)的**特征线**. 方程(14.19)有时也称为方程(14.15)的**特征方程**.

特征方程(14.19)可分为两个方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}},$$

一、一维波动方程的初边值问题

1. 类型一：无外力，齐次边界条件下的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(0,t)=0,u(l,t)=0 \qquad\qquad (0\le x\le l,t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

由物理中波函数的表达式 $y=ae^{-i(x-\omega t)}=ae^{-ix}\cdot e^{\omega t}$，

设一维波动方程的解的形式为：

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入原方程，有 $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}$，关于不同的自变量的微分相等，只能为常数，令 $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$，结合初始条件，得到方程

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,X(l)=0 \end{cases}$$

上述方程中 λ 称为特征值，求解特征值和特征函数的问题称为特征值问题，我们需要找到这个常微分方程的非平凡解.

上述方程的特征方程：$\sigma^2+\lambda=0$

① 当 $\lambda<0$ 时，$\sigma=\pm\sqrt{-\lambda}$，于是通解为 $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$，代入边值条件，$\begin{cases} X(0)=C_1+C_2=0 \\ X(l)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$，由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix}\ne0$，知 $C_1=C_2=0$，方程只有平凡解，不满足我们的要求；

② 当 $\lambda=0$ 时，$\sigma=0$，于是通解为 $X(x)=C_1+C_2x$，易求 $C_1=C_2=0$，方程也只有平凡解；

③ 当 $\lambda>0$ 时，$\sigma=\pm\sqrt{\lambda}i$，于是通解为 $X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$，代入初始条件，解得 $C_1=0,C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$，因为 $X(x)\ne0$，所以应该有

$C_2 \neq 0, \sin\sqrt{\lambda}l = 0$，于是$\sqrt{\lambda}l = k\pi \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)(k = 1,2,3,\ldots)$，相应的特征函数为：$X_k(x) = D_k \sin\sqrt{\lambda}x = D_k \sin\frac{k\pi}{l}x$

对于每一个特征值λ_k，对应$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0$

其解为：$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l}t$

从而$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(A_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$

于是$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$

在由初始条件：

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k \frac{k\pi a}{l}\right)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases}$$

利用三角函数系的正交性，解得系数分别为：

$$\begin{cases} A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \\ B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \end{cases}$$

▲ 这类初值问题的特征解与特征函数为：

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \qquad (k = 1,2,\ldots) \\ X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0 \\ \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \qquad (k = 1,2,\ldots) \\ X_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(0,t)=0, u(l,t)=0 \\ \lambda_k=\left(\dfrac{k+\frac{1}{2}}{l}\pi\right)^2 \qquad (k=0,1,2,\dots) \\ X_k(x)=\cos\dfrac{k+\frac{1}{2}}{l}\pi x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=0, u_x(l,t)=0 \\ \lambda_k=\left(\dfrac{k+\frac{1}{2}}{l}\pi\right)^2 \qquad (k=0,1,2,\dots) \\ X_k(x)=\sin\dfrac{k+\frac{1}{2}}{l}\pi x \end{cases}$$

2. 类型二：仅有外力作用，初边值条件均为 0

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \\ u(0,t)=0, u(l,t)=0 \quad (0\le x\le l, t>0) \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

采用齐次化原理，引入如下方程：

$$\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx} \\ \omega(0,t)=0, \omega(l,t)=0 \qquad (0\le x\le l, t>\tau) \\ \omega(x,\tau)=0, \omega_t(x,\tau)=f(x,\tau) \end{cases}$$

再令 $t'=t-\tau$，则上述方程变为：

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{tt}=a^2\bar{\omega}_{xx} \\ \bar{\omega}(0,t')=0, \bar{\omega}(l,t')=0 \qquad (0\le x\le l, t'>0) \\ \bar{\omega}(x,0)=0, \bar{\omega}_t(x,0)=f(x,0) \end{cases}$$

这样，这个方程就变成类型一，直接套用公式，得：

$$\bar{\omega}(x,t')=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t'\sin\frac{k\pi x}{l}; \quad B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l f(x,0)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

从而 $\omega(x,t;\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin\dfrac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\dfrac{k\pi x}{l}$

于是方程的解为：$u(x,t)=\int_0^t\omega(x,t;\tau)d\tau$

3. 类型三：无外力的非齐次边界条件

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(0,t)=\mu_1(t),u(l,t)=\mu_2(t)(0\le x\le l,t>0) \\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

采用构造法——构造齐次边界条件

令 $v(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$，使得 $v(0,t)=\mu_1(t),v(l,t)=\mu_2(t)$，

再令 $\omega=u-v$，有则上述方程可化为：

$$\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx}-\mu_1''(t)-\frac{x}{l}\left[\mu_2''(t)-\mu_1''(t)\right] \\ \omega(0,t)=0,\omega(l,t)=0 \\ \omega(x,0)=-\mu_1(0)-\frac{x}{l}\left[\mu_2(0)-\mu_1(0)\right] \\ \omega_t(x,0)=-\mu_1'(0)-\frac{x}{l}\left[\mu_2'(0)-\mu_1'(0)\right] \end{cases}\quad(0\le x\le l,t>0)$$

可转换为类型一和二当中的形式继续求解（上述公式不需要死记硬背，了解这种替换的方法，到时候结合具体方程求解）

4. 类型四：外力作用下的齐次边界条件

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \\ u(0,t)=0,u(l,t)=0 \qquad (0\le x\le l,t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

对于这类问题，有两种思路：第一种，采用解的叠加原理，把上述方程拆分为无外力齐次边界条件得初值问题和仅有外力作用的齐次边界条件初值问题；第二种，采用常数变易法求解的二阶线性非齐次方程，下面介绍第二种方法.

上述方程解的形式为 $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$

且 $f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}\left(f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right)$，上述方程可化为：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

亦即 $T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t)=f_k(t)(*)$

$(*)$ 对应的齐次方程对应的通解为 $T_k(t)=A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t$

采用常数变易法，有 $T_k(t)=A_k(t)\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k(t)\sin\frac{k\pi a}{l}t$

其中 $A_k(t),B_k(t)$ 由以下方程组确定：

$$\begin{cases}A_k'(t)y_1+B_k'(t)y_2=0\\A_k'(t)y_1'+B_k'(t)y_2'=f_k(t)\end{cases}\left(y_1=\cos\frac{k\pi a}{l}t,y_2=\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)$$

解得 $A_k'(t)=-\frac{l}{k\pi a}f_k(t)\sin\frac{k\pi a}{l}t,B_k'(t)=\frac{l}{k\pi a}f_k(t)\cos\frac{k\pi a}{l}t$

于是 $\begin{cases}A_k(t)=-\frac{l}{k\pi a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}\tau d\tau+C_1\\B_k(t)=\frac{l}{k\pi a}\int_0^t f_k(\tau)\cos\frac{k\pi a}{l}\tau d\tau+C_2\end{cases}$，代入原方程中，得 $T_n(t)$ 为：

$$T_n(t)=C_1\cos\frac{k\pi a}{l}t+C_2\sin\frac{k\pi a}{l}t+\frac{l}{k\pi a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)d\tau$$

再由初始条件：

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}\\u_t(x,0)=\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(0)\sin\frac{k\pi x}{l}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}T_k(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\\T_k'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\end{cases}$$

而 $T_k(0)=C_1,T_k'(0)=C_2\frac{k\pi a}{l}$，令 $T_k(0)=a_k,T_k'(0)=b_k$，则 $C_1=a_k,C_2=\frac{b_kl}{k\pi a}$

于是，原方程的解为：

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+\frac{b_kl}{k\pi a}\sin\frac{k\pi a}{l}t+\frac{l}{k\pi a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)d\tau\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

5. 无界弦振动初值问题——达朗贝尔解（行波法）

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(x,0)=\varphi(x) & (-\infty<x<+\infty,t>0) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

做变量替换：$\begin{cases}\xi=x+at\\ \eta=x-at\end{cases}$，原方程可化为：$u_{\xi\eta}=0$，分别对$\xi,\eta$求积分，可以得到方程解的一般形式：$u(x,t)=F(x-at)+G(x+at)$，结合初始条件，有：

$$\begin{cases} u(x,0)=F(x)+G(x)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=-aF'(x)+aG'(x)=\psi(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)+G(x)=\varphi(x) \\ F(x)-G(x)=-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(x)dx-c \end{cases}$$

从而解得$\begin{cases} F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{2}-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi-\dfrac{c}{2} \\ G(x)=\dfrac{\varphi(x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+\dfrac{c}{2} \end{cases}$，将相应的$x$换成$x-at,x+at$，得：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

▲ 需要注意的是，$F(x-at),G(x+at)$本身也满足波动方程，此外，它们的一阶偏导数还满足$F_t+aF_x=0,G_t-aG_x=0$

▲ 由解的形式可以知道，$\varphi(x),\psi(x)$应该满足：$\varphi(x)\in C^2,\psi(x)\in C^1$

▲ 无界受迫振动的解为：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau$$

6. 半无界弦自由振动的初值问题——延拓法

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(x,0)=\varphi(x),u_x(x,0)=\psi(x) & (0<x<+\infty,t>0) \\ u(0,t)=0(\text{固定}) \end{cases}$$

把问题延拓到$(-\infty,+\infty)$上，考虑如下的定解问题：

$$\begin{cases} U_{tt}(x,t)=a^2U_{xx}(x,t) \\ U(x,0)=\Phi(x),U_x(x,0)=\Psi(x) \end{cases} \quad (-\infty<x<+\infty,t>0)$$

该问题的达朗贝尔解为：

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi$$

此时 $\Phi(x)$、$\Psi(x)$均为分段函数，在$(0,+\infty)$上，$\Phi(x)=\varphi(x),\Psi(x)=\psi(x)$，$U(x,t)$实际上就是$u(x,\mathrm{t})$；下面需要找到在$(-\infty,0)$上$\Phi(x),\Psi(x)$的表达式.

考虑在端点处（$x=0$处）$u(0,t)=0$，那么当$\Phi(x),\Psi(x)$均为奇函数时，可以使$U(0,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(-at)+\Phi(at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(\xi)d\xi=0$，于是：

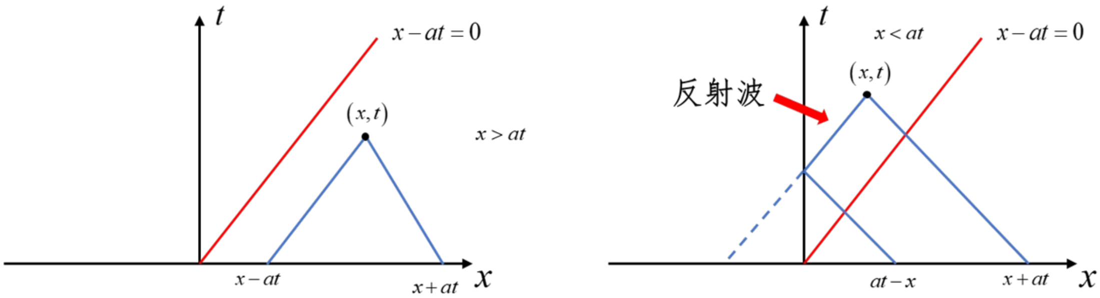
$$\Phi=\begin{cases}\varphi(x),x\geq 0\\ -\varphi(-x),x<0\end{cases},\Psi=\begin{cases}\psi(x),x\geq 0\\ -\psi(-x),x<0\end{cases}$$

下面来求解$u(x,t)$——对于$U(x,t)$的解在$(0,+\infty)$上讨论

$x>at$时，$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$，此即为达朗贝尔解；

$x<at$时，$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)-\varphi(at-x)\right]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

通过图像来理解这个分段解：



图片制作：蒋斌

◆ *典型例题*

1. 求解混合问题：$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\\ u(0,t)=E,u(l,t)=0\quad(0<x<l,t>0).\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0\end{cases}$

解：本题为非齐次边界条件，先构造齐次边界条件：

令 $v(x,t)=E+\frac{x}{l}(0-E)=E\left(1-\frac{x}{l}\right)$， $w=u-v$， 上述方程可化为：

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx} \\ w(0,t)=0,w(l,t)=0 \qquad\qquad (0<x<l,t>0) \\ w(x,0)=E\left(1-\frac{x}{l}\right),w_t(x,0)=0 \end{cases}$$

于是，方程的特征值与特征函数为： $\begin{cases} \lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \\ X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l} \end{cases} (k=1,2,...)$

方程的解为： $w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$

将初始条件代入，有： $w_t(x.0)=0$，所以 $B_k=0$

而 $w(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}=E\left(1-\frac{x}{l}\right)$， 故 $A_k=\frac{2}{l}\int_0^l E\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{2E}{n\pi}$

于是 $w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2E}{n\pi}\cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi x}{l}$

从而原方程的解为： $u(x,t)=E\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2E}{n\pi}\cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi x}{l}$

2. 求下列阻尼波动问题的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-2hu_t \\ u(0,t)=0,u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases} \left(0<x<l,t>0,h=const\,\&\,h<\frac{\pi a}{2l}\right)$$

解：设原方程的解的形式为 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入原方程有：

$$\frac{T''(t)+2hT'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

根据边界条件， $\begin{cases} u(0,t)=X(0)T(t)\Rightarrow X(0)=0 \\ u_x(l,t)=X_x(l)T(t)\Rightarrow X'(l)=0 \end{cases}$， 从而 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,X'(l)=0 \end{cases}$

该特征问题的特征值与特征函数为：

$$\begin{cases} \lambda_k = \left(\dfrac{2k-1}{2l}\pi\right)^2 \\ X_k(x) = \sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l} \end{cases} (k = 0,1,2,\dots)$$

而 $T_k''(t) + 2hT_k'(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0$，这是一个二阶常系数齐次微分方程

其特征方程为 $\mu^2 + 2h\mu + \left(\dfrac{2k-1}{2l}\pi a\right)^2 = 0$，由求根公式，解得

$$\mu_k = -h \pm \sqrt{h^2 - \left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2}$$

由已知条件 $h < \dfrac{\pi a}{2l} < \dfrac{(2k-1)\pi a}{2l}$，故 $\mu_k = -h \pm \sqrt{\left(\dfrac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2 - h^2} i$

令 $\beta_k = \sqrt{\left(\dfrac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2 - h^2}$，可得 $T_k(t)$ 的解为：

$$T_k(t) = e^{-ht}\left(A_k \cos\beta_k t + B_k \sin\beta_k t\right)$$

故原混合问题的解函数为：

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ht}\left(A_k \cos\beta_k t + B_k \sin\beta_k t\right)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$$

根据初始条件，有：

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l} = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-hA_k + \beta_k B_k)\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l} = \psi(x) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(\xi)\sin\dfrac{(2k-1)\pi\xi}{2l}d\xi \\ B_k = \dfrac{1}{\beta_k}\left[\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(\xi)\sin\dfrac{(2k-1)\pi\xi}{2l}d\xi + hA_k\right] \end{cases}$$

故原方程的解为：$u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-ht}\left(A_k \cos\beta_k t + B_k \sin\beta_k t\right)\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}$

其中 A_k, B_k, β_k 均已给出

3. 求解下列混合问题.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin\dfrac{2\pi x}{l} \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 2\sin\dfrac{3\pi x}{l}, u_t(x,0) = \sin\dfrac{2\pi x}{l} \end{cases} \quad (0 < x < l, t > 0)$$

解: 做函数变换 $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$，其中 $w(x)$ 为待定函数，则上述方程化为:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + w''(x) + \sin\frac{2\pi x}{l}$$

令 $w''(x) + \sin\dfrac{2\pi x}{l} = 0$，解得 $w(x) = \left(\dfrac{l}{2\pi a}\right)^2 \sin\dfrac{2\pi x}{l}$，从而原混合问题转化为:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(0,t) = 0, v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 2\sin\dfrac{3\pi x}{l} - \left(\dfrac{l}{2\pi a}\right)^2 \sin\dfrac{2\pi x}{l} \quad (0 < x < l, t > 0) \\ v_t(x,0) = \sin\dfrac{2\pi x}{l} \end{cases}$$

其特征解和特征函数为: $\begin{cases} \lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2 \\ X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi}{l}x \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

设其解的形式为 $v(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\dfrac{k\pi a}{l}t + B_k \sin\dfrac{k\pi a}{l}t \right) \sin\dfrac{k\pi}{l}x$

由初始条件:

$$\begin{cases} v(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin\dfrac{k\pi}{l}x = 2\sin\dfrac{3\pi x}{l} - \left(\dfrac{l}{2\pi a}\right)^2 \sin\dfrac{2\pi x}{l} \\ v_t(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k\pi a}{l} B_k \sin\dfrac{k\pi}{l}x = \sin\dfrac{2\pi x}{l} \end{cases}$$

解得 $A_2 = -\left(\dfrac{l}{2\pi a}\right)^2, A_3 = 2; B_2 = \dfrac{l}{2\pi a}$

所以 $v(x,t)=\left(-\left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2\cos\frac{2\pi a}{l}t+\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi a}{l}t\right)\sin\frac{2\pi x}{l}+2\cos\frac{3\pi a}{l}t\sin\frac{3\pi x}{l}$

从而 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$

注：构造法的巧妙应用

4. 求解混合问题.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-\dfrac{\omega^2 x}{l}\sin\omega t \\ u(0,t)=\omega t, u(l,t)=\sin\omega t \quad (0<x<l,t>0,\omega=const) \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\omega \end{cases}$$

解：本题的边界条件为非齐次，先将边界进行齐次化，令：

$$u(x,t)=v(x,t)+\left(\frac{x}{l}(\sin\omega t-\omega t)+\omega t\right)$$

原混合问题可化为：

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} \\ v(0,t)=0, v(l,t)=0 \quad (0<x<l,t>0) \\ v(x,0)=0, v_t(x,0)=0 \end{cases}$$

易知此方程的解为 $v(x,t)=0$，所以 $u(x,t)=\frac{x}{l}(\sin\omega t-\omega t)+\omega t$

5. 求解初值问题.

$$\begin{cases} u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}=0,(x,y)\in R^2 \\ u(x,0)=5x^2, u_y(x,0)=0 \end{cases}$$

解：泛定方程的特征方程的为：$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4\frac{dy}{dx}-5=0$

故其特征线满足方程 $\frac{dx}{dt}=-1,\frac{dx}{dt}=5$，特征线为 $x+y=c_1, 5x-y=c_2$

做变换 $\begin{cases}\xi=5x-y\\ \eta=x+y\end{cases}$，原方程可化为 $u_{\xi\eta}=0$，从而方程的通解为：

$$u(x,t)=F(5x-y)+G(x+y)$$

由初始条件：$\begin{cases}F(5x)+G(x)=5x^2\\-F'(5x)+G'(x)=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}F(5x)=\dfrac{25}{6}x^2-\dfrac{5}{6}C\\G(x)=\dfrac{5}{6}x^2+\dfrac{5}{6}C\end{cases}$

于是原方程的解为：$u(x,y)=\frac{1}{6}(5x-y)^2+\frac{5}{6}(x+y)^2=5x^2+y^2$

6. 求初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+\frac{1}{2}(x-t)\\u(x,0)=\sin x,u_t(x,0)=1-\cos x(0<x<+\infty,t>0)\\u(0,t)=0\end{cases}$$

解：把 $\varphi(x)=\sin x,\psi(x)=1-\cos x,f(x,t)=\frac{1}{2}(x-t)$ 关于 x 奇延拓到 $(-\infty,0)$，有：

$$\Phi(x)=\sin x,\Psi(x)=\begin{cases}1-\cos x,x\ge 0\\\cos x-1,x<0\end{cases},F(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-t),x\ge 0,t>0\\\frac{1}{2}(x+t),x<0,t>0\end{cases}$$

根据达朗贝尔公式，新定解问题的解为：

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(s,\tau)dsd\tau$$

限制在 $(0,+\infty)$ 上，可得到原定解问题的解为：

$$\begin{cases}u(x,t)=\sin x\cos at+t-\frac{1}{a}\sin at\cos x+\frac{1}{4}xt^2-\frac{1}{12}t^3,x-at\ge 0\\u(x,t)=\left(1-\frac{1}{a}\right)\sin x\cos at+\frac{x}{a}-\frac{1}{12a^3}\left(x^3-3ax^2t+3a^2xt^2-3a^3xt^2\right),x-at<0\end{cases}$$

7. 求初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}+5\\u(x,0)=\sin x,u_t(x,0)=2x\end{cases}(-\infty<x<+\infty,t>0)$$

解： $a=1, f(x,\mathrm{t})=-5, \varphi(x)=\sin x, \psi(x)=2x$

由公式：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau$$

可得该初值问题的解为：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}2\xi d\xi-\frac{1}{2}\int_0^y\int_{x-y+\tau}^{x+y-\tau}5dsd\tau\\&=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]+2xy-\frac{5}{2}y^2\end{aligned}$$

5. 牛刀小试

1. 求混合问题的解.

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+g(const)\\u(0,t)=0,u_x(l,t)=0\quad(0<x<l,t>0)\\u(x,0)=0,u_t(x,0)=0\end{cases}$$

答案：$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16gl}{(2k-1)^3\pi^3a^2}\left(1-\cos\frac{(2k-1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$

2. 求解初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=4u_{xx}+e^x-e^{-x}\\u(x,0)=x,u_t(x,0)=\sin x\end{cases}(-\infty<x<+\infty,t>0)$$

答案：$u(x,t)=x+\frac{1}{2}\sin x\sin 2t-\frac{1}{2}\sinh x+\frac{1}{2}\sinh x\cosh 2t$

二、一维热传导问题的初边值问题

推导用到的定理：散度定理 $\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dV = \int_{\partial\Omega} u \cdot \vec{n} dS$

热传导问题的一般形式：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \quad (0 < x < l, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

这样，我们同一维波动方程一样，利用线性叠加原理，把它拆成三个问题：

$$(\mathrm{I})\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (\mathrm{II})\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \quad (\mathrm{III})\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

对于初边值问题(II)，采用齐次化原理；对于初边值问题(III)，采用构造齐次边界的方法，主要解决的问题是初边值问题(I).

1. 类型一：无热源的齐次边界初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

同一维波动方程一样，设一维热传导方程的解的形式为：

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

代入原方程，有 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{a^2 T(t)}$，关于不同的自变量的微分相等，只能为常数，令 $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$，结合初始条件，得到方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

于是特征值与特征函数为：$\begin{cases} \lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{l}\right) \\ X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi}{l} x \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

对于每一个特征值 λ_k，对应 $T_k'(t)+\lambda_k a^2 T_k(t)=T_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t)=0$

其解为：$T_k(t)=A_k e^{-\lambda_k a^2 t}=A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}$

于是混合问题的解为：$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}$

根据初始条件，$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}=\varphi(x)$，得 $A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$

2. 无热源、无限长热传导问题（傅里叶积分法）

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\\u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}(-\infty<x<+\infty,t>0)$$

▲ 傅里叶积分

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且在有限区间 $[-l,l]$ 上分段光滑，则 $f(x)$ 可以展开成傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中，$\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi(n=0,1,2,\ldots)\\b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi(n=1,2,3,\ldots)\end{cases}$，将其代入上述展开式中得到：

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi(\xi-x)}{l}d\xi(*)$$

现在设 $f(x)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=$ 有限值

对(*)式取极限，有 $f(x)=\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi(\xi-x)}{l}d\xi$

令 $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$，则 $\Delta\lambda_n=\frac{\pi}{l}$，于是上式可化为：

$$f(x)=\lim_{\Delta\lambda_n\to 0}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_n\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\lambda_n(\xi-x)d\xi$$

即 $f(x)\in\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi$，写成复数形式，有：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(\xi-x)}d\xi$$

令 $C(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$（傅里叶积分系数），则 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$

设一维热传导方程的解的形式为：

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

于是 $X''(x)+\lambda X(x)=0$，方程的特征方程：$\sigma^2+\lambda=0$

① 当 $\lambda<0$ 时，$\sigma=\pm\sqrt{-\lambda}$，于是通解为 $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$，当 $x\to\infty$ 时，有杆越长，温度越高的结论，显然这不可能；

② 当 $\lambda=0$ 时，$\sigma=0$，于是通解为 $X(x)=C_1+C_2x$，情况同上；

③ 当 $\lambda>0$ 时，$\sigma=\pm\sqrt{\lambda}i$，于是通解为：$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$，

写成复数形式，有 $X(x)=C_1e^{i\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-i\sqrt{\lambda}x}$

令 $\lambda=\mu^2(-\infty<\mu<+\infty)$，则 $X(x)=Ce^{i\mu x}$

于是特征值和特征函数为：$\begin{cases}\lambda_\mu=\mu^2\\X_\mu(x)=e^{i\mu x}\end{cases}$，易求 $T_\mu(t)=A_\mu e^{\lambda_\mu a^2t}=A_\mu e^{\mu^2a^2t}$

从而 $u_\mu(x,t)=X_\mu(x)T_\mu(t)=A_\mu e^{\mu^2a^2t}\cdot e^{i\mu x}$

所以 $u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_\mu(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A_\mu e^{\mu^2a^2t}\cdot e^{i\mu x}d\mu$

根据初始条件 $u(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}A_\mu e^{i\mu x}=\varphi(x)\Rightarrow A_\mu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-i\mu\xi}d\xi$，故：

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\mu\xi}d\xi\cdot e^{\mu^2a^2t}\cdot e^{i\mu x}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\mu\xi}\cdot e^{\mu^2a^2t}\cdot e^{i\mu x}d\mu$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\mu\xi+\mu^2a^2t+i\mu x}d\mu$$
$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2t\left[\mu-\frac{i(x-\xi)}{2a^2t}\right]^2}d\mu$$

令上述的 $a^2t\left[\mu-\frac{i(x-\xi)}{2a^2t}\right]^2=y^2\Leftrightarrow y=a\sqrt{t}\left[\mu-\frac{i(x-\xi)}{2a^2t}\right]$，则 $dy=a\sqrt{t}d\mu$

上式可继续化简为：

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\pi\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以方程的最终解为：

$$u(x,t)=\frac{1}{4a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi$$

◆ ***典型例题***

1. 求解混合问题 $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\\u(0,t)=0,u_x(0,t)=0(0<x<l,t>0)\\u(x,0)=u_0(const)\end{cases}$.

解： 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$，原方程可化为：$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$

于是特征值与特征函数可写为：$\lambda_k=\left(\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right)^2,X(x)=\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$

由 $T_k'(t)+\left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2T_k(t)=0$ 得 $T_k(t)=A_ke^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2t}$

故解的形式为：$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2t}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$

根据初始条件：$u(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}=u_0$

从而解得 $A_k=\frac{2}{l}\int_0^l u_0\sin\frac{(2k-1)\pi\xi}{2l}d\xi=\frac{4u_0}{(2k-1)\pi}(k=0,1,2,\ldots)$

故方程的解为$u(x,t)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)}e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$

2. 求解混合问题$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}\\ u(0,t)=\mu_1,u(0,t)=\mu_2\,(0<x<l,t>0)\lambda,\mu,u_0\text{均为常数}.\\ u(x,0)=u_0\end{cases}$

解： 先构造齐次化边界，令$v(x,t)=u(x,t)-\left(\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{l}x\right)$，则原混合问题可

化为：

$$\begin{cases}v_t=a^2v_{xx}\\ v(0,t)=0,v(0,t)=0 & (0<x<l,t>0)\\ v(x,0)=u_0-\left(\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{l}x\right)\end{cases}$$

令$v(x,t)=X(x)T(t)$，原方程可化为：$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$

于是特征值与特征函数可写为：$\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,X(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}$

由$T_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2T_k(t)=0$得$T_k(t)=A_ke^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{2l}\right)^2 t}$

故解的形式为：$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}$

根据初始条件：$v(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}=u_0-\left(\mu_1+\frac{\mu_2-\mu_1}{l}x\right)$

从而解得

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \left[u_0 - \left(\mu_1 + \frac{\mu_2-\mu_1}{l}x\right)\right]\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi = \frac{2}{k\pi}\left[(u_0-\mu_1)+(-1)^k(\mu_2-u_0)\right]$$

故方程的解为

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left[(u_0-\mu_1)+(-1)^k(\mu_2-u_0)\right]e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

从而原方程的解为：$u(x,t) = v(x,t) + \left(\mu_1 + \frac{\mu_2-\mu_1}{l}x\right)$

6. 牛刀小试

1. 求下列初值问题的解.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,\mathrm{t}) = 0, u_x(l,t) = 0 \quad (0<x<l, t>0) \\ u(x,0) = \frac{A}{l}x \end{cases}$$

答案：$u(x,t) = \frac{2A^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \frac{8A}{(2k+1)^2\pi^2}e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$

2. 一根细杆长为l，两端温度保持为零度，初始温度分布为$u|_{t=0} = \frac{bx(l-x)}{l^2}$，

求杆上的温度分布情况.

答案：$u(x,t) = \frac{8b}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x$

(如果将条件改为杆的两段是绝热的，结果如何?)

三、（二维）调和方程

解题方法：分离变量法

➢ **矩形区域**

1. 求解$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u(0,y)=0,u(a,y)=0 \\ u(x,0)=x(x-a),\lim\limits_{y\to\infty}u(x,y)=0 \end{cases} \qquad (0<x<a,y>0)$

解： 令$u(x,y)=X(x)Y(y)$，原方程可化为：$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$

令$\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda \Rightarrow X''(x)+\lambda X(x)=0, Y''(x)-\lambda Y(x)=0$

由$u(0,y)=0,u(a,y)=0$，得$X(0)=X(a)=0$，则关于$X(x)$的方程为：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,X(a)=0 \end{cases}$$

其特征值与特征函数为：$\lambda_k=\left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2, X(x)=\sin\dfrac{k\pi x}{a}$

对于$Y''(x)-\lambda_k Y(x)=0$，其特征方程为$\sigma^2-\lambda_k=0$，$\Delta=4\lambda_k>0$

所以可以求得$Y_k(y)=A_k e^{\frac{k\pi}{a}y}+B_k e^{-\frac{k\pi}{a}y}$

所以$u(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}X_k(x)Y_k(y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi}{a}y}+B_k e^{-\frac{k\pi}{a}y}\right)\sin\dfrac{k\pi x}{a}$

由条件$\lim\limits_{y\to\infty}u(x,y)=0$，可得$A_k=0$，即$u(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}B_k e^{-\frac{k\pi}{a}y}\sin\dfrac{k\pi x}{a}$

再根据$u(x,0)=x(x-a)$，得$u(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}B_k\sin\dfrac{k\pi x}{a}=x(x-a)$

解得$B_k=\dfrac{2}{a}\int_0^a x(x-a)\sin\dfrac{k\pi\xi}{l}d\xi=\dfrac{4a^2}{k^3\pi^3}\left((-1)^k-1\right)$

故$u(x,y)=\dfrac{4a^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^3}\left((-1)^k-1\right)e^{-\frac{k\pi}{a}y}\sin\dfrac{k\pi x}{a}$

◆ ***牛刀小试***

1. 求解 $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u(0,y)=0,u(a,y)=0 \\ u(x,0)=A\left(1-\dfrac{x}{l}\right),\lim\limits_{y\to\infty}u(x,y)=0 \end{cases}$ $(0<x<l,y>0,A=const)$.

答案：$u(x,y)=\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}e^{-\frac{k\pi y}{a}}\sin\dfrac{k\pi x}{l}$

2. 求解 $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u(0,y)=A,u(a,y)=Ay(0<x<a,0<y<b,A=const). \\ u_y(x,0)=0,u_y(x,b)=0 \end{cases}$

答案：$u(x,y)=A+\dfrac{A}{2}\left(\dfrac{b}{2}-1\right)x-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{4Ab\sinh\dfrac{(2k+1)\pi x}{b}}{\pi^2(2k+1)^2\sinh\dfrac{(2k+1)\pi a}{b}}\cos\dfrac{(2k+1)\pi y}{b}$

➢ **圆形区域**

1. 求解 $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u|_{\partial\Omega}=f \end{cases}\left((x,y)\in\Omega\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<l^2\}\right)$.

解：利用 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，将边值问题转化为极坐标系下的情形

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_{r\theta}+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \\ u(l,\theta)=f(\theta) \end{cases}(0<r<l,0<\theta<2\pi)$$

$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，原方程可化为：

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\lambda$$

所以 $\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0$，且 $\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi)$，其特征值与特征函数为：

$$\begin{cases} \lambda_k=k^2 \\ \Theta(\theta)=a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta \end{cases}(k=0,1,2,\ldots)$$

对于 $r^2R_k''(r)+rR_k'(r)+\lambda_kR_k(r)=0$，其解为：$R_k(r)\begin{cases} c_0,k=0 \\ c_kr^k,k=1,2,3,\ldots \end{cases}$

令 $A_k = a_k c_k, B_k = b_k c_k, \frac{A_0}{2} = a_0 c_0$，可得方程的解为：

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) r^k$$

由边值条件 $u(l,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) l^k = f(\theta)$，可得系数：

$$A_k = \frac{1}{\pi l^k} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi, B_k = \frac{1}{\pi l^k} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin k\xi d\xi$$

◆ ***牛刀小试***

1. 求解狄利克雷问题 $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_{r\theta} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \\ u(1,\theta) = A\cos\theta \end{cases} (0 < r < 1, -\pi \le \theta \le \pi, A = const)$.

答案：$u(r,\theta) = Ar\cos\theta$

2. 求定解问题 $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_{r\theta} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \\ u(r,0) = 0, u(r,\alpha) = 0 (0 < r < l, 0 \le \theta \le \alpha, \alpha < 2\pi) \\ u(l,\theta) = f(\theta) \end{cases}$.

答案：$u(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi\theta}{\alpha} r^{\frac{k\pi}{\alpha}}, a_k = \frac{2}{\alpha l^k} \int_0^{\alpha} f(\xi) \sin\frac{k\pi\xi}{\alpha} d\xi$

四、Fourier 变换

重点掌握：定义与性质及其简单应用

➢ 定义

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对可积，称 $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$ 为傅里叶变换，记为 $\mathcal{F}[f(x)]$，称 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$ 为傅里叶逆变换，记为 $\mathcal{F}^{-1}[g(\lambda)]$. 其中称 $f(x)$ 为原像，$\mathcal{F}[f(x)]$ 为 $f(x)$ 的像.

➢ 重要性质（以下所给函数傅里叶变换均存在）

(1) **(线性性质)** $\forall\alpha,\beta\in const,\mathcal{F}\left[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\right]=\alpha\mathcal{F}\left[f_1(x)\right]+\beta\mathcal{F}\left[f_2(x)\right]$

(2) **(卷积性质)** $\mathcal{F}\left[f_1(x)*f_2(x)\right]=\mathcal{F}\left[f_1(x)\right]\cdot\mathcal{F}\left[f_2(x)\right]$

(3) **(乘积性质)** $\mathcal{F}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[f_1(x)\right]*\mathcal{F}\left[f_2(x)\right]$

(4) **(延迟性质)** $\mathcal{F}\left[f(x-x_0)\right]=\mathcal{F}\left[f(x)\right]e^{-i\lambda x_0}$

(5) **(导数性质)** $\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right]=(i\lambda)^n\mathcal{F}\left[f(x)\right]$，$\mathcal{F}\left[x^n f(x)\right]=i^n\dfrac{d\mathcal{F}\left[f(x)\right]}{dx}$

1. 求 $f(x)=e^{-x^2}$ 的傅里叶变换.

解：按定义，有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(x)\right]&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}e^{-i\lambda\xi}d\xi=\frac{1}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}de^{-i\lambda\xi}\\&=\frac{1}{i\lambda}e^{-\xi^2}e^{-i\lambda\xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{2}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2}e^{-i\lambda\xi}d\xi\\&=-\frac{2}{i\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2}e^{-i\lambda\xi}d\xi=-\frac{2}{i\lambda}\mathcal{F}\left[xf(x)\right]\text{（导数定理）}\\&=-\frac{2}{\lambda}\frac{d\mathcal{F}\left[f(x)\right]}{d\lambda}\end{aligned}$$

解此一阶微分方程：$\mathcal{F}'(\lambda)+\dfrac{\lambda}{2}\mathcal{F}(\lambda)=0$，得 $\mathcal{F}(\lambda)=ce^{-\frac{1}{4}\lambda^2}$

又 $\mathcal{F}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}$，所以 $f(x)=e^{-x^2}$ 的傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\lambda^2}$$

2. 利用 Fourier 变换求解 $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}\\u(x,0)=\varphi(x)\\u_t(x,0)=0\end{cases}(-\infty<x<+\infty,t>0)$.

解：令 $\mathcal{F}\left[u(x,t)\right]=\bar{u}(\lambda,t)$，由线性性质和导数性质，原方程可化为：

$$\mathcal{F}\left[u_{tt}\right]=a^2\mathcal{F}\left[u_{xx}\right]\Leftrightarrow\mathcal{F}\left[u\right]_{tt}=a^2(i\lambda)^2\mathcal{F}\left[u\right]$$

即$\dfrac{d^2\overline{u}}{dt^2}+a^2\lambda^2\overline{u}=0$，其特征方程为：$\sigma^2+a^2\lambda^2=0$，解得$\sigma=\pm a\lambda i$

所以$\overline{u}(\lambda,t)=A(\lambda)\cos a\lambda t+B(\lambda)\sin a\lambda t$，再结合初始条件：

$$\begin{cases}\overline{u}(\lambda,0)=\mathcal{F}[u(x,0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\\ \overline{u}_t(\lambda,0)=\mathcal{F}[u_t(x,0)]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{u}(\lambda,0)=A(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\\ \overline{u}_t(\lambda,0)=a\lambda B(\lambda)=0\end{cases}$$

故$\overline{u}(\lambda,t)=A(\lambda)\cos a\lambda t=\mathcal{F}[\varphi(x)]\cos a\lambda t$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{F}[\varphi(x)]e^{i\lambda at}+\frac{1}{2}\mathcal{F}[\varphi(x)]e^{-i\lambda at}\text{（利用延迟性质）}$$
$$=\frac{1}{2}\mathcal{F}[\varphi(x-at)]+\frac{1}{2}\mathcal{F}[\varphi(x+at)]$$

再利用线性性质及$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f]=f$，得

$$u(x,t)=\mathcal{F}[\overline{u}(\lambda,t)]=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)]+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)]$$

五、Laplace 变换

重点掌握：定义与性质及其简单应用

- 定义

$f(t)$在$(0,+\infty)$有定义，且满足以下三个条件：

(1) 当$t<0$时，$f(t)=0$；

(2) 当$t\geq 0$时，$f(t)$及$f'(t)$除了有限个第一类间断点外而处处连续；

(3) 当$t\to+\infty$时，$f(t)$至多是指数增长，即$\exists M>0,\delta_0>0$，使$|f(t)|\leq Me^{\delta_0 t}$.

称$L(p)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(\xi)e^{-p\xi}d\xi$为函数$f(t)$的拉普拉斯变换，称$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[L(p)]=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}L(p)e^{p\xi}dp$为拉普拉斯逆变换，其中$f(t)$叫做$L(p)$的原像，$L(p)$叫做$f(t)$的像.

- **常见函数的拉普拉斯变换**

(1) $\mathcal{L}[1]=\frac{1}{p},\mathcal{L}[t]=\frac{1}{p^2},\mathcal{L}\left[t^n\right]=\frac{n!}{p^{n+1}}$;

(2) $\mathcal{L}\left[e^{st}\right]=\frac{1}{p-s},\mathcal{L}\left[te^{st}\right]=\frac{1}{(p-s)^2},\mathcal{L}\left[t^n e^{st}\right]=\frac{n!}{(p-s)^{n+1}}$;

(3) $\mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2}$;

➢ 重要性质（以下所给函数拉普拉斯变换均存在）

(1) (**线性性质**) $\forall\alpha,\beta\in const,\mathcal{L}\left[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\right]=\alpha\mathcal{L}\left[f_1(x)\right]+\beta\mathcal{L}\left[f_2(x)\right]$;

(2) (**卷积性质**) $\mathcal{L}\left[f_1(x)*f_2(x)\right]=\mathcal{L}\left[f_1(x)\right]\cdot\mathcal{L}\left[f_2(x)\right]$;

(3) (**乘积性质**) $\mathcal{L}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\mathcal{L}\left[f_1(x)\right]*\mathcal{L}\left[f_2(x)\right]$;

(4) (**延迟性质**) $\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right]=\mathcal{L}\left[f(t)\right]e^{-p\tau}$;

(5) (**导数性质**)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=p\mathcal{L}\left[f(t)\right]-f(0)\\
&\mathcal{L}\left[f''(t)\right]=p^2\mathcal{L}\left[f(t)\right]-pf(0)-f'(0)\\
&\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=p^n\mathcal{L}\left[f(t)\right]-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

(6) (**不定积分性质**) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{\mathcal{L}\left[f(t)\right]}{p}$.

1. 求$\frac{1}{p^2\left(p^2+\omega^2\right)}$的拉普拉斯逆变换.

解： 由$\mathcal{L}[t]=\frac{1}{p^2}$，$\mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$，结合卷积定理，有：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2\left(p^2+\omega^2\right)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)}\right]=\frac{1}{\omega}\int_0^t(t-\tau)\sin\omega\tau d\tau=\frac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$$

2. 求解$\begin{cases}x'(t)+x(t)-2y(t)=t\\ y'(t)-y(t)-2x(t)=t\\ x(0)=2,y(0)=4\end{cases}$.

解： 对方程两边分别进行拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases}\mathcal{L}[x'(t)]+\mathcal{L}[x(t)]-2\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[t]\\ \mathcal{L}[y'(t)]-\mathcal{L}[y(t)]-2\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{L}[t]\end{cases}$$

即 $\begin{cases}(p-1)\mathcal{L}[x(t)]-2\mathcal{L}[y(t)]=\dfrac{1}{p^2}+2\\ (p-1)\mathcal{L}[y(t)]-2\mathcal{L}[x(t)]=\dfrac{1}{p^2}+4\end{cases}$，两式分别相加减得：

$$\begin{cases}(p-3)\mathcal{L}[x(t)+y(t)]=\dfrac{2}{p^2}+6\\ (p+1)\mathcal{L}[x(t)-y(t)]=-2\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\mathcal{L}[x(t)+y(t)]=\dfrac{2(3p^2+1)}{p^2(p-3)}=\dfrac{6}{p-3}+\dfrac{2}{p^2(p-3)}\\ \mathcal{L}[x(t)-y(t)]=-\dfrac{2}{p+1}\end{cases}$

所以 $\begin{cases}\mathcal{L}[x(t)]=\dfrac{1}{p^2(p-3)}+\dfrac{3}{p-3}-\dfrac{1}{p+1}\\ \mathcal{L}[y(t)]=\dfrac{1}{p^2(p-3)}+\dfrac{3}{p-3}+\dfrac{1}{p+1}\end{cases}$，即 $\begin{cases}x(t)=\dfrac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{9}\\ y(t)=\dfrac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{9}\end{cases}$

3. 求解 $f(t)=at+\int_0^t\sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$.

解： 由卷积定义，方程可改写为：$f(t)=at+\sin t*f(t)$，令 $\mathcal{L}[f(t)]=\bar{f}(p)$，

对方程两边同时进行拉普拉斯变换，得 $\bar{f}(p)=a\cdot\dfrac{1}{p^2}+\bar{f}(p)\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$，从而：

$\bar{f}(p)=a\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^4}\right)$，所以 $f(t)=\left[a\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^4}\right)\right]=a\left(t+\dfrac{t^3}{6}\right)$

◆ ***牛刀小试***

1. 求解 $\begin{cases}x'-x=-3e^{2t}\\ x(0)=2\end{cases}$. 答案：$x=e^t+e^{-2t}$

2. 求解 $\begin{cases}x''+x=e^t\\ x(0)=x_0,x'(0)=x_1\end{cases}$. 答案：$x=\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)\cos t+\left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)\sin t+\dfrac{1}{2}e^t$

3. 求解$\begin{cases}3x'+y'+2x=1\\x'+4y'+3y=0\\x(0)=y(0)=0\end{cases}$.　　答案：$\begin{cases}x(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}\\y(t)=\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{1}{5}e^{-\frac{6}{11}t}\end{cases}$

4. 求解$a\sin t=G(t)-\int_0^t\sin(t-\tau)G(\tau)d\tau$.　　答案：$G(t)=at$

Part III 往年期末试卷

目　录

2016年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、选择题（共6题, 每题3分, 共18分）

1. 已知$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$, 则$z^{100}+z^{50}+1$的值是（　　）

   A. $-\mathrm{i}$.　B. i.　C. 1.　D. -1.

2. 下列关于复对数函数$w=\operatorname{Ln}z$的说法正确的是（　　）

   A. $\operatorname{Ln}z^n=n\operatorname{Ln}z$.

   B. $\operatorname{Ln}z_1z_2=\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2$.

   C. 若$z=x$为实数, 则$\operatorname{Ln}z=\operatorname{Ln}x=\ln x$.

   D. $\operatorname{Ln}z^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\operatorname{Ln}z$.

3. 设函数$f(z)$在区域D内解析, 则与$f(z)\equiv$常数不等价的是（　　）

   A. $f'(z)\equiv 0$.　B. $\mathrm{Re}f(z)\equiv\mathrm{Im}f(z)$.　C. $\overline{f(z)}$解析.　D. $|f(z)|\equiv$常数.

4. 函数$f(z)$在单连通区域D内解析是$f(z)$沿D内任一围线积分为零的（　　）

   A. 充分条件.　B. 必要条件.　C. 充要条件.　D. 既非充分也非必要条件.

5. 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$的收敛半径是$R>0$, 则该级数（　　）

   A. 在$|z|\le R$上收敛.　　B. 在$|z|\le\dfrac{R}{2}$上一致收敛.

   C. 在$|z|<R$上一致收敛.　　D. 在$|z|\le R$上绝对收敛.

6. 已知$f(x)$的傅里叶变换$F(\lambda)=\mathbb{F}[f(x)]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$, 则$\mathbb{F}[f(x)\sin\lambda_0x]=$（　　）

   A. $\dfrac{\mathrm{i}}{2}[F(\lambda+\lambda_0)-F(\lambda-\lambda_0)]$.　　B. $\dfrac{\mathrm{i}}{2}[F(\lambda+\lambda_0)+F(\lambda-\lambda_0)]$.

   C. $\dfrac{1}{2}[F(\lambda+\lambda_0)-F(\lambda-\lambda_0)]$.　　D. $\dfrac{1}{2}[F(\lambda+\lambda_0)+F(\lambda-\lambda_0)]$.

二、填空题（共6题, 每题3分, 共18分）

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+(-1)^n\mathrm{i}}$的收敛半径是__________.

2. $\displaystyle\int_0^{1+\mathrm{i}}(x-y+\mathrm{i}x^2)\,\mathrm{d}z=$__________, 其中积分路径是从0到$1+\mathrm{i}$的直线段.

3. $\displaystyle\oint_C\frac{\tan\pi z}{z^3}\,\mathrm{d}z=$__________, 其中$C:|z|=\dfrac{1}{4}$.

4. $\operatorname{Res}\left(\dfrac{2z}{3+z^2},\infty\right)=$__________.

5. 解析变换$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$在点$z=\mathrm{i}$处的伸缩比为__________.

6. 设$f(x)$为连续函数, $a>0$, 则积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(ax-x_0)f(x)\,\mathrm{d}x=$__________.

三、计算与证明题（共5题, 每题6 分, 共30分）

1. 函数$f(z)=(x^2-y^2-x)+\mathrm{i}(2xy-y^2)$在何处可导？何处解析？

2. 把函数$f(z)=\dfrac{1}{z(\mathrm{i}-z)}$在$0<|z|<1$和$0<|z-\mathrm{i}|<1$内分别展成洛朗级数.

3. 计算积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

4. 试证明若a为$f(z)$的n阶零点, 则$\mathrm{Res}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right)=n$.

5. 简述孤立奇点的分类及分类依据.

四、应用题（共4题, 共34分）

1. (10分) 用分离变量法求解如下拉普拉斯方程的边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (0<x<a,0<y<b)\\ u(0,y)=0,u(a,y)=0, & \\ u(x,0)=0,u(x,b)=\varphi(x). & \end{cases}$$

2. (10分) 用行波法求解如下波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0, & (-\infty<x<+\infty,y>0)\\ u(x,0)=\sin x, & \\ u_y(x,0)=0. & \end{cases}$$

提示：先作变量替换$\xi=x+y,\eta=3x-y$.

3. (10分) 利用拉普拉斯变换求解常微分方程

$$\begin{cases} y''(t)+y(t)=4,\\ y(0)=A,y'(0)=B, \end{cases}$$

其中A和B均为常数.

4. (4分) 有一长为l的细杆, 侧面绝热, 左端保持0度, 右端绝热. 杆的初始温度为$\varphi(x)$. 写出杆上各点的温度u所满足的定解问题.（**无需求解**）

2015年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、选择题（共5题, 每题3分, 共15分）

1. 若$a \neq 0$且$a \neq \infty$, 下列关于∞的性质错误的是（　　）

   A. $\infty + a = \infty$.　B. $\infty \cdot a = \infty$.　C. $\dfrac{a}{0} = \infty$.　D. $\infty + \infty = \infty$.

2. 下列说法正确的是（　　）

   A. 若$f(z) = u + \mathrm{i}v$在一点满足柯西–黎曼条件, 则在该点可微.

   B. 若$\overline{f(z)}$为解析函数, 则$f(\overline{z})$也必解析.

   C. 若$f(z) = u + \mathrm{i}v$解析, 则$f(z) = v + \mathrm{i}u$ 也解析.

   D. $\sin z$是有界的整函数.

3. $z \cos \dfrac{1}{z}$以$z = 0$为（　　）

   A. 可去奇点.　B. 极点.　C. 本性奇点.　D. 非孤立奇点.

4. 下列说法错误的是（　　）

   A. 若∞为$\cos z$的本性奇点.

   B. 若a为$f(z)$的n阶极点, 则$\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = n$.

   C. 设$f(z)$在区域D内解析且$f'(z) \neq 0$, 则$f(z)$不一定为单叶函数.

   D. 设$f(z)$在复平面上解析且在$|z| < 1$内$f(z) \equiv 0$, 则在复平面上$f(z) \equiv 0$.

5. 下列关于$f(x)$的傅里叶变换$F(\lambda) = \mathbb{F}[f(x)]$的叙述错误的是（　　）

   A. $F(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x$.　　B. $\mathbb{F}[f^{(n)}(x)] = (\mathrm{i}\lambda)^n \mathbb{F}[f(x)]$.

   C. $\mathbb{F}[f(x) + g(x)] = \mathbb{F}[f(x)] + \mathbb{F}[g(x)]$.　　D. $\mathbb{F}[f(x)g(x)] = F[f(x)] \cdot F[g(x)]$.

二、填空题（共7题, 每题3分, 共21分）

1. 8的所有三次方根是__________.

2. $\mathrm{i}^{1+\mathrm{i}}$=__________.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{[3 + (-1)^n]^n}$的收敛半径是_____.

4. $\displaystyle\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$=_____, 其中$C$是从$-1$到$1$的上半单位圆周.

5. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$=_____, 其中$C: |z-2| = \dfrac{1}{2}$.

6. $\operatorname{Res}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}, \infty\right)$=_____.

7. 若一光滑曲线在过$1 + \mathrm{i}$处的切线与x轴正向的夹角是$\dfrac{\pi}{6}$, 则经过变换$w = u + \mathrm{i}v = z^2$后其像曲线在$(1 + \mathrm{i})^2$处与$u$轴正向的夹角是_____.

三、计算及简述题（共4题, 每题6 分, 共24分）

1. 试求以$v=4xy$为虚部的解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$, 并且满足$f(0)=1$.

2. 把函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$在$2<|z|<3$和$0<|z-2|<1$内分别展成洛朗级数.

3. 计算积分$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2-\sin\theta}$.

4. 从下列定理中任选两个, 简述其内容.

(1) 柯西积分定理 (2) 模的最大值原理 (3) 刘维尔定理
(4) 莫雷拉定理 (5) 幂级数的阿贝尔定理 (6) 留数定理

四、应用题（共 4 题, 共 40 分）

1. (12分) 设有一长为l的均匀弦, 两端固定, 作自由振动. 已知弦上各点的初始位移为$\sin\dfrac{2\pi x}{l}$, 初始速度为$\sin\dfrac{3\pi x}{l}$.

(1) 写出弦上各点的位移u所满足的定解问题;
(2) 求解此定解问题.

2. (8分) 求解如下热传导方程的半无界问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & (0<x<+\infty, t>0)\\ u(x,0)=\psi(x), & (0\le x<+\infty)\\ u_x(0,t)=0. & (t\ge 0)\end{cases}$$

提示: 热传导方程初值问题的解为$u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi$.

3. (10分) 用行波法求解如下波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & (-\infty<x<+\infty, t>0)\\ u(x,0)=\sin x, & \\ u_t(x,0)=x^2. & \end{cases}$$

提示: 先作变量替换$\xi=x-t, \eta=x+t$, 化简方程.

4. (10分) 利用拉普拉斯变换求解常微分方程

$$\begin{cases} x''(t)-x(t)=\mathrm{e}^{2t},\\ x(0)=0, x'(0)=1.\end{cases}$$

2015年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、选择题（每题3分, 共18分）

1. 下列各命题中, 正确的是（　　）

   A. 复数域上, $\sqrt{z}$是多值函数.

   B. 复数域上, $\mathrm{e}^{z\mathrm{i}}$是以$2\pi\mathrm{i}$为周期的解析函数.

   C. 存在不是常函数的有界整函数.

   D. 变换$f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$在原点处的旋转角为$\dfrac{\pi}{2}$.

2. 设C是围线$|z|=1$, 则下列哪个积分值为零.（　　）

   A. $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$.　B. $\displaystyle\int_C \frac{|\,\mathrm{d}z|}{|z|}$.　C. $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{|z|}$.　D. $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin z}$.

3. 下列哪一个结论是正确的（　　）

   A. 如果u是v的共轭调和函数, 则v也是u的共轭调和函数.

   B. 如果u和v在原点的偏导数均存在, 且满足柯西-黎曼条件, 则$f(z)=u+\mathrm{i}v$在原点可导.

   C. 设$f(z)$在$|z|<1$上解析, 且在该区域上有无穷多个零点, 则$f(z)\equiv 0$.

   D. 如果a是解析函数$f(z)$的4阶零点, 则a必是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的1 阶极点.

4. $z=0$是函数$\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$的（　　）

   A. 可去奇点.　B. 非孤立奇点.　C. 极点.　D. 本性奇点.

5. 偏微分方程$u_t=u_{xx}$可以用来表示（　　）

   A. 弦的横向振动.　B. 杆的纵向振动.　C. 均匀细杆上的热量传导.　D. 拉普拉斯方程.

6. 记$f(x)$的傅里叶变换为$\mathbb{F}[f(x)]=F(\lambda)$, 形式上, 下列哪一个结论是错误的.（　　）

   A. $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{R^1} F(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$.　　B. $\mathbb{F}[3f(x)]=3\mathbb{F}[f(x)]$.

   C. $\mathbb{F}[f^{(2015)}(x)]=(\mathrm{i}\lambda)^{2015}\mathbb{F}[f(x)]$.　　D. $\mathbb{F}[f(x)g(x)]=\mathbb{F}[f(x)]\mathbb{F}[g(x)]$.

二、填空题（每题3分, 共18分）

1. 方程$\mathrm{e}^z=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$的解为$z=$__________.

2. 幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2+(-1)^n\right)^n z^n$的收敛半径$R=$__________.

3. 积分$\displaystyle\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z=$__________, 其中$C$为从0到$1+\mathrm{i}$的直线段.

4. 以$2y$为虚部的解析函数是__________.

5. 积分$\displaystyle\int_{|z|=n}\tan(\pi z)\,\mathrm{d}z=$__________, 其中$n$为正整数.

6. 一个偏微分方程定解问题是适定的, 如果该问题的解具有存在性、唯一性和__________.

三、计算、陈述题（共 4 题, 每题 6 分, 共 24 分）

1. 讨论函数$f(z)=x^2-x+\mathrm{i}y^2$的可导性和解析性.
2. 将函数$f(z)=\dfrac{1}{2-3z+z^2}$在$|z|<1$内展成幂级数, 在$1<|z|<2$内展成罗朗级数.
3. 计算复积分$\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z$.
4. 写出教材上的任意两个定理的内容.

四、应用题（共 3 题, 共 36 分）

1. （10 分）长为 1 的均匀细杆, 侧面绝热, 无热源, 左端点保持在零度, 右端点绝热, 初始温度分布为$\sin\dfrac{\pi x}{2}$.
   (1) 列出该细杆所满足的热传导方程、边值条件、初值条件.
   (2) 用分离变量法解该问题.
2. （16 分）解下列方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & x\in R, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R,\\ u_t(x,0)=0, & x\in R. \end{cases}$$

   并用图示标出区间$[0,1]$的决定区域、影响区域分别是什么？
3. （10 分）用拉普拉斯变换法解下列常微分方程

$$\begin{cases} y''(t)=f(t),\\ y(0)=0,\\ y'(0)=0. \end{cases}$$

五、证明题（4 分） 设∞为$f(z)$ 的可去奇点, 且$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$, 证明:

$$\mathrm{Res}[f(z);\infty]=\lim_{z\to\infty}z(A-f(z)).$$

2014年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、选择题（每题3分, 共18分）

1. 下列各命题中, 正确的是（　　）

   A. $\arg z$是解析函数.

   B. 设C为关于原点对称的光滑简单闭曲线, $f(z)$是连续的偶函数, 则$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

   C. 当$z \neq 0$时, $\mathrm{Ln}\,(z^2) = 2\,\mathrm{Ln}\,(z)$.

   D. $f(z)$为整函数的充要条件是$f(\overline{z})$也为整函数.

2. 设C是从原点到$1+\mathrm{i}$点的直线段, 则$\int_C |z|\,\mathrm{d}z=$（　　）.

   A. $1-\mathrm{i}$　B. $1+\mathrm{i}$　C. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$　D. $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

3. 下列哪一个结论是错误的.（　　）

   (a) $\mathrm{Res}(f(z)+g(z),a) = \mathrm{Res}(f(z),a) + \mathrm{Res}(g(z),a)$.

   (b) 若$f(z)$是偶函数, 且0是$f(z)$的孤立奇点, 则$\mathrm{Res}(f(z),0) = 0$.

   (c) 若∞是$f(z)$的可去奇点, 则$\mathrm{Res}(f(z),\infty) = 0$.

   (d) 设$f(z)$在区域D上单叶解析, 则$f'(z) \neq 0, \forall z \in D$.

4. 在无界的弦振动方程$u_{tt} = u_{xx}$中, $u(x,t)$在$(x,t) = (1,2)$处的依赖区间是（　　）.

   A. $[-1,3]$　B. $[1,3]$　C. $[1,2]$　D. $[0,2]$.

5. 下列哪一个结论是错误的.（　　）

   (a) 设0是$f(z)$的2阶零点, $g(z)$的4 阶极点, 则0是$g(f(z))$的8阶极点.

   (b) 设0是$f(z)$的3阶零点, 则0是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的1阶极点.

   (c) 设0是$f(z)$的极点, $g(z)$的本性奇点, 则0是$f(z)g(z)$的本性奇点.

   (d) 设0是$f(z)$的本性奇点, 也是$g(z)$的本性奇点, 则0是$f(z)+g(z)$的本性奇点.

6. 记$f(x)$的傅里叶变换为$\mathbb{F}[f(x)] = F(\lambda)$, 下列哪一个结论是错误的.（　　）

   A. $\mathbb{F}[\delta(x-1)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}$.　　B. $\mathbb{F}[f(x)*g(x)] = \mathbb{F}[f(x)]\cdot\mathbb{F}[g(x)]$.

   C. $\mathbb{F}[f'(x)] = \mathrm{i}\lambda\mathbb{F}[f(x)]$.　　D. $\mathbb{F}[f(2x)] = 2F(2\lambda)$.

二、填空题（每题3分, 共18分）

1. 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$的和函数是$1-z-z^2$, 则该幂级数的收敛半径$R =$__________.

2. 若变换$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-1}{z+1}$在$z=1$处的旋转角为$\dfrac{\pi}{2}$, 则$\theta =$__________.

3. $f(z) = \dfrac{z^6+1}{(1+z^2)^2(z+2)^3}$在$\infty$ 处的留数为__________.

4. $u = xy$的共轭调和函数是__________.

5. 计算积分$\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_{|z|=7}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z$=___________.

6. 设 0 是$f(z)$的2015阶极点, 则$\mathrm{Res}\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)},0\right)$=___________.

三、计算、陈述题（共 4 题, 每题 6 分, 共 24 分）

1. 将函数$f(z)=\dfrac{1}{(3-z)(2-z)}$在$|z|<2$内展成幂级数, 在$0<|z-3|<1$内展成罗朗级数.

2. 函数$f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$的奇点有哪些? 各是什么类型的奇点?

3. 计算实积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$.

4. 写出至少 3 种判别函数$f(z)$在单连通区域D上解析的方法.

四、应用题（共 4 题, 每题 10 分, 共 40 分）

1. 用分离变量法求解下面的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}, u_t(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

2. 用达朗贝尔方法解下列弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & x\in R, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R,\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in R. \end{cases}$$

3. 解下列问题的特征值及相应的特征函数

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda x(t)=0,\\ x'(0)=x'(1)=0. \end{cases}$$

4. 用拉普拉斯变换法解下列积分方程

$$y(t)=\cos t+\int_0^t y(s)\sin(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

2014年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、判断题（共6题, 每题2分, 共12分）

1. 若二元函数$u(x,y)$和$v(x,y)$可微, 则$f(z)=u+\mathrm{i}v$可导. ( )
2. $f(z)=\mathrm{e}^z$为周期函数. ( )
3. 若$f(z)$与$\overline{f(z)}$同为区域D内的解析函数, 则$f(z)$在D内必为常数. ( )
4. $f(z)=\sin^{-1}\dfrac{1}{z}$以$z=0$为本性奇点. ( )
5. 对$z\neq 0$, 我们有$\mathrm{Ln}\,(z^2)=2\,\mathrm{Ln}\,z$. ( )
6. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在区域$D$上内闭一致收敛, 则该级数在$D$上必一致收敛. ( )

二、填空题（共6题, 每题3分, 共18分）

1. $-2-\mathrm{i}2\sqrt{3}$的指数形式是__________.
2. $\mathrm{Ln}\,(1-\mathrm{i})$=__________.
3. $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^n},0\right)$=__________（其中$n$为自然数）.
4. $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2-1},\infty\right)$=__________.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{2n}$的收敛半径是__________.
6. 解析变换$f(z)=(1+\sqrt{3}\mathrm{i})z+2-\mathrm{i}$在$z=1$处的旋转角是__________.

三、计算与证明题（共5题, 每题6 分, 共30分）

1. 已知$u(x,y)=x^2-y^2+xy$, 证明$u(x,y)$为调和函数并求以u为实部的解析函数$f(z)$.
2. 计算积分$\displaystyle\int_C (x^2+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}z$, 其中$C$是从原点沿抛物线$y=x^2$到$1+\mathrm{i}$.
3. 把函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在$|z|<1$和$0<|z-1|<1$内分别展成罗朗（或泰勒）级数.
4. 设$f(z)$在区域D内解析, C为D内任一围线, 证明：对在D内但不在C上的任一点z_0, 等式
$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$$
成立.
5. 计算实积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

四、应用题（共4题, 每题10分, 共40分）

1. 设有一长为l的弹性弦, 两端固定, 弦上各点的初始位移为$\sin\dfrac{\pi x}{l}$, 初始速度为$\sin\dfrac{3\pi x}{l}$. 试写出弦上各点的位移$u(x,t)$所满足的定解问题并求解.

2. 求解热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

3. 利用行波法求解初值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xt} - 3u_{tt} = 0, & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (-\infty < x < +\infty) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

提示：首先作变量替换$\xi = x - \dfrac{t}{3}, \eta = x + t$, 化简方程并求通解.

4. 利用拉普拉斯变换求解常微分方程

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = t, \\ y(0) = 0, y'(0) = -2. \end{cases}$$

提示：拉普拉斯变换$L(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

2013年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、判断题（正确的划“✓”，错误的划“×”．共6题，每题2分，共12分）

1. $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$是以$2\pi$为周期的解析函数. （　　）

2. 有界区域D上的解析函数$f(z)$一定是有界的函数. （　　）

3. 如果$f(z)$和$\overline{f(z)}$都是区域D上的解析函数, 则$f(z)$必是常函数. （　　）

4. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$在$z=\mathrm{i}$处收敛, 则该级数必在$z=1$处也收敛. （　　）

5. 变换$w=\dfrac{1}{z-1}$会将圆周$|z|=1$变成一条直线. （　　）

6. 无穷远点∞是$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$的本性奇点. （　　）

二、填空题（每空3分，共18分）

1. 当$|z|<1$时, 成立等式$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{|\xi|=1}\dfrac{\xi^2}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$, 则导函数$f'(z)=$__________.

2. 若$u(x,y)=x^2+ay^2$是调和函数, 则$a=$__________.

3. 称定解问题是适定的, 是指这个定解问题的解存在, 唯一且__________.

4. $f(z)=\dfrac{z^2}{(1-\cos z)\sin z}$在$z=0$处的留数是__________.

5. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+2}$在∞处的留数是__________.

6. 积分$\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z=$__________, 其中曲线$C$是从$-\mathrm{i}$到$\mathrm{i}$的右半单位圆周.

三、计算、概述题（共4题，共30分）

1. （6分）计算实积分$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

2. （8分）将函数$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$在$|z+1|<2$上展成幂级数, 在$1<|z|$上展成洛朗级数.

3. （8分）$f(z)$的孤立奇点a可以分为哪几类？如何判定它们？

4. （8分）请写出本教材上的定理（任选两个, 写出定理及其内容, 不用证明）.

四、应用题（共4题，每题10分，共40分）

1. 用分离变量法求解下列热传导方程的混合问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & (t>0, x\in(0,l)),\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & (t\geq 0),\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}, & (x\in[0,l]). \end{cases}$$

2. 已知下列的非齐次弦方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}-\sin x, & x\in R, t>0,\\ u(x,0)=0, & x\in R,\\ u_t(x,0)=0, & x\in R. \end{cases}$$

(1) 令$w = u + \sin x$, 写出w所满足的泛定方程和初值问题.

(2) 用达朗贝尔方法解(1)中的w, 进而求出u.

3. 求解积分方程$f(t) = \sin t + \int_0^t f(s) \sin(t - s)\,\mathrm{d}s$.（本题不限定方法, 可以选择拉普拉斯变换方法,（公式$L[\sin t] = \dfrac{1}{p^2 + 1}$）, 也可以用微积分中的方法.）

4. (1) 写出傅里叶变换及逆变换的公式.

(2) 求δ函数的傅里叶变换.

(3) 写出傅里叶变换的至少3个性质.

2013年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、判断题（正确的划“✓”，错误的划“×”．共6题，每题2分，共12分）

1. $u(x,y)=x^2y^2$是某个解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的实部. （　　）
2. 常函数是唯一的一类有界整函数. （　　）
3. 分式线性变换具有保角性. （　　）
4. 当$z\neq 0$时，$\mathrm{Arg}(z^2)=2\mathrm{Arg}(z)$. （　　）
5. 称定解问题是适定的，是指这个定解问题的解存在、唯一且稳定. （　　）
6. 若$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在一点满足柯西–黎曼条件，则函数在该点可导. （　　）

二、填空题（每空3分，共18分）

1. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2^nz^{2n}$的收敛半径$R=$______，和函数$f(z)=$____________.
2. 变换$f(z)=z^2$在$z=\mathrm{i}$处的旋转角为______.
3. $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z}$在$\infty$处的留数为______.
4. $z=0$是$f(z)=\dfrac{z^2}{(1-\cos z^2)\sin z^3}$的______阶极点.
5. 积分$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z=$____________.

三、计算、证明题（共5题，每题6 分，共30分）

1. 将函数$f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$在$|z|<1$内展成幂级数，在$0<|z-1|<1$内展成罗朗级数.
2. 计算实积分$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. 设$f(z)$在区域D上解析，且$|f(z)|$在D上是一常数，证明$f(z)$在D上必为常函数.
4. 计算$\displaystyle\int_C \mathrm{Re}z\,\mathrm{d}z$之值，其中$C$是连接原点到1点再到$1+\mathrm{i}$点的折线.
5. 求$u=\mathrm{e}^x\sin y$的共轭调和函数.

四、应用题（共4题，每题10分，共40分）

1. 有一根长为l的弦，其两端被钉子钉紧，作自由振动，它的初始位移为$\sin 3\pi x$，初始速度为0.
   (1) 列出弦所满足的方程及定解条件；
   (2) 解出该弦方程的付氏解.

2. 用达朗贝尔方法解下列弦振动方程的古尔萨问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & x\in R, t>0,\\ u(x,x)=\sin 2x, & x\in R,\\ u(x,-x)=2x, & x\in R. \end{cases}$$

3. 求解下列热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R. \end{cases}$$

4. 用拉普拉斯变换法解下列常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' + y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

2012年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）

一、计算题（共6题，每题4分，共24分）

1. 计算$(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$.
2. 设$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，求$\dfrac{1}{z}$的三角表示.
3. 设C为原点到点$3+4\mathrm{i}$的直线段，求积分$\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$绝对值得一个上界.
4. 计算积分$\displaystyle\int_C \sin z\,\mathrm{d}z$，其中$C$是圆周$|z-1|=1$的上半周，走向从0到2.
5. 求积分值$\displaystyle\oint_{|z-\mathrm{i}|=1}\frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z$.
6. 求函数$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{z^2}$在$z=0$处的留数.

二、计算及证明题（共5题，每题6分，共30分）

1. 求函数$f(z)=\dfrac{2z^5-z+3}{4z^2+1}$的解析性区域，并求该区域上的导函数.
2. 已知调和函数$u=2(x-1)y$，求解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$，使得$f(0)=-\mathrm{i}$.
3. 函数$\dfrac{1}{\sin z}$有些什么奇点？如果是极点，指出它的阶.
4. 把函数$\dfrac{1}{z}$表成形如$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-2)^n$的幂级数.
5. 求证：$f(z)=\arg z\,(z\neq 0)$在全平面除去原点和负实轴的区域上连续，在负实轴上不连续.

三、应用题（共5题，每题8分，共40分）

1. 论述波动方程定解问题傅里叶解的物理意义.
2. 给出波动方程$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx},\ -\infty<x<+\infty, t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$初值问题在点$(1,3)$的依赖区间、区间$[1,2]$的决定区域、点$x=5$的影响区域.
3. 求定解问题$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u_x(0,t)=0, u_x(l,t)=0, \\ u(x,0)=-2\varepsilon x+\varepsilon l, u_t(x,0)=0 \end{cases}\quad (0<x<1, t>0)$ 的解.
4. 求函数$f(t)=1$的傅氏变换.
5. 应用拉普拉斯变换，求$y''(t)+4y(t)=0$满足初始条件$y(0)=-2, y'(0)=4$的特解.

四、应用题（共1题，每题6分，共6分）

求解半无界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<+\infty, t>0), \\ u(0,t)=f(t), \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0 & (t\geq 0), \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0 & (0\leq x<+\infty), \end{cases}$$

其中$f(t)$为充分光滑的已知函数.

2016年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. A　2. B　3. B　4. A　5. B　6. A.

二、1. 3.　2. $\dfrac{\mathrm{i}-1}{3}$.　3. 0.　4. -2.　5. 2.　6. $\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x_0}{a}\right)$.

三、

1. $f(z)$在直线$y=\dfrac{1}{2}$上可导；处处不解析.

2. $0<|z|<1$时, $f(z)=-\dfrac{\mathrm{i}}{z}-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-\mathrm{i})^n z^n$; $0<|z-\mathrm{i}|<1$时, $f(z)=\dfrac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{i}^n(z-\mathrm{i})^n$.

3. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

四、

1. $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi y}{a}}+D_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$, 其中$C_n=\left(\mathrm{e}^{\frac{n\pi b}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)^{-1}\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi$, $D_n=-C_n$.

2. $u(x,y)=\dfrac{3}{4}\sin\left(\dfrac{3x-y}{3}\right)+\dfrac{1}{4}\sin(x+y)$.

3. $y(t)=4+(A-4)\cos t+B\sin t$.

4.
$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0,\\ u(0,t)=0, u_x(l,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

2015年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. D　2. B　3. C　4. B　5. D.

二、1. $2, -1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}, -1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$;　2. $\mathrm{i}e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;　3. 2;　4. $-\pi\mathrm{i}$;
5. $-2\pi\mathrm{i}$;　6. -1（提示: 利用洛朗展式先计算$z=1$处的留数）;
7. $\dfrac{5\pi}{12}$（提示: $w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0)\Rightarrow \mathrm{Arg}w'(t_0)=\mathrm{Arg}f'(z_0)+\mathrm{Arg}z'(t_0)$）.

三、

1. 由$u_x=v_y=4x$推出$u=2x^2+\varphi(y)$, 再由$\varphi'(y)=u_y=-v_x=-4y$推出$\varphi(y)=-2y^2+C$. 所以$f(z)=2x^2-2y^2+C+\mathrm{i}4xy$. 由$f(0)=1$得$C=1$, 所以$f(z)=2x^2-2y^2+1+\mathrm{i}4xy=2z^2+1$.

2. 当$2<|z|<3$时,
$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}};$$
当$0<|z-2|<1$时,
$$f(z)=\frac{1}{z-2}\frac{1}{(z-2)-1}=\frac{-1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-2)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-2)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-2)^n.$$

3. 设$z=e^{\mathrm{i}\theta}, 0\le\theta\le2\pi$, 则$\sin\theta=\dfrac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}$, $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$. 于是有
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2-\sin\theta}&=-2\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-4\mathrm{i}z-1}=-2\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{[z-(2+\sqrt{3})\mathrm{i}][z-(2-\sqrt{3})\mathrm{i}]}\\&=-2\times2\pi\mathrm{i}\frac{1}{z-(2+\sqrt{3})\mathrm{i}}\Big|_{z=(2-\sqrt{3})\mathrm{i}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.\end{aligned}$$

4. (2) 模的最大值原理: 若$f(z)$在闭区域$\overline{D}$解析, 且不为常数, 则$|f(z)|$只能在边界上达到最大值.
其余见教材.

四、

1. (1)
$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge0,\\ u(x,0)=\sin\dfrac{2\pi x}{l}, u_t(x,0)=\sin\dfrac{3\pi x}{l}, & 0\le x\le l.\end{cases}$$
(2) 设方程有变量分离形式的非零特解
$$u(x,t)=X(x)T(t).$$
将其代入泛定方程中得
$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t).$$
两边同除以$a^2X(x)T(t)$得
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$
可得两个常微分方程
$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,$$
$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

将非零特解$u(x,t)=X(x)T(t)$代入边界条件中可得

$$X(0)=X(l)=0.$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l, \\ X(0)=X(l)=0, \end{cases}$$

得特征值和特征函数

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n=1,2,\cdots.$$

把特征值λ_n代入方程$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$ 中, 注意到$\lambda_n>0$, 得其通解为

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l},$$

其中C_n,D_n是任意常数. 于是可得对应于特征值λ_n的特解为

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad n=1,2,\cdots,$$

叠加所有变量分离形式的特解得

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

由

$$\sin\frac{2\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

得

$$C_2=1, C_n=0,\ n=1,3,4,\cdots.$$

又由$u_t(x,0)=\sin\dfrac{3\pi x}{l}$得

$$\sin\frac{3\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi a}{l}D_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由此可知

$$D_3=\frac{l}{3\pi a}, D_n=0,\ n=1,2,4,5,\cdots.$$

所以

$$u(x,t)=\cos\frac{2\pi at}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}.$$

2. 将初值$\psi(x)$偶延拓为

$$\psi_e(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\geq 0, \\ \psi(-x), & x<0.\end{cases}$$

利用初值问题的解的公式, 当$x\geq 0,t>0$时有

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_e(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi \\ &=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_{-\infty}^{0}\psi(-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{+\infty}\psi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi\right]. \end{aligned}$$

令$\xi=-\eta$, 则有

$$\int_{-\infty}^{0}\psi(-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi=\int_{0}^{+\infty}\psi(\eta)\mathrm{e}^{-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\eta.$$

于是有

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}\psi(\xi)\left[\mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}+\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]\mathrm{d}\xi.$$

3. 设

$$u(x,t)=f(x-t)+g(x+t).$$

把它代入初始条件中, 得

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=\sin x,\\-f'(x)+g'(x)&=x^2.\end{aligned}$$

对第二式积分得

$$-f(x)+g(x)=\frac{x^3}{3}+c,$$

其中c是一个任意常数. 从上面的两个关于f和g的函数方程中可以解出

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{x^3}{3}+c\right),\\g(x)&=\frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{x^3}{3}+c\right).\end{aligned}$$

所以

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x-t)+\sin(x+t)]+\frac{1}{6}[(x+t)^3-(x-t)^3]=\sin x\cos t+x^2t+\frac{t^3}{3}.$$

4. 对方程作拉普拉斯变换得

$$s^2\widehat{x}(s)-1-\widehat{x}(s)=\frac{1}{s-2}.$$

于是可得

$$\widehat{x}(s)=\frac{1}{s^2-1}+\frac{1}{(s^2-1)(s-2)}=\frac{1}{(s+1)(s-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+1}\right).$$

作逆变换得

$$x(t)=\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-t}\right).$$

2015年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、 1. A　2. C　3. D　4. B　5. C　6. D.

二、 1. $\ln 2 + \mathrm{i}(\pi/3 + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$;　2. 1/3;　3. 1;
4. $2x + c + \mathrm{i}2y$, c为任意实数;　5. $-4n\mathrm{i}$;　6. 稳定性.

三、

1. 设$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. 由$f(z) = x^2 - x + \mathrm{i}y^2$可得

$$u(x,y) = x^2 - x, \quad v(x,y) = y^2.$$

计算得

$$u_x = 2x - 1, u_y = 0, v_x = 0, v_y = 2y.$$

显然这四个一阶偏导数都连续, 故$u(x,y)$和$v(x,y)$处处可微. 但只有当$x - y = 1/2$时, C-R方程$u_x = v_y, u_y = -v_x$才成立. 所以$f(z)$只在直线$x - y = 1/2$上可导. 根据解析点的定义, 直线$x - y = 1/2$上的点都不是解析点, 所以$f(z)$无解析点.

2. $f(z) = \dfrac{1}{2 - 3z + z^2} = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. 当$|z| < 1$时, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$; 当$1 < |z| < 2$时, $f(z) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$. 具体展开过程见教材.

3. 因为$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}; \infty\right] = -\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1$, 所以

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}; 0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}; 1\right]\right) = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}; \infty\right] = -2\pi\mathrm{i}.$$

四、

1.
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0,1), t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2}, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 把它代入方程中得

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

即有

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

由此得到两个常微分方程

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

再利用边界条件可得

$$X(0)T(t) = X'(1)T(t) = 0.$$

因为$T(t) \not\equiv 0$, 故必有

$$X(0) = X'(1) = 0.$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<1, \\ X(0)=X'(1)=0. \end{cases}$$

可得特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2, \quad X_n(x)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x, \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

由$T_n'(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=0$可得

$$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}.$$

于是叠加所有变量分离形式的特解得

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

利用初始条件有

$$\sin\frac{\pi x}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

比较两端系数可得$C_0=1, C_n=0, n=1,2,\cdots$. 所以有

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{4}a^2 t}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

2. 设$u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$, 代入初始条件得

$$f(x)+g(x)=\varphi(x), \quad -f'(x)+g'(x)=0,$$

即

$$f(x)+g(x)=\varphi(x), \quad -f(x)+g(x)=c.$$

由此得

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{c}{2}, \quad g(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{c}{2}.$$

代回通解形式得$u(x,t)=\dfrac{1}{2}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)]$.

以点$(0,0),(1,0)$和$(1/2,1/2)$为顶点的三角形区域为区间$[0,1]$的决定区域, 过点$(0,0)$的直线$t=-x$和过点$(1,0)$的直线$t=x-1$以及区间$[0,1]$所围的区域为区间$[0,1]$的影响区域.

3. 做拉普拉斯变换得$s^2\widehat{y}(s)=\widehat{f}(s)$, 即$\widehat{y}(s)=\dfrac{\widehat{f}(s)}{s^2}$. 于是由拉普拉斯变换的卷积性质可得$y(t)=\displaystyle\int_0^t(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

五、设$f(z)$在∞的空心解析邻域内的洛朗展式为

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0.$$

由此可知$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=c_0$. 而由$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$可知$A=c_0$, 所以

$$z(A-f(z))=\cdots-\frac{c_{-n}}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{c_{-2}}{z}-c_{-1}.$$

由此可知$\lim\limits_{z\to\infty}z(A-f(z))=-c_{-1}$. 这就证明了$\mathrm{Res}[f(z);\infty]=\lim\limits_{z\to\infty}z(A-f(z))$.

2014年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. B 2. C 3. C 4. A 5. D 6. D.

二、1. $+\infty$; 2. $\dfrac{\pi}{2}$; 3. -1; 4. $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}+c$; 5. 6; 6. -2015.

三、

1. $f(z)=\dfrac{1}{(3-z)(2-z)}=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$.
   当$|z|<2$时,

$$f(z)=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

   当$0<|z-3|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-3+1}=\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-3)^n=\sum_{n=-1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(z-3)^n.$$

2. 由$\sin\frac{1}{z}=0$推出$\frac{1}{z}=n\pi$, 即$z=\frac{1}{n\pi},n=\pm1,\pm2,\cdots$为奇点. 显然, $z=0,\infty$也是奇点. 由于当$n\to\infty$时, $\frac{1}{n\pi}\to0$, 所以$z=0$是非孤立奇点. 由

$$\left(\sin\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}$$

   可知$z=\frac{1}{n\pi},n=\pm1,\pm2,\cdots$是$\sin\frac{1}{z}$的一阶零点, 所以它们是$f(z)$的一阶极点. 由$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$可知$z=\infty$ 是极点. 进一步, 由$w=0$是$\dfrac{1}{\sin w}$的一阶极点, 所以$z=\infty$是$f(z)$的一阶极点.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^3};\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^3}\right|_{z=\mathrm{i}}=\pi\mathrm{i}\frac{12}{(2\mathrm{i})^5}=\frac{3\pi}{8}.$

四、

3. 对λ分类讨论:

   1) 当$\lambda<0$时, 方程的通解为$x(t)=A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,t}+B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,t}$. 计算得$x'(t)=\sqrt{-\lambda}A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,t}-\sqrt{-\lambda}B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,t}$. 将其代入边界条件得

$$A-B=0,$$
$$A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}}-B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}}=0.$$

   解此线性方程组可得$A=B=0$, 只有零解, 故在此种情形下特征值问题无解.

   2) 当$\lambda=0$时, 方程的通解为$x(t)=At+B$. 将其代入边界条件得$A=0$. 故在此种情形下特征值问题有解$x(t)=B\neq0$.

   3) 当$\lambda>0$时, 方程的通解为可表示为$x(t)=A\cos\sqrt{\lambda}\,t+B\sin\sqrt{\lambda}\,t$. 计算得$x'(t)=-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}\,t+\sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}\,t$. 由$x'(0)=0$得$B=0$. 又由$x'(1)=0$得$\sin\sqrt{\lambda}=0$. 由此可推出$\sqrt{\lambda}=n\pi$, 即$\lambda=(n\pi)^2$, $n=1,2,\cdots$. 相应的特征函数为$x(t)=A\cos n\pi t$.

   综上所述, 特征值和特征函数为

$$\lambda_n=(n\pi)^2,\ x_n(t)=A_n\cos n\pi t,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

4. 作拉普拉斯变换得$\widehat{y}(s)=\dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{\widehat{y}(s)}{s^2+1}$. 由此可得$\widehat{y}(s)=\dfrac{1}{s}$, 所以$y(t)=1$.

附 第二题第5题的计算过程如下:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z|=7}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2\pi\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};-2\pi\right].$$

由$z=0$是函数$\dfrac{z}{1-\cos z}$的一阶极点, 利用洛必达法则可得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\sin z}=2.$$

由留数的定义,

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2\pi\right]=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z-2\pi|=1}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z.$$

作积分变量替换$w=z-2\pi$, 有

$$\begin{aligned}\int_{|z-2\pi|=1}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z&=\int_{|w|=1}\frac{w+2\pi}{1-\cos w}\,\mathrm{d}w=\int_{|w|=1}\frac{w}{1-\cos w}\,\mathrm{d}w+\int_{|w|=1}\frac{2\pi}{1-\cos w}\,\mathrm{d}w\\&=\int_{|w|=1}\frac{w}{1-\cos w}\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2\pi\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]=2.$$

类似地可得

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};-2\pi\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]=2.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z|=7}\frac{z}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};2\pi\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-\cos z};-2\pi\right]=6.$$

2014年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. 错　2. 对　3. 对　4. 错　5. 错　6. 错.

二、1. $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$或$4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$;　2. $\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k=0,\pm,1\pm 2,\cdots$;　3. $\dfrac{1}{(n-1)!}$;

4. $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{2}$或$-\sinh 1$;　5. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;　6. $\dfrac{\pi}{3}$.

三、

1. 计算可得$u_x=2x+y, u_y=-2y+x, u_{xx}=2, u_{yy}=-2$, 显然在整个平面上满足拉普拉斯方程$u_{xx}+u_{yy}=0$. 所以$u(x,y)$是调和函数.

   解法一　由$v_y=u_x=2x+y$可推出$v(x,y)=2xy+\dfrac{y^2}{2}+\varphi(x)$. 又由$u_y=-v_x$, 即$-2y+x=-2y-\varphi'(x)$得$\varphi'(x)=-x$. 由此可知$\varphi(x)=-\dfrac{x^2}{2}+c$, 其中$c$为任意实常数. 因此所求解析函数$f(z)=(x^2-y^2+xy)+\mathrm{i}\left(\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}+2xy+c\right)$. 令$y=0$可得$f(x)=\left(1-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)x^2+\mathrm{i}c$. 所以$f(z)=\left(1-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)z^2+\mathrm{i}c$.

   解法二　$f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=2x+y-\mathrm{i}(-2y+x)$. 令$y=0$可得$f'(x)=(2-\mathrm{i})x$. 由此可知$f'(z)=(2-\mathrm{i})z$. 所以$f(z)=\left(1-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)z^2+C$, 其中$C$是一个复常数. 但$f(z)$的实部$u(x,y)$已经给定, 所以$C$是纯虚数.

2. 设积分路径C的参数方程为$z=x+\mathrm{i}x^2$, $0\le x\le 1$, 则

$$\int_C (x^2+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}z=\int_0^1 (x^2+\mathrm{i}x^2)(1+\mathrm{i}2x)\,\mathrm{d}x=(1+\mathrm{i})\int_0^1 (x^2+\mathrm{i}2x^3)\,\mathrm{d}x$$
$$=(1+\mathrm{i})\left(\frac{x^3}{3}+\mathrm{i}\frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}+\mathrm{i}\frac{5}{6}.$$

3. 当$|z|<1$时

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

   当$0<|z-1|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

   或

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{1-(z-1)}$$
$$=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

4. 本题条件有误, 应将区域D限制为单连通区域.

   当z_0在C内时, 由柯西积分公式和导数的柯西型积分公式有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f'(z_0)=\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z.$$

当z_0在C外时, 由柯西积分定理有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0 = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z.$$

5. 记$f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$, 它在上半平面内只有两个一阶极点$a_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k=0,1$.

$$\mathrm{Res}[f(z);a_k]=\left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=a_k}=\frac{1}{4a_k}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k=0,1.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times 2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right]=\frac{\pi\mathrm{i}}{4}\times(-\sqrt{2}\,\mathrm{i})=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

四、

1. 定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{l}, u_t(x,0)=\sin\frac{3\pi x}{l}, & 0\leq x\leq l.\end{cases}$$

解题过程略, 答案为

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}.$$

2. 关于x作傅里叶变换. 记$\widehat{u}(\omega,t)=F[u], \widehat{\varphi}(\omega)=F[\varphi]$, 由微分性质和线性性质有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t)=-a^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t), & t>0,\\ \widehat{u}(\omega,0)=\widehat{\varphi}(\omega),\end{cases}$$

其中的ω视为参数. 解得

$$\widehat{u}(\omega,t)=\widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}.$$

对$\widehat{u}(\omega,t)$作傅里叶逆变换, 便可得到解$u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi$.

3. 利用算子分解

$$(\partial_x)^2+2\partial_x\partial_t-3(\partial_t)^2=(\partial_x+3\partial_t)(\partial_x-\partial_t),$$

可得坐标变换$\xi=x-\dfrac{t}{3}, \eta=x+t$. 在此变换下有

$$\begin{cases} u_x=u_\xi+u_\eta,\\ u_t=-\frac{1}{3}u_\xi+u_\eta.\end{cases}$$

由此可知

$$\begin{cases} \partial_x=\partial_\xi+\partial_\eta,\\ \partial_t=-\frac{1}{3}\partial_\xi+\partial_\eta.\end{cases}$$

计算可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

解得

$$u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta),$$

即

$$u(x,t)=f\left(x-\frac{t}{3}\right)+g(x+t).$$

将其代入初始条件得

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=\varphi(x),\\-\frac{1}{3}f'(x)+g'(x)&=\psi(x).\end{aligned}$$

对第二个等式积分得

$$-\frac{1}{3}f(x)+g(x)=\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+c.$$

于是可解得

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{3}{4}\left[\varphi(x)-\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-c\right],\\g(x)=&\frac{1}{4}\left[\varphi(x)+3\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi+3c\right].\end{aligned}$$

将它们代回通解公式可得

$$u(x,t)=\frac{3}{4}\varphi\left(x-\frac{t}{3}\right)+\frac{1}{4}\varphi(x+t)+\frac{3}{4}\int_{x-\frac{t}{3}}^{x+t}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

4. 对方程作拉普拉斯变换可得

$$(s^2+1)\widehat{y}(s)+2=\frac{1}{s^2}.$$

解得

$$\widehat{y}(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}-\frac{2}{s^2+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s^2+1}.$$

作逆变换得

$$y(t)=t-3\sin t.$$

2013年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. ✓　2. ×　3. ✓　4. ×　5. ✓　6. ×.

二、1. $2z$;　2. -1;　3. 稳定;　4. 2;　5. -1;　6. $2\mathrm{i}$.

三、

1. 设$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 则由欧拉公式有

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+\mathrm{i}\sin(\sin\theta)].$$

由于函数$\mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)$是奇函数, 所以

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+\mathrm{i}\sin(\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{z}\,\mathrm{d}\theta=\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z=2\pi.\end{aligned}$$

2. 当$|z+1|<2$时,

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2-(z+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}.$$

当$|z|>1$时,

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{-z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n}.$$

3. 见教材4.5.1小节.

四、

1. 解题过程略, $u(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\dfrac{\pi x}{l}$.

2. (1)

$$\begin{cases}w_{tt}=u_{xx}, & x\in R, t>0,\\ w(x,0)=\sin x, & x\in R,\\ w_t(x,0)=0, & x\in R.\end{cases}$$

(2) 设$w(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$, 将其代入初始条件中得

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=\sin x,\\ f'(x)-g'(x)&=0.\end{aligned}$$

由第二式可得$f(x)-g(x)=c$, 其中c为任意常数. 于是可解得

$$f(x)=\frac{1}{2}[\sin x+c],\quad g(x)=\frac{1}{2}[\sin x-c].$$

由此可知$w(x,t)=\dfrac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)]=\sin x\cos t$, $u(x,t)=\sin x(\cos t-1)$.

3. 作拉普拉斯变换得

$$\widehat{f}(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{\widehat{f}(s)}{s^2+1}.$$

从中解出$\widehat{f}(s)=\dfrac{1}{s^2}$. 再作逆变换便可得$f(t)=t$.

4. (2) $F[\delta(x)]=1$.

2013年春季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、1. × 2. ✓ 3. ✓ 4. × 5. ✓ 6. ×.

二、1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{1-2z^2}$; 2. $\frac{\pi}{2}$; 3. 1; 4. 5; 5. 0.

三、

1. 当$|z|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

当$0<|z-1|<1$时,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.$$

或

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-1}\times\frac{1}{1-(z-1)}\\&=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}(z-1)^n.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2};\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}}=\frac{\pi}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

3. 不妨设$|f(z)|=r$, 则$u^2+v^2=r^2$. 两边关于x和y分别求偏导数得

$$\begin{cases}uu_x+vv_x=0,\\uu_y+vv_y=0.\end{cases}$$

利用C–R方程可重写为

$$\begin{cases}uu_x+vv_x=0,\\vu_x-uv_x=0.\end{cases}$$

此线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}u & v\\ v & -u\end{vmatrix}=-(u^2+v^2).$$

若$u^2+v^2=r^2=0$, 则$u=v\equiv 0$, 即$f(z)\equiv 0$; 若$u^2+v^2=r^2\neq 0$, 则上面的方程组只有零解, 即$u_x=v_x=0$. 再次利用C–R方程得$u_y=v_y=0$. 因此u和v在区域D上为常数, 所以$f(z)$为常函数.

4. 设直线段C_1的参数方程为：$z=t$, $0\le t\le 1$, 直线段C_2的参数方程为：$z=1+\mathrm{i}t$, $0\le t\le 1$, 则有

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z&=\int_{C_1}\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z+\int_{C_2}\mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{Re}\,t\cdot 1\,\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

5. 由$v_y = u_x = \mathrm{e}^x \sin y$可推出$v(x,y) = -\mathrm{e}^x \cos y + \varphi(x)$. 再由$u_y = -v_x$即$\varphi'(x) = 0$可知$\varphi(x) = c$, 其中$c$为一任意常数. 所以$v(x,y) = -\mathrm{e}^x \cos y + c$.

四、

1. (1)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin(3\pi x), u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(2) $u(x,t) = \cos(3\pi t)\sin(3\pi x)$.

2. 设$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$, 将其代入初始条件中得

$$f(2x) + g(0) = \sin 2x,$$
$$f(0) + g(2x) = 2x.$$

由此可得$f(x) = \sin x - g(0), g(x) = x - f(0)$. 于是有$u(x,t) = \sin(x+t) + x - t - [f(0) + g(0)]$. 易知$f(0) + g(0) = 0$. 所以$u(x,t) = \sin(x+t) + x - t$.

3. 关于x作傅里叶变换. 记$\widehat{u}(\omega,t) = F[u], \widehat{\varphi}(\omega) = F[\varphi]$, 由微分性质和线性性质有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\omega,t) = -\omega^2 \widehat{u}(\omega,t), \quad t > 0, \\ \widehat{u}(\omega,0) = \widehat{\varphi}(\omega), \end{cases}$$

其中的ω视为参数. 解得

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-\omega^2 t}.$$

对$\widehat{u}(\omega,t)$作傅里叶逆变换, 便可得到解$u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,\mathrm{d}\xi$.

4. 作拉普拉斯变换得

$$s^2\widehat{y}(s) + \widehat{y}(s) = \widehat{f}(s).$$

从中解出$\widehat{y}(s) = \dfrac{\widehat{f}(s)}{s^2+1}$. 再作逆变换便可得

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

2012年秋季学期数学物理方法期末考试试卷（A卷）参考答案

一、

1. $(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})=-\sqrt{3}+\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1-3)=-4\mathrm{i}$.

2. $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$. 注意$\dfrac{1}{r}(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$是错误的.

3. 由积分估计定理有$\left|\displaystyle\int_C\frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\right|\le\displaystyle\int_C\frac{1}{|z-\mathrm{i}|}|\,\mathrm{d}z|$. 利用相似三角形的知识, 易知$|z-\mathrm{i}|\,(z\in C)$的最小值是$\dfrac{3}{5}$. 所以
$$\left|\int_C\frac{1}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{5}{3}\times 5=\frac{25}{3}.$$

4. 由于$\sin z$在整个复平面上解析, 积分值$\displaystyle\int_C\sin z\,\mathrm{d}z$只与积分路径的起点和终点有关, 根据牛顿–莱布尼兹公式,
$$\int_C\sin z\,\mathrm{d}z=\int_0^2\sin z\,\mathrm{d}z=-\cos z\Big|_0^2=1-\cos 2.$$

5. $\displaystyle\oint_{|z-\mathrm{i}|=1}\frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2}(\cos z)''\Big|_{z=\mathrm{i}}=-\pi\mathrm{i}\cos\mathrm{i}=-\frac{\pi\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e})}{2}$.

6. $\operatorname{Res}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{z^2};0\right]=-1$.

二、

1. 由$4z^2+1=0$可得$f(z)$的全部奇点为$z=\pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}$. 它的解析区域为复平面上除去点$z=\pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}$的部分.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{2z^5-z+3}{4z^2+1}=\frac{(10z^4-1)(4z^2+1)-(2z^5-z+3)\cdot 8z}{(4z^2+1)^2}=\frac{24z^6+10z^4+4z^2-24z-1}{(4z^2+1)^2}.$$

2. 由$v_y=u_x=2y$可推出$v(x,y)=y^2+\varphi(x)$. 又由$v_x=\varphi'(x)=-u_y=2(1-x)$可推出$\varphi(x)=2x-x^2+C$, 其中$C$为任意常数. 于是$f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}(y^2+2x-x^2+C)$. 令$y=0$得$f(x)=\mathrm{i}(2x-x^2+C)$. 由此可知$f(z)=\mathrm{i}(2z-z^2+C)$. 由$f(0)=\mathrm{i}$可得$C=-1$. 所以$f(z)=-\mathrm{i}(1-z)^2$.

3. $z=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$全都是一阶极点; $z=\infty$是非孤立奇点.

4. $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{(z-2)+2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}}$, $|z-2|<2$.

5. 略.

三、

1. 见教材8.1.3和11.1.2小节.

2. 点$(1,3)$的依赖区间为$[-5,7]$; 区间$[1,2]$的决定区域为$\{(x,t)|1+2t\le x\le 2-2t,0\le t\le 1/4\}$; 点$x=5$的影响区域为$\{(x,t)|5-2t\le x\le 5+2t,t\ge 0\}$. 最好绘制草图作答.

3. 设$u(x,t)=X(x)T(t)$, 把它代入方程中得
$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t),$$
即有
$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

由此得到两个常微分方程

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,$$
$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

再利用边界条件可得

$$X'(0)T(t)=X'(l)T(t)=0.$$

因为$T(t)\not\equiv 0$, 故必有

$$X'(0)=X'(l)=0.$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l, \\ X'(0)=X'(l)=0. \end{cases}$$

可得特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

由$T_n''(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0$可得

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}.$$

于是叠加所有变量分离形式的特解得

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

代入初始条件可得$D_n=0,1,2,\cdots,$

$$\begin{aligned} C_0=&\frac{1}{l}\int_0^l(-2\varepsilon x+\varepsilon l)\,\mathrm{d}x=0, \\ C_n=&\frac{2}{l}\int_0^l(-2\varepsilon x+\varepsilon l)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=-\frac{4\varepsilon}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{4\varepsilon l}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]. \end{aligned}$$

所以

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8\varepsilon l}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

4. $F[1]=2\pi\delta(\omega)$.

5. 作拉普拉斯变换得

$$s^2\widehat{y}(s)+2s-4+4\widehat{y}(s)=0.$$

从中解出$\widehat{y}(s)=\dfrac{4-2s}{s^2+4}=\dfrac{4}{s^2+4}-\dfrac{2s}{s^2+4}$. 再作逆变换便可得

$$y(t)=2\sin 2t-2\cos 2t.$$

四、 除了教材上讲的拉普拉斯变换解法外, 还可以用行波法求解.

设$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$. 代入初始条件得

$$f_1(x)+f_2(x)=0, \quad af_1'(x)-af_2'(x)=0, \qquad x\ge 0.$$

由第二个等式积分可得$f_1(x)-f_2(x)=C$, 这里C为一任意常数. 于是可解得

$$f_1(x)=-\frac{C}{2}, \quad f_2(x)=\frac{C}{2}, \qquad x\ge 0.$$

利用边界条件有$f_1(at)+f_2(-at)=f(t)$. 由此可知

$$f_2(x)=f\left(-\frac{x}{a}\right)-f_1(-x),\qquad x<0.$$

所以

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & x\geq at,\\ f\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & x\leq at.\end{cases}$$