

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 已知 $P(A) = 0.4$, $P(B|A) = 0.8$, $P(A|B) = 0.5$, 则 $P(A \cup B) = (\quad)$

2. 随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = E(X^2)\} = (\quad)$

3. 在平面上圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内任取三个点, 恰有两点落在第一象限的概率为 $(\quad)$

4. 设总体 X 服从参数为 1 的指数分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单

随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $(\quad)$

5. 随机变量 X 、 Y 的方差分别为 1 和 4, 相关系数为 0.5, 则随机变量 $3X - 2Y$ 的方差为 $(\quad)$

6. 随机变量 X 的密度函数为 $p(x) = ce^{-x^2+6x+1}$ (c 为常数)。则 $E[(X-3)^2] = (\quad)$

二. 单项选择题(每题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 设 X_1, X_2 是任意两个连续型随机变量, 它们的概率密度分别为 $f_1(x)$, $f_2(x)$,

它们的分布函数分别为 $F_1(x)$, $F_2(x)$, 则下列结论正确的是 $(\quad)$

(A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度 ;(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数;(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

2. 若 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-2x} & x \geq 1 \end{cases}$ 则 $P\{X < 1\} = (\quad)$

- (A) 1; (B) $1 - e^{-2}$; (C) $0.5 - e^{-2}$; (D) 0.5

3. 设 $E(X) = -2, D(X) = 1, E(Y) = 2, D(Y) = 4, \rho_{XY} = -0.5$,

则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X + Y| \geq 6\} \leq (\quad)$

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{3}{12}$ (C) $\frac{7}{36}$ (D) $\frac{1}{36}$

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自标准正态总体的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 为样本均值和样本方差, 则 ()

(A) $\bar{X}$ 服从标准正态分布; (B) $D(\sum_{i=1}^n X_i^2) = n$

(C) $n(\bar{X})^2$ 服从 $\chi^2(1)$; (D) $D(S^2) = 2(n-1)$

5. 总体 X 的方差 $DX = \sigma^2 > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ $n > 3$ 为来自总体 X 简单随机样本, 则在总体均值 μ 下列无偏估计中, 最有效的是 ()

(A) $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 iX_i$; (B) $\frac{1}{5}(X_1 + 2X_2 + 2X_2)$; (C) $\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_2)$

6. 某次乒乓球比赛共准备用球 500 只, 其中旧球 100 只; 每轮使用其中 50 只, 则六轮比赛后, 剩下的 200 只球中旧球数记为 X 新球数记为 Y , 则 X 和 Y 的相关系数为 ()

(A) 1; (B) -1; (C) 0.5; (D) 0

三. 计算题 (44 分, 解答写在答题纸上)

(一). (12 分) 若 X 为离散型随机变量且 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\} = 0.5$. Y 服从

标准正态分布, X, Y 相互独立; 试求 $Z = XY$ 的概率密度 $f_z(z)$

(二) (16 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

1. 求常数 c 2. 求出 X 、 Y 的边际分布密度

3. 说明 X 、 Y 是否独立, 为什么? 4. 求 $P\{2X - Y > 1\}$

(三) (16 分) 总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

1. 求参数 μ 和 σ^2 的极大似然估计, 并说明它们是否无偏估计?

2. 当 μ 已知时, 求参数 σ^2 的极大似然估计, 并说明它是否无偏估计?

四. (8 分) 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 已知时, 试写出参数假设检验问题

$H_0 : \mu < \mu_0$ (μ_0 已知) 的检验水平为 α 的检验步骤。

2013 春答案

一. 填空题

1. 0.72 ; 2. $0.5e^{-1}$; 3. $\frac{9}{64}$; 4. 2 ; 5. 13 ; 6. 0.5

二. 单选题

1-----6 DDACCB

三. (一) (12 分) 解: 记 Z 得分布函数为 $F_Z(z)$

$$\begin{aligned} \text{则 } F_Z(z) &= P\{XY \leq z\} = \sum_{i=1}^2 P\{X = i, XY \leq z\} = \sum_{i=1}^2 P\left\{X = i, Y \leq \frac{z}{i}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^2 P\{X = i\}P\left\{Y \leq \frac{z}{i}\right\} = \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\left\{Y \leq \frac{z}{2}\right\} \end{aligned}$$

因为 Y 服从标准正态分布

$$\text{于是 } F_Z(z) = \frac{1}{2} \Phi(z) + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$Z \text{ 的概率密度 } f_Z(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{8}} \right]$$

(二)

$$(1) \quad \because \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$(2) \quad X \text{ 的边缘分布密度 } p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$Y \text{ 的边缘分布密度 } p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2} & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $\because p(x, y) \neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、 Y 不独立,

$$(4) \quad P\{2X - Y > 1\} = \iint_{2x-y>1} p(x, y) dx dy = \frac{1}{4}$$

(三)

解：见课本 P154 例 5

四.

① 选取统计量 $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$;

② 给出检验水平 α , 查标准正态分布表使 $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$,

即 H_0 成立时, $P\{Z \geq z_\alpha\} \leq \alpha$; 取拒绝域为 $\{Z \geq z_\alpha\}$

③ 根据样本观察值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 算得 $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$;

④ 若 $Z \geq z_\alpha$ 则拒绝 H_0 ; 否则接受 H_0

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 已知 $P(A) = 0.4$, $P(B|A) = 0.8$, $P(A|B) = 0.5$ 则 $P(AB|A \cup B) = (\quad)$ 。

2. 随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} = (\quad)$ 。

3. 在区间 $(0, 1)$ 上任取两个点, 则两点之差绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $(\quad)$ 。

4. 设 X 服从 $N(\mu, 2^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 则参数

检验问题 $H_0: \mu = 0$; $H_1: \mu \neq 0$ 通常所用的统计量 $(\quad)$ 。

5. 随机变量 X 、 Y 的方差分别为 4 和 9, 相关系数为 0.5, 则随机变量 $X - 2Y$ 的方差为 $(\quad)$ 。

6. 随机变量 X 服从标准正态分布。则 $E[Xe^{2X}] = (\quad)$ 。

二. 单项选择题 (每题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 设事件 A, B 互不相容, 则 $(\quad)$ 。

(A) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0$; (B) $P(AB) = P(A)P(B)$;

(C) $P(\bar{A}) = 1 - P(B)$; (D) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$ 。

2. 设 X_1, X_2 是相互独立的随机变量, 其分布列分别为: $X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ $X_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

则 $P\{X_1 + X_2 = 2\} = (\quad)$ 。

(A) $\frac{1}{12}$; (B) $\frac{1}{8}$; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{1}{2}$ 。

3. 若 X 的分布列为 $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = 0.5$, Y 服从标准正态分布,

X, Y 相互独立; 则 $Z = XY$ 的分布函数 $F_z(z)$ 的间断点个数为 ()。

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

4. 设总体 X 服从参数为 1 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单

随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 ()。

(A) 常数 2; (B) 常数 3; (C) 常数 4; (D) 常数 6。

5. 总体 X 的方差 $DX = \sigma^2 > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ $n > 3$ 为来自总体 X 简单随机样本,

则在总体均值 μ 下列无偏估计中, 最有效的是 ()。

(A) $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 iX_i$; (B) $\frac{1}{7} (X_1 + 3X_2 + 3X_3)$;

(C) $\frac{1}{3} (X_1 + X_2 + X_3)$; (D) $\frac{1}{4} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ 。

6. X 和 Y 的相关系数为 0.3, $U = 2X + 1, V = 1 - Y$ 则 U 和 V 的相关系数为 ()
(A) 0.3; (B) -0.3; (C) 0.6; (D) -0.6。

三. 计算题 (47 分, 解答写在答题纸上)

(一) (12 分) 甲、乙、丙三个袋子中各装有 10 件同样产品, 其中的次品数分别为 0、1、2。

先随机选取一个袋子, 然后从中随机抽取一件产品检验; 由于技术原因正品被误判为次品的概率为 2%, 次品被误判为正品的概率为 5%;

1. 求抽取的待检验产品为正品的概率。

2. 求抽取的产品被检验为正品的概率。

(二) (16分) 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

1. 求常数 c 2. 求出 X 、 Y 的边缘分布密度

3. 说明 X 、 Y 是否独立, 为什么? 4. 求 $P\{X + Y < 1\}$

(三) (12分) 总体 X 的概率密度函数为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} & x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

1. 求参数 θ 的矩估计, 并说明它是否无偏估计? $E(X) = \theta$ $\hat{\theta}_{矩} = \bar{X}$ 是无偏

2. 求参数 θ 的极大似然估计。 $\hat{\theta}_{MLE} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i^{-1}}$

(四) (7分) 在区间 $[0, 1]$ 上随机取 n 个点, 坐标记为 $X_1, X_2, \dots, X_n$;

令 $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, 试求 Y 的概率密度函数和数学期望。

四. (5分) 总体 X 服从 $N(0, 2^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本

记 $Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)}$ 。证明: Y 服从 $F(10, 5)$

一. 填空题

1. $\frac{4}{9}$; 2. e^{-1} ; 3. $\frac{\bar{X}}{2} \sqrt{n}$; 4. $\frac{3}{4}$; 5. 28; 6. $2e^2$

二. 单选题 DCBADB

三.

(一) 解: 设 A_i 分别表示选中甲、乙、丙袋, $i=0,1,2$ 。

$A = \{\text{产品被判为合格}\}$ $B = \{\text{取出的待检产品为正品}\}$

则有 $P(A_i) = \left(\frac{1}{3}\right)$ $i=0,1,2$ 。 $P(A|B) = 98\%$ $P(A|\bar{B}) = 5\%$

$$P(B|A_0) = \frac{10}{10} = 1 \quad P(B|A_1) = \frac{9}{10} \quad P(B|A_2) = \frac{8}{10}$$

$$P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i) P(B|A_i) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{8}{10} = 0.9$$

$$\therefore P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0.9 \times 98\% + 0.1 \times 5\% = 0.887$$

即产品被判为合格的概率为 88.7%

(二) 解

$$(1) \quad \because \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1 \quad \therefore c = 3$$

$$(2) \quad X \text{ 的边际分布密度 } p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \frac{3}{2} (1 - y^2) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $\because p(x, y) \neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、 Y 不独立,

$$(4) \quad P\{X + Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} p(x, y) dx dy = \frac{3}{8}$$

(三)

解: 1. X 的分布密度 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

计算得 $E(X) = \theta$, 令 $\theta = \overline{X}$ 得 $\theta = \overline{X}$ 所以 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1 = \overline{X}$

因为 $E(\hat{\theta}_1) = E(\overline{X}) = \theta$, 所以 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计; 2. 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^2}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}}$

$$\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \ln \prod_{i=1}^n x_i^3 - \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i}$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{解得 } \theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad \text{时 } L(\theta) \text{ 达到最大值}$$

所以 $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ 为 θ 的最大似然估计

(四) 解: (过程略) Y 的分布密度 $p(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$$EY = \frac{n}{n+1}$$

四. 证明: $\frac{X_i}{2}$ 都服从 $N(0,1)$ 所以 $\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{10}^2}{4}$ 服从 $\chi^2(10)$

所以 $\frac{X_{11}^2 + X_{12}^2 + \cdots + X_{15}^2}{4}$ 服从 $\chi^2(5)$

显然上两个随机变量相互独立

所以 $Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \cdots + X_{15}^2)}$ 服从 $F(10,5)$

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 已知 $P(A) = 0.4$, $P(\overline{AB}) = 0.2$, $P(\overline{AB}) = 0.4$ 则 $P(AB|A \cup B) = (\quad)$ 。

2. 随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = \sqrt{D(X)}\} = (\quad)$ 。

3. 在区间 $(0, 1)$ 上任取两个数, 则两数之和小于 1 的概率为 $(\quad)$ 。

4. 设 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 未知; $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 则检验问题 $H_0: \mu = 0$; $H_1: \mu \neq 0$ 通常所用的统计量 $(\quad)$ 。

5. 随机变量 X 、 Y 的方差分别为 1 和 4, 相关系数为 0.5, 则随机变量 $3X - Y$ 的方差为 $(\quad)$ 。

6. 随机变量 X 服从标准正态分布。则 $E[X^2 e^X] = (\quad)$ 。

二. 单项选择题(每题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 设事件 $A = \{\text{甲种产品畅销, 乙种产品滞销}\}$, 则 A 的对立事件为 $(\quad)$ 。

- (A) 甲种产品滞销, 乙种产品畅销; (B) 甲种产品滞销;
(C) 甲、乙两种产品均畅销; (D) 甲种产品滞销或者乙种产品畅销。

2. 设 X_1, X_2 是相互独立的随机变量, 其分布列分别为: $X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ $X_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

则 $P\{X_1 X_2 = 2\} = (\quad)$ 。

- (A) $\frac{1}{12}$; (B) $\frac{1}{8}$; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{1}{2}$ 。

3. 若 X 的分布列为 $P\{X = 0.2\} = P\{X = 1\} = 0.5$, Y 服从标准正态分布,

X 、 Y 相互独立; 则 $Z = XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ()。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

4. 设总体 X 服 $[0, 2]$ 上的均匀分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单

随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于 ()。

- (A) 常数 1; (B) 常数 2; (C) 常数 3; (D) 常数 4。

5. 总体 X 的方差 $DX = \sigma^2 > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ $n > 3$ 为来自总体 X 简单随机样本,

则在总体均值 μ 下列无偏估计中, 最有效的是 ()。

- (A) $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 iX_i$; (B) $\frac{1}{7}(X_1 + 3X_2 + 3X_3)$;

- (C) $\frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$; (D) $\bar{X}$ 。

6. X 和 Y 的相关系数为 0.2, $U = X + 1, V = 1 - 2Y$ 则 U 和 V 的相关系数为 ()

- (A) 0.2; (B) -0.4; (C) -0.2; (D) 0.4。

三. 计算题 (47 分, 解答写在答题纸上)

(一) (12 分) 甲、乙、丙三个袋子中各装有 10 件同样产品, 其中的次品数分别为 1、2、3。

先随机选取一个袋子, 然后从中随机无放回抽取两件产品;

1. 求抽取产品正品和次品各一件的概率。
2. 若抽取产品正品和次品各一件; 求抽取的产品来自乙袋的概率。

(二) (16 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-x}, & 0 < x < +\infty, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

1. 求常数 c 2. 求出 X 、 Y 的边际分布密度
3. 说明 X 、 Y 是否独立，为什么？ 4. 求 $E(XY)$

(三) (10 分) 总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布； $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

1. 求参数 λ 的矩估计和极大似然估计。
2. 它们是否参数 λ 的无偏估计？是否参数 λ 的相合估计？。

(四) (9 分) 随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$ ， $F(x)$ 为 X 的分布函数

试求 $Y = F(X)$ 的概率密度函数和数学期望。

四. (5 分) 总体 X 服从 $N(0, 2^2)$ ， $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本

记 $Y = \frac{\sqrt{2}(X_1 + X_2 + \dots + X_5)}{(X_6^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)^{\frac{1}{2}}}$ 。证明： Y 服从 $t(10)$

特别提醒：一、二大题答案，请答在试题后的括号内；

其余大题，请答在答题纸上，要有必要的解题过程，
否则不得分。

2014 春概率统计 A 答案

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. $\frac{1}{4}$; 2. e^{-1} ; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n}$; 5. 7; 6. $2e^{\frac{1}{2}}$

二. 单选题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1-----6 DCAADC

(一) (12 分) 解: 设 A_i 分别表示选中甲、乙、丙袋, $i=0,1,2$.

$B = \{\text{抽取的产品正品和次品各一件}\}$

则有 $P(A_i) = \left(\frac{1}{3}\right) \quad i=0,1,2$.

$$P(B|A_0) = \frac{1}{5} \quad P(B|A_1) = \frac{16}{45} \quad P(B|A_2) = \frac{7}{15} \quad 4 \text{ 分}$$

$$P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i) P(B|A_i) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{16}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} = \frac{46}{135} \quad 8 \text{ 分}$$

$$\therefore P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{16}{45}}{\frac{46}{135}} = \frac{8}{23} \quad 12 \text{ 分}$$

(二) (16 分) 解 (每小题 4 分)

$$(1) \quad \because \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$(2) \quad X \text{ 的边际分布密度 } p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} x e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $\because p(x, y) \neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X, Y 不独立.

$$(4) \quad E(XY) = \int_0^{\infty} \int_0^x xye^{-x} dx dy = \underline{3}$$

(三) (10分)

解: 1. X 服从参数为 λ 的泊松分布

计算得 $E(X) = \lambda$, 令 $\lambda = \bar{X}$ 所以 λ 的矩估计 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 3 分

$$\text{似然函数 } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \cdots x_n!} e^{-n\lambda}$$

$$\ln L(\lambda) = (\sum_{i=1}^n x_i) \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n x_i! - n\lambda \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d\lambda} = 0 \quad \text{解得 } \lambda = \bar{X} \quad \text{时 } L(\theta) \text{ 达到最大值}$$

所以 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 也为 λ 的最大似然估计8 分

因为 $E(\bar{X}) = \lambda$, 所以是 λ 的无偏估计, 也是相合估计.10 分

$$(四) (9 \text{ 分}) \text{ 解: (过程略) } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$Y = F(X) \text{ 的概率密度函数 } p(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$EY = \frac{1}{2}$$

四. (5 分) 证明: $\frac{X_i}{2}$ 都服从 $N(0,1)$

$$\text{所以 } \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_5}{\sqrt{20}} \text{ 服从 } N(0,1)$$

$$\text{所以 } \frac{X_6^2 + X_7^2 + \cdots + X_{15}^2}{4} \text{ 服从 } \chi^2(10)$$

显然上两个随机变量相互独立

2014 春概率统计 A 答案

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. $\frac{1}{4}$; 2. e^{-1} ; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n}$; 5. 7; 6. $2e^{\frac{1}{2}}$

二. 单选题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1-----6 DCAADC

(一) (12 分) 解: 设 A_i 分别表示选中甲、乙、丙袋, $i=0,1,2$.

$B = \{\text{抽取的产品正品和次品各一件}\}$

则有 $P(A_i) = \left(\frac{1}{3}\right) \quad i=0,1,2$.

$$P(B|A_0) = \frac{1}{5} \quad P(B|A_1) = \frac{16}{45} \quad P(B|A_2) = \frac{7}{15} \quad 4 \text{ 分}$$

$$P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i) P(B|A_i) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{16}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} = \frac{46}{135} \quad 8 \text{ 分}$$

$$\therefore P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{16}{45}}{\frac{46}{135}} = \frac{8}{23} \quad 12 \text{ 分}$$

(二) (16 分) 解 (每小题 4 分)

$$(1) \quad \because \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$(2) \quad X \text{ 的边际分布密度 } p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} x e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $\because p(x, y) \neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X, Y 不独立.

$$(4) \quad E(XY) = \int_0^{\infty} \int_0^x xye^{-x} dx dy = \underline{3}$$

(三) (10分)

解: 1. X 服从参数为 λ 的泊松分布

计算得 $E(X) = \lambda$, 令 $\lambda = \bar{X}$ 所以 λ 的矩估计 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 3 分

$$\text{似然函数 } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \cdots x_n!} e^{-n\lambda}$$

$$\ln L(\lambda) = (\sum_{i=1}^n x_i) \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n x_i! - n\lambda \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d\lambda} = 0 \quad \text{解得 } \lambda = \bar{X} \quad \text{时 } L(\theta) \text{ 达到最大值}$$

所以 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 也为 λ 的最大似然估计8 分

因为 $E(\bar{X}) = \lambda$, 所以是 λ 的无偏估计, 也是相合估计.10 分

$$(四) (9 \text{ 分}) \text{ 解: (过程略) } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$Y = F(X) \text{ 的概率密度函数 } p(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$EY = \frac{1}{2}$$

四. (5 分) 证明: $\frac{X_i}{2}$ 都服从 $N(0,1)$

$$\text{所以 } \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_5}{\sqrt{20}} \text{ 服从 } N(0,1)$$

$$\text{所以 } \frac{X_6^2 + X_7^2 + \cdots + X_{15}^2}{4} \text{ 服从 } \chi^2(10)$$

显然上两个随机变量相互独立

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 已知 X 的分布列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$ 则 $P(X < 2 | X \neq 1) = (\quad)$ 。

2. 随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X \geq \sqrt{D(X)}\} = (\quad)$ 。

3. 在区间 $(0, 1)$ 上任取两个数, 则两数之和小于 0.5 的概率为 $(\quad)$ 。

4. 设 X 服从 $N(\mu, 2^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本,

则检验问题 $H_0: \mu = 1; H_1: \mu \neq 1$ 通常所用的统计量 $(\quad)$ 。

5. 随机变量 X, Y 的方差分别为 1 和 9, 相关系数为 $\frac{1}{3}$, 则随机变量

$X - Y$ 的方差为 $(\quad)$ 。

6. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 且 $D(X) = \sigma^2$

则 $D(X_1 + \bar{X}) = (\quad)$ 。

二. 单项选择题 (每题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 设 $f_1(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $N(1, \sigma^2)$ 的概率密度

若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 1 \\ bf_2(x), & x > 1 \end{cases}$ 为概率密度, 则 a, b 应取 $(\quad)$ 。

(A) $a = 1, b = 2$ (B) $a = 1, b = 1$ (C) $a = -1, b = 3$ (D) $a = 2, b = 1$

2. 设 X_1, X_2 的分布列都为: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 且 $P\{|X_1 X_2| = 0\} = 1$

则 $P\{X_1^2 + X_2^2 = 1\} = (\quad)$ 。

(A) 0; (B) 0.5; (C) 1; (D) 0.25。

3. 随机变量 X 服从标准正态分布。则 $E[(X-1)^2 e^X] = (\quad)$ 。

(A) $\sqrt{e}$; (B) $2\sqrt{e}$; (C) 1; (D) 2。

4. 设总体 X 服 $[0, 6]$ 上的均匀分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单

随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 ()。

(A) 常数 12; (B) 常数 3; (C) 常数 9; (D) 常数 6。

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自标准正态总体的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 为样本均值和样本方差, 则 ()

(A) $\bar{X}$ 服从标准正态分布; (B) $D(\sum_{i=1}^n X_i^2) = n$

(C) $\sqrt{n}\bar{X}$ 服从标准正态分布; (D) $D(S^2) = 2(n-1)$

6. X 和 Y 的相关系数为 0.4, $U = 2X + 1, V = 1 - 2Y$

则 U 和 V 的相关系数为 ()

(A) 0.2; (B) -0.8; (C) -0.2; (D) -0.4。

三. 计算题 (46 分, 解答写在答题纸上)

(一) (12 分) 设 X 的分布列为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = 0.5$, Y 服从标准正态分布,

X, Y 相互独立; 试求 $Z = Y/X$ 的分布密度函数 $f_z(z)$ 。

(二) (16 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2x, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

1. 求常数 c 2. 求出 X, Y 的边际分布密度

3. 说明 X, Y 是否独立, 为什么? 4. 求 X, Y 的协方差 $Cov(X, Y)$

(三) (10 分) 总体 X 概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$; 参数 $\lambda > 0$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

1. 求参数 λ 的矩估计和极大似然估计。

2. 它们是否参数 λ 的相合估计？。

(四) (8 分) 随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函

数 试求 $Y = F(X)$ 的概率密度函数和数学期望。

四. (6 分) 总体 X 数学期望 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2 > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自

总体 X 的简单随机样本; 证明: 在数学期望 μ 的所有线性无偏估计

$\hat{\mu} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ (其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为常数) 中,

$\bar{X}$ 方差最小。

2014 秋答案

一. 填空题

1. $\frac{1}{4}$; 2. $1 - e^{-1}$; 3. $\frac{1}{8}$; 4. $\frac{(\bar{X} - 1)}{2} \sqrt{n}$; 5. 8; 6. $\frac{n+3}{n} \sigma^2$

二. 单选题

1-----6 BBAACD

三.

(一) 解: 记 Z 得分布函数为 $F_Z(z)$

$$\begin{aligned} \text{则 } F_Z(z) &= P\left\{\frac{Y}{X} \leq z\right\} = \sum_{i=1}^2 P\left\{X = i, \frac{Y}{X} \leq z\right\} \\ &= \sum_{i=1}^2 P\{X = i\} P\{Y \leq iz\} = \frac{1}{2} P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2} P\{Y \leq 2z\} \\ &= \frac{1}{2} \Phi(z) + \frac{1}{2} \Phi(2z) \end{aligned}$$

$$f_z(z) = \frac{1}{2} [\phi(z) + 2\phi(2z)]$$

(二) 解

$$(1) \quad \because \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$(2) \quad X \text{ 的边际分布密度 } p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} 2x & 1 > x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2} & 2 > y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $\because p(x, y) \neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、 Y 不独立,

$$(4) \quad E(XY) = \int_0^1 \int_0^{2x} xy dx dy = \frac{1}{2} \quad E(X) = \int_0^1 \int_0^{2x} x dx dy = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^{2x} y dx dy = \frac{2}{3} \quad \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{18}$$

(三)

解： 1. X 服从参数为 λ 的指数分布

$$\text{计算得 } E(X) = \frac{1}{\lambda}, \text{ 令 } \frac{1}{\lambda} = \bar{X} \quad \text{所以 } \lambda \text{ 的矩估计 } \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$\text{似然函数 } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$$

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d\lambda} = 0 \quad \text{解得 } \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} \quad \text{时 } L(\theta) \text{ 达到最大值}$$

$$\text{所以 } \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} \text{ 也为 } \lambda \text{ 的最大似然估计}$$

它们都是 λ 的相合估计。

$$(四) \text{ 解: (过程略) } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$Y = F(X) \text{ 的概率密度函数 } p(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$EY = \frac{1}{2}$$

四. 证明: 略

一. 填空题

1. 已知 X 的分布列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$ 则 $P(X < 2 | X \geq 0) = (\quad)$ 。
2. X 服从 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则对 X 独立观察 3 次恰有 1 次大于 2 的概率为 $(\quad)$ 。
3. 设 X 服从 $N(\mu, 3^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 则检验问题 $H_0: \mu \leq 1; H_1: \mu > 1$ 通常所用的统计量 $(\quad)$ 。
4. 随机变量 X 、 Y 的方差分别为 4 和 9, 相关系数为 -0.5 , 则随机变量 $X - Y$ 的方差为 $(\quad)$ 。
5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 且 $D(X) = \sigma^2$ 则 $Cov(2X_1, \bar{X}) = (\quad)$ 。
6. 设 (X, Y) 服从正态分布 $N(2, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - 2Y < 0\} = (\quad)$ 。

二. 单项选择题

1. 设 $f_1(x)$ 为 $[1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $N(2, \sigma^2)$ 的概率密度 若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 2 \\ bf_2(x), & x > 2 \end{cases}$ 为概率密度, 则 a, b 应取 $(\quad)$ 。
(A) $a = -1, b = 3$; (B) $a = 1, b = 1$; (C) $a = 1, b = 2$; (D) $a = 2, b = 1$
2. 设 X_1, X_2 的分布列都为: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$ 则 $P\{X_1^2 + X_2^2 = 1\} = (\quad)$ 。
(A) 0; (B) 0.5; (C) 1; (D) 0.25。
3. 随机变量 X 服从标准正态分布。则 $E[(X^2 e^X)] = (\quad)$ 。
(A) $\sqrt{e}$; (B) $2\sqrt{e}$; (C) 1; (D) 2。

4. 设总体 X 服从参数为 2 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单

随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 ()。

(A) 常数 12; (B) 常数 3; (C) 常数 9; (D) 常数 6。

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自标准正态总体的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 为样本均值和样本方差, 则 ()

(A) $\bar{X}$ 服从标准正态分布; (B) $D(\sum_{i=1}^n X_i^2) = n$

(C) $n(\bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布; (D) $D(S^2) = 2(n-1)$

6. X 和 Y 的相关系数为 0.2, $U = -4X + 1, V = 1 - Y$ 则 U 和 V 的相关系数为 ()

(A) 0.2; (B) -0.8; (C) -0.2; (D) -0.4。

三. 计算题

(一) (12 分) 设 X 的分布列为 $P\{X = 1\} = P\{X = 0\} = 0.5$, Y 服从标准正态分布,

X, Y 相互独立; 试求 $Z = X^3 + Y$ 的分布密度函数 $f_z(z)$ 。

(二) (16 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 0 < x < 1, \quad 2x < y < 2. \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

1. 求常数 c
2. 求出 X, Y 的边际分布密度
3. 说明 X, Y 是否独立, 为什么?
4. 求 $P\{X + Y < 1\}$

(三) (10 分) 总体 X 服从 $[\lambda, 2]$ 上的均匀分布 (参数 $\lambda < 2$)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

1. 求参数 λ 的矩估计。
2. 求参数 λ 的极大似然估计。

(四) (8 分) 随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$,

$F(x)$ 为 X 的分布函数 试求 $Y = F(X)$ 的概率密度函数和数学期望。

四. (6 分) 总体 X 服从 $N(0, 2^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本

记 $Y = \frac{2(X_1 + X_2 + \dots + X_5)^2}{(X_6^2 + X_7^2 + \dots + X_{15}^2)}$ 。证明: Y 服从 $F(1, 10)$

讲习题答案

一. 填空题

1. $\frac{1}{4}$; 2. $\frac{4}{9}$; 3. $\frac{(\bar{X} - 1)}{3} \sqrt{n}$; 4. 19; 5. $\frac{2}{n} \sigma^2$; 6. $\frac{1}{2}$

二. 单选题

1-----6 BCBDCA

三.

(一) (12 分) 解: 记 Z 得分布函数为 $F_Z(z)$

$$\begin{aligned} \text{则 } F_Z(z) &= P\{X^3 + Y \leq z\} = \sum_{i=0}^1 P\{X = i, X^3 + Y \leq z\} \\ &= \sum_{i=0}^1 P\{X = i\} P\{Y \leq -i^3 + z\} = \frac{1}{2} P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2} P\{Y \leq z - 1\} \\ &= \frac{1}{2} \Phi(z) + \frac{1}{2} \Phi(z - 1) \end{aligned}$$

$$f_z(z) = \frac{1}{2} [\phi(z) + \phi(z - 1)]$$

(二) 解

$$(1) \quad \because \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

$$\therefore c = 1$$

$$(2) \quad X \text{ 的边际分布密度 } p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} 2 - 2x & 1 > x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} \frac{y}{2} & 2 > y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $\because p(x, y) \neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、 Y 不独立,

$$(4) \quad P\{X + Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} dx dy = \frac{1}{6}$$

(三)

解: 1. X 服从 $[\lambda, 2]$ 上的均匀分布

$$\text{计算得 } E(X) = \frac{\lambda + 2}{2}, \text{ 令 } \frac{\lambda + 2}{2} = \bar{X}$$

$$\text{所以 } \lambda \text{ 的矩估计 } \hat{\lambda}_1 = 2\bar{X} - 2$$

$$\text{似然函数 } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2-\lambda}\right)^n & \lambda \leq \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\hat{\lambda} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ 时 } L(\lambda) \text{ 达到最大值}$$

$$\text{所以 } \hat{\lambda}_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \text{ 为 } \lambda \text{ 的最大似然估计}$$

它们都是 λ 的相合估计。

$$(四) \text{ 解: (过程略) } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$Y = F(X) \text{ 的概率密度函数 } p(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$EY = \frac{1}{2}$$

四. 证明: 略

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 已知 $P(B) = 0.4$, $P(B|A) = 0.4$, $P(A|B) = 0.5$ 则 $P(AB|A \cup B) = (\quad)$ 。
2. X 服从均值为 2 的指数分布, 则概率 $P\{X > 2\} = (\quad)$ 。
3. 设 X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 未知; $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 则检验问题 $H_0: \mu = 0$; $H_1: \mu \neq 0$ 通常所用的统计量 $(\quad)$ 。
4. 随机变量 X 、 Y 的方差分别为 1 和 9; 关系数为 -0.5 , 则随机变量 $X - Y$ 的方差为 $(\quad)$ 。
5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, S^2 为样本方差 则 $D(S^2) = (\quad)$ 。
6. 设 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 4, 4; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} = (\quad)$ 。

二. 单项选择题 (每题 4 分, 共 24 分, 答案写在试题后的括号内)

1. 设 $f_1(x)$ 为 $[0, 4]$ 上均匀分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $N(1, \sigma^2)$ 的概率密度

若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 1 \\ bf_2(x), & x > 1 \end{cases}$ 为概率密度, 则 a, b 应取 $(\quad)$ 。

(A) $a = -1, b = 3$; (B) $a = 1, b = 1$; (C) $a = 1, b = 2$; (D) $a = 2, b = 1$

2. 设 X_1, X_2 的概率分布列都为: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$

则 X_1, X_2 的相关系数为 ()。

- (A) 0; (B) 0.5; (C) 1; (D) 0.25。

3. 随机变量 X 服从标准正态分布。则 $E[(X-1)^2 e^X] = ()$ 。

- (A) 1; (B) $2\sqrt{e}$; (C) $\sqrt{e}$; (D) 2。

4. 设总体 X 服从参数为 3 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单

随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 ()。

- (A) 常数 12; (B) 常数 3; (C) 常数 9; (D) 常数 6。

5. 总体 X 服从区间 $[\theta, \theta+1]$ 上的均匀分布, θ 为未知参数; $X_1, X_2, \dots, X_n$

是来自总体的简单随机样本, 则下面选项中不是统计量的是 ()。

- (A) $\bar{X} + 2$; (B) $\sum_{i=1}^n X_i^2 - D(X)$; (C) $n(\bar{X})^2$; (D) $\bar{X} + E(X)$

6. 一批产品共 5 件, 其中 2 件次品, 从中随机抽取 3 次, 每次抽 1 件, 抽后不放回, 则第 3 次才抽到次品的概率为 ()。

- (A) 0.1; (B) 0.2; (C) 0.4; (D) 0.8。

三. 计算题 (46 分, 解答写在答题纸上)

(一) (12 分) 设 X 的分布列为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = 0.5$, Y 服从标准正态分布,

X, Y 相互独立; 试求 $Z = \frac{Y}{X}$ 的分布密度函数 $f_z(z)$ 。

(二) (16 分) 设 (X, Y) 服从区域 D 上均匀分布, D 是由直线 $x=0, y=0,$

$x+2y=2$ 所围成的平面区域。

1. 求 (X, Y) 的联合概率密度函数 2. 求出 X, Y 的边缘分布密度

3. 说明 X, Y 是否独立, 为什么? 4. 求 $P\{X+Y < 1\}$

(三) (10 分) 总体 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \theta > 0$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

1. 求参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$ 。

2. 求 $\hat{\theta}$ 的数学期望，并说明是否 θ 的无偏估计。

(四) (8 分) 总体 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体的简单随机样本, $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,

试求 Y 的概率密度函数。

四. (6 分) 总体 X 服从 $N(0, 3^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{18}$ 为来自总体 X 的简单随机样本

记 $Y = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_9)}{(X_{10}^2 + X_{11}^2 + \dots + X_{18}^2)^{\frac{1}{2}}}$ 。证明: Y 服从 $t(9)$

2015 秋答案

一. 填空题

1. $\frac{2}{7}$; 2. e^{-1} ; 3. $\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n}$; 4. 13; 5. $\frac{2}{n-1} \sigma^4$; 6. $\frac{1}{2}$

二. 单选题

1-----6 DACADB

三.

(一) 解: 记 Z 得分布函数为 $F_Z(z)$

$$\begin{aligned} \text{则 } F_Z(z) &= P\left\{\frac{Y}{X} \leq z\right\} = \sum_{i=1}^2 P\left\{X = i, \frac{Y}{X} \leq z\right\} \\ &= \sum_{i=1}^2 P\{X = i\} P\{Y \leq iz\} = \frac{1}{2} P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2} P\{Y \leq 2z\} \\ &= \frac{1}{2} \Phi(z) + \frac{1}{2} \Phi(2z) \end{aligned}$$

$$f_z(z) = \frac{1}{2} [\phi(x) + 2\phi(2z)]$$

(二) (1)
$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

(2) X 的边际分布密度 $p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 2 > x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

Y 的边际分布密度

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx = \begin{cases} 2 - 2y & 1 > y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3) $\because p(x, y) \neq p_1(x)p_2(y)$ 所以 X 、 Y 不独立,

(4)
$$P\{X + Y < 1\} = \iint_{x+y < 1} dx dy = \frac{1}{2}$$

(三)

解： 1. 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{i=1}^n x_i$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d\theta} = 0 \quad \text{解出} \quad \hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ 为 } \theta \text{ 的最大似然估计}$$

$$2. \quad E(\hat{\theta}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n EX_i^2 = \frac{1}{2} E(X^2)$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = 2\theta \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = 2\theta$$

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad \text{是 } \theta \text{ 的无偏估计}$$

(四) 解：(过程略) X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$$Y \text{ 的概率密度函数 } p(x) = \begin{cases} ne^{-nx} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

四. 证明： 略