# 2016 春答案

一．填空题

1. 0.35　　2. $e^{-2\lambda}$　　3. 0.8　　4. $P\{\widehat{\theta}_1 < \theta < \widehat{\theta}_2\} \geq 0.95$

5. $C_1 = \frac{1}{3}$　$C_2 = \frac{2}{3}$　　6. $-\frac{1}{3}$

二．选择题　*BADDCB*

三．简答题

（1）有分布函数的定义知

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y\}$$

$$= P\{X \leq \sigma y + \mu\} = \int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\xrightarrow{\text{令}\frac{x-\mu}{\sigma}=t} = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

即 $Y \sim N(0,1)$

（2）边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

根据条件概率的定义，得

对于 $\forall y \in (0,1)$

$$f_{X|Y}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2x}{1-y^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于 $\forall x \in (0,1)$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（3）$X_1 - 2X_2 \sim N(0,5)$　$\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$

$3X_3 - 4X_4 \sim N(0,25)$　$\frac{3X_3 - 4X_4}{5} \sim N(0,1)$

即　$a = \frac{1}{5}$　$b = \frac{1}{25}$　　自由度为 2

四．综合题

（1）θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2\cdots X_n\}$

$X$ 的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

$X_{(n)}$ 的分布函数$F_{(n)}(x)=(F(x))^n=\begin{cases}0, & x<0\\ (\dfrac{x}{\theta})^n, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

$f_n(x)=F_{(n)}^{'}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x<\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

要使$E(C\hat{\theta})=CE(X_{(n)})=\dfrac{nC}{n+1}\theta=\theta$ 即$C=\dfrac{n+1}{n}$

（2）1> 任意一封信投入第$i$号信箱都是等可能的概率为$\dfrac{1}{3}$

| $Y/X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |
| 1 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 |

边缘分布：

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

$P(X=2,Y=1)\ne P(X=2)P(Y=1)$ 即不独立

2> $D(X-Y)=DX+DY-2COV(X,Y)$ $EX=\dfrac{2}{3}$ $EX^2=\dfrac{8}{9}$ $DX=\dfrac{4}{9}$ $DY=\dfrac{4}{9}$

$COV(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$ $E(XY)=\dfrac{2}{9}$ $COV(X,Y)=-\dfrac{2}{9}$

$D(X-Y)=\dfrac{4}{3}$

3>

| $U$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{9}$ |

## 一、填空题(共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

1. 三批产品，第一批优质品率为 0.2，第二批优质品率为 0.5，第三批优质品率为 0.35，现从这三批中任取一批再从该批中任取一件产品，则取到优质品的概率为__________。

2. 设离散型随机变量 $X$ 的分布律为 $P\{X=i\}=a\dfrac{(2\lambda)^i}{i!}$ （$\lambda>0$） $i=0,1,2,3,\cdots$ 则 $a=$ ________。

3. 设X的分布律为$\begin{pmatrix} X & 0 & 1 & 2 \\ P & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$，其分布函数为 $F(x)$ ，则 $F(1.5)=$________.

4. 设随机变量X的所有可能取值为1 和 $\alpha$ ，且 $P\{X=1\}=0.4$，$E(X)=0.2$ ，则 $\alpha=$______

5. 设 $\widehat{\theta_1}$ 和 $\widehat{\theta_2}$ 都是总体 $X$ 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，如果满足__________ 则称随机区间 $\left[\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}\right]$是未知参数 $\theta$ 的**95%**的置信区间。

6. 设 $\widehat{\theta_1}$ 和 $\widehat{\theta_2}$ 是 $\theta$ 的 2 个独立的无偏估计量，且假定 $D(\widehat{\theta_1})=2D(\widehat{\theta_2})$ ，令 $\hat{\theta}=C_1\widehat{\theta_1}+C_2\widehat{\theta_2}$，若 $\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的无偏估计量，又使 $D(\hat{\theta})$ 达到最小，则 $C_1=$____ $C_2=$_______

## 二、单项选择题(共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

1. 随机事件 $A$ 和 $B$ ，适合 $B\subset A$ ，则以下各式错误的是（ ）。

$A.$ $P(A\cup B)=P(A)$ $B.$ $P(B\setminus A)=P(B)$ $C.$ $P(\overline{AB})=P(\overline{A})$ $D.$ $P(B)\le P(A)$

2. 当随机变量 $X$ 的取值范围为区间（ ）时，则 $f(x)=\cos x$ 为随机变量 $X$ 的分布密度函数。

$A.\ \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　$B.\ \left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$　　$C.\ [0,\pi]$　　$D.\ \left[\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right]$

3. 每次试验成功的概率为 $p\ (0<p<1)$，则在三次重复独立试验中至多失败两次的概率为（　）。

$A.\ 3p(1-p)^2$　　$B.\ 3p^2(1-p)$　　$C.\ 1-p^3$　　$D.\ 1-(1-p)^3$

4. 函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x\le\pi\\ 1, & x\ge\pi\end{cases}$ 是(　)。

A 某一离散型随机变量的分布函数　　B 某一连续性随机变量的分布函数

C.既不是连续性也不是离散型随机变量的分布函数　　D 不可能为某一随机变量的分布函数。

5. 设随机变量 $X$ 的数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X-\mu|\ge 3\sigma\}\le$(　)。

$A.\ \dfrac{1}{6}$　　$B.\ \dfrac{1}{3}$　　$C.\ \dfrac{1}{9}$　　$D.\ \dfrac{1}{27}$

6. 假设检验中，显著性水平 $\alpha$ 表示（　）。

A $H_0$为假，但接受$H_0$的假设的概率　　B $H_0$为真，但拒绝$H_0$的假设的概率

C $H_0$为假，但拒绝$H_0$的假设的概率　　D 可信度

## 三、简答题(共 3 小题，共 25 分)

1.（7 分）$X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试证明 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 服从正态分布 $N(0,1)$。

2. （10 分）已知 $(X,Y)$ 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,0<y<x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

试求：

（1）$X,Y$ 的边缘概率密度；

（2）$X$ 和 $Y$ 的条件概率密度函数。

3.（8 分）设 $X_1,X_2,X_3,X_4$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，设

$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 为 $\chi^2$ 分布，试求 $a,b$ 的值，并说明该 $\chi^2$ 分布的自由度是多少？

## 四、综合题（共 2 小题，共 27 分）

（一）（12 分）设随机变量 $X$ 在区间 $\left[0,\ \theta\right]$ 上服从均匀分布，其中 $\theta$ 未知，并设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，是来自总体 $X$ 的一个样本，试求

（1）$\theta$ 的极大似然估计；

（2）确定常数 $C$，使 $C\hat{\theta}$ 为 $\theta$ 的无偏估计。

（二）（15 分）将两封信投入 3 个编号分别为 1,2,3 的信筒，设X,Y分别表示投入第 1,2 号信筒的数目，试求

（1） 二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布，并判断 $X$ 和 $Y$ 的独立性;

（2） 方差 $D(X-Y)$；

（3） $U=\max\{X,Y\}$ 的分布律。

# 2016 秋

## 一．填空题

1．事件$A$、$B$相互独立，且$P(B)=0.5, P(B-A)=0.2$则$P\left(A-B\right)=$(　　　)。

2．随机变量$X$服从标准正态分布。　则$E[(Xe^{2X}]=$（　　　　）。

3．设$X$服从$N(\mu,\sigma^2)$；$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体$X$的简单随机样本，

则检验问题$H_0:\sigma^2=1$;　$H_1:\sigma^2\neq 1$ 通常所用的统计量为（　　　　）。

4．随机变量$X$、$Y$的方差分别为1和4；相关系数为$-0.5$，则随机变量$3X-Y$的方差为（　　　）。

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$为来自总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，

记统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ ，　则$D(Y)=$（　　　）。

6.设（$X$，$Y$）服从正态分布$N(1,0;4,4;0)$，　则$E(X^2Y^2)=$(　　　　)。

## 二．　单项选择题

1．设$f_1(x)$、$f_2(x)$分别为$X_1,X_2$的概率分布密度，则下列选项中一定为某一随机变量概率分布密度的是（　　　）。

（A）$f_1(x)f_2(x)$;（B）$2f_1(x)-f_2(x)$;（C）$f_1(x)+f_2(x)$;（D）$\frac{1}{3}f_1(x)+\frac{2}{3}f_2(x)$

2．设$X_1,X_2$的概率分布列都为:$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，且$Cov(X_1,X_2)=-\frac{1}{9}$

则概率$P\{X_1^2+X_2^2=1\}=$（　　　　）。

(A)0；　　(B)$\frac{1}{3}$；　　(C)1；　　(D)$\frac{2}{3}$。

3．随机变量$X\sim b(3,p)$，$Y\sim b(2,p)$。如果$P\{X\geq 1\}=\frac{19}{27}$

则$P\{Y=1\}=$（　　　）。

(A) $\frac{2}{9}$ ； (B) $\frac{1}{3}$ ； (C) $\frac{4}{9}$ ； (D) $\frac{5}{9}$ 。

4．设总体 $X$ 服从 $N(0,\sigma^2)$， $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本，

则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^3$ 依概率收敛于（　　　　）。

（A） 0； （B）$\sigma^2$； （C） $\sigma^3$； （D）1。

5．总体 $X$ 服从区间 $[1-\theta,\ \theta+1]$ 上的均匀分布，$\theta>0$ 为未知参数；

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本。

则下面选项中**不是统计量**的是（　　　　）。

(A) $\overline{X}+2$ ； （B）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2-D(X)$； （C） $n(\overline{X})^2$； （D）$\overline{X}+E(X)$

6. 一批产品共 10 件,其中 2 件次品,从中随机抽取 3 次,每次抽 1 件,抽后不放回,则第 3 次才抽到正品的概率为（　　　　）。

(A) $\frac{1}{45}$ ； (B) 0.2 ； (C) $\frac{7}{45}$ ； （D） 1。

三．计算题

（一）设 $X$ 的分布列为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=0.5$；

在 $X=k$ 的条件下，$Y$ 服从区间 $[0,\ k]$ 上的均匀分布（$k=1,2$），

试求 $Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 和 $Y$ 概率分布密度 $f_Y(y)$。

（二）设二维随机变量 $(X,Y)$ 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}cxe^{-y}, & 0<x<1, 0<y<+\infty,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

1.求常数 $c$　　　2. 求出 $X$ 、$Y$ 的边际分布密度

3,说明 $X$ 、$Y$ 是否独立，为什么？　4.　求 $E(X^2Y)$

（三）总体 $X$ 的概率分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{(x-b)}{\theta}}, & x\ge b\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}\qquad \theta>0,\quad b\ \text{为实数}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X$的简单随机样本。

1．当$b = 0$时，求参数$\theta$的矩估计$\widehat{\theta}$。

2. 当$\theta = 1$时，求参数$b$的极大似然估计$\widehat{b}$。

3. 当$\theta = 1$时，求出极大似然估计$\widehat{b}$的概率密度函数。

四．总体$X$服从$N(0,3^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{18}$为来自总体$X$的简单随机样本

记$Y = \dfrac{(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_9^2)}{(X_{10} + X_{11} + \cdots + X_{18})^2}$。证明：$Y$ 服从$F(9,1)$

# 2016 秋答案

一．填空题

1． $0.3$；2．$2e^2$；3． $(n-1)S^2$； 4．$19$；5．$2n\sigma^4$；6．$20$

二．单选题

1-----6 $DDCABA$

三．（一）解：据题意

$$X=1\text{时：}P\{Y\le y|X=1\}=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

$$X=2\text{时：}P\{Y\le y|X=2\}=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{y}{2} & 0\le y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}$$

$$P\{Y\le y\}=\sum_{i=1}^{2}P\{X=i\}P\{Y\le y|X=i\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \dfrac{3}{4}y & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4} & 1\le y<2\\ 1 & 2\le y\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4} & 0<y<1\\ \dfrac{1}{4} & 1<y<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（二）解

（1） $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$

$\therefore c = 2 \qquad f(x, y) = \begin{cases} 2xe^{-y}, & 0 < x < 1, 0 < y < +\infty, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$

（2） $X$ 的边际分布密度 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} 2x & 1 > x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$Y$ 的边际分布密度

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

（3）$\because$ $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 所以 $X$ 、$Y$ 独立，

（4） $E(X^2Y) = EX^2EY = \frac{1}{2}$

（三）

解： 1. 当 $b = 0$ 时，$X$ 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, x \geq 0 & \theta > 0, \\ 0，\text{其它。} \end{cases}$$

$X$ 密度函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x \geq 0 & \theta > 0, \\ 0，\text{其它。} \end{cases}$

$EX = \theta \qquad \therefore \qquad \hat{\theta} = \bar{X}$ 为 $\theta$ 的矩估计

2. 当 $\theta = 1$ 时，$X$ 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x-b)}, x \geq b \\ 0，\text{其它。} \end{cases}$$

$X$ 密度函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-(x-b)}, x \geq b \\ 0，\text{其它。} \end{cases}$

$$似然函数 L(b)=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + nb} & b \le \min(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$\therefore$ $b$ 的极大似然估计 $\widehat{b}=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

3. 当 $\theta=1$ 时，$X$ 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-(x-b)}, x \ge b \\ 0，其它。\end{cases}$$

$$\widehat{b}=\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$\widehat{b}$ 的分布函数

$$F_{\widehat{b}}(x)=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases} 1-e^{-n(x-b)}, x \ge b \\ 0，其它。\end{cases}$$

$\widehat{b}$ 的概率密度函数 $f_{\widehat{b}}(x)=\begin{cases} ne^{-n(x-b)} & x > b \\ 0 & 其它 \end{cases}$

四．证明： 略

# 2017 春

## 一． 填空题

1．已知$P(A)=0.6$，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$，则$P(B)=$（　　　　）。

2．随机变量$X$服从标准正态分布，则$E(X^2e^{2X})=$（　　　　）。

3．设$X$服从$N(\mu,\sigma^2)$；$\sigma^2$未知，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体$X$的简单随机样本，则检验问题$H_0$：$\mu=1$；$H_1$：$\mu\neq 1$通常所用的统计量为（　　　　）。

4．随机变量$X$、$Y$的方差分别为4和9；相关系数为$-0.5$，则随机变量$2X-Y$的方差为（　　　　）。

5．设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$为来自总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，$\bar{X}$、$S^2$分别为样本均值和样本方差，则$Cov(\bar{X},S)=$（　　　　）。

6．从分别写有自然数1到9的九张卡片中，无放回的任取四张，则第三张取到偶数的概率为(　　　　)。

## 二． 单项选择题

1．设$f_1(x)$、$f_2(x)$分别为$X_1,X_2$的分布函数，则下列选项中一定为某一随机变量概率分布函数的是（　　　　）。

（A）$f_1(x)f_2(x)$;（B）$2f_1(x)-f_2(x)$;（C）$f_1(x)+f_2(x)$;（D）$f_1(x)-f_2(x)$.

2．设$X_1$、$X_2$的概率分布列都为$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，且$P(X_1X_2=0)=1$，则概率$P(X_1+X_2=1)=$（　　　　）。

(A) 0；　(B) $\frac{1}{2}$;　(C) 1；　(D) $\frac{1}{4}$.

3．随机变量$X$的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 0.7x^2 & 0<x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}$，则概率$P(\mathrm{X}=1)=$（　　）.

(A) 1；　(B) 0.7；　(C) 0.5；　(D) 0.3.

4．设总体$X$服从参数为的θ泊松分布，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，则当$n \to \infty$时，　则 $\bar{X}$ 依概率收敛于（　　　　）。

（A）0；　　（B）$\theta^2$；　　（C）$\theta$；　　（D）1。

5．总体$X$服从区间$[\theta - 1, \ \theta + 1]$上的均匀分布，$\theta > 0$为未知参数；$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体的简单随机样本。则下面选项中不是统计量的是（　　　　）。

（A）$\overline{X} + 2$；　（B）$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - D(X)$；　（C）$n(\overline{X})^2$；　（D）$\overline{X} + E(X)$。

6.随机变量$X$、$Y$的相关系数为1，已知 $X \sim U[-1, 1]$, $EY = 2, DY = 3$ 则（　　　　）。

(A)　$Y \sim U[-1, 5]$；　(B) $Y \sim N(2, 9)$　；(C) $Y \sim U[1, 3]$；（D）$Y \sim N(2, 3)$。

三．计算题

（一）设$X$的分布列为$P\{X = 1\} = P\{X = 2\} = 0.5$；$Y \sim U[0, 1]$

且$X$、$Y$相互独立，$Z = X + Y$, 试求出 $Z$ 的分布密度函数 $f_Z(z)$。

（二）设二维随机变量$(X, Y)$的密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-y}, & 0 < x < +\infty, \ \ x < y < +\infty, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

1．求常数$c$;
2．求出$X$、$Y$的边际分布密度;
3．分别求出关于$X$、$Y$的 条件密度函数;
4．　求 $P\{X + Y < 2\}$.

（三）总体$X$的概率分布密度函数为:

$$f(x;\beta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\beta)}, & x > \beta, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中β为实数。$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X$的简单随机样本。

1. 求参数β的矩估计$\widehat{\beta_1}$；

2. 求参数β的极大似然估计$\widehat{\beta_2}$；

3. 矩估计$\widehat{\beta_1}$,极大似然估计$\widehat{\beta_2}$是不是参数β的无偏估计，为什么？

四．总体 $X$ 服从$N(0\ ,\sigma^2)$ ，$X_1, X_2, \cdots, X_{18}$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，

记$Y=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{(X_{10}^2+X_{11}^2+\cdots+X_{18}^2)^{0.5}}$。证明：$Y$ 服从自由度为 9 的 $t$ 分布。

# 2017 春答案

一． 填空题

1． 0.6 ； 2． $5e^2$ ； 3． $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-1)}{S}$； 4． 37 ； 5. 0； 6. $\frac{4}{9}$

二． 单选题

1-----6 $ABDCDA$

三．

（一）解：据题意

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=P(X=1)P(X+Y\le z|X=1)+P(X=2)P(X+Y\le z|X=2)$$

$$=0.5P(Y\le z-1)+0.2P(Y\le z-2)$$

$$=0.5F_Y(z-1)+0.5F_Y(z-2)$$

所以分布密度为 $f_Z(z)=0.5f_Y(z-1)+0.5f_Y(z-2)$

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2} & z\in[1\ ,\ 3]\\ 0 & 其它\end{cases}$

（二）解 （1） $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

$c=1$ ，

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0<x<+\infty,\quad x<y<+\infty\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（2） $X$ 的边际分布密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$Y$ 的边际分布密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

（3）当$x>0$时，$f_{(Y|X)}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{-(y-x)} & y>x\\ 0 & 其它\end{cases}$

当$y>0$时，$f_{(X|Y)}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y} & y>x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

（4） $P\{X+Y<2\}=\int_0^1 dx\int_{\mathrm{x}}^{2-x} e^{-y}\, d=1-2e^{-1}+e^{-2}$

（三）解：1. $X$ 密度函数

$$f(x;\beta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\beta)} & x>\beta\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$E(X)=\beta+0.5$　　所以参数β的矩估计$\widehat{\beta_1}=\overline{\mathrm{X}}-0.5$

2.

似然函数$L(\beta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\beta)} & x_i>\beta\ \ i=1,\cdots n\\ 0 & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\beta)} & \beta<min\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2.\cdots \mathrm{x}_\mathrm{n}\}\\ 0 & 其它\end{cases}$

参数β的极大似然估计$\widehat{\beta_2}=Min\{X_1,\cdots,X_n\}$

3. $X$ 其分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\beta)} & x>\beta\\ 0 & 其它\end{cases}$

$\widehat{\beta_2}=Min\{X_1,\cdots,X_n\}$的分布函数$\mathrm{G}(x)=1-[1-F(x)]^n$

$=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\beta)} & x>\beta\\ 0 & 其它\end{cases}$

概率密度函数$g(x;\beta)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\beta)} & x>\beta\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$E(\bar{X}-0.5)=\beta\quad E(Min(X_1\cdots,X_n)=\beta+\frac{1}{2n}$$

矩估计$\widehat{\beta_1}$是参数β的无偏估计，$\widehat{\beta_2}$不是参数β的无偏估计

四．证明：　略

# 2017 秋

## 一．填空题

1．已知 $P(B)=0.4$ ，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$ ，则 $P(\bar{A})=$ (　　　　)。

2．随机变量$X$服从标准正态分布。　则$E[(X+1)^2e^X]=$（　　　　）。

3．设 $X$ 服从$N(\mu,\sigma^2)$；$\sigma^2$未知，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自总体 $X$ 的简单随机样本，则检验问题$H_0$：$\mu=0$ ；　$H_1$：$\mu\neq 0$　通常所用的统计量（　　　）。

4．随机变量 $X$ 、$Y$ 的方差分别为 1 和 4；相关系数为$-0.25$，则随机变量 $2X+Y$ 的方差为（　　　　）。

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$为来自总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，$\bar{X}$ 、$S^2$分别为样本均值和样本方差，则$Cov(\bar{X},S^2)=$（　　　）。

6.从分别写有自然数 1 到 10 的十张卡片中，无放回的任取三次，每次取一张。则第三次才取到偶数的概率为(　　　　)。

## 二．　单项选择题

1．设 $f_1(x)$、 $f_2(x)$分别为$X_1,X_2$的概率分布函数，则下列选项中一定为某一随机变量概率分布函数的是（　　　）。

（A）$f_1^2(x)f_2(x)$ ；（B）$2f_1(x)-f_2(x)$;（C）$f_1(x)+f_2(x)$;（D）$f_1^2(x)+f_2(x)$ 。

2．设$X_1$、$X_2$的概率分布列都为:$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ ，且$P(X_1X_2=0)=1$，　则概率 $P(X_1+X_2=1)=$（　　　　）。

(A) 0；　　(B) $\frac{1}{2}$ ；　　(C) 1；　　(D) $\frac{1}{4}$ 。

3．随机变量 $X$ 的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 0.6x^2 & 0<x<1\\ 1 & 1\leq x\end{cases}$，则概率$P(X<1)=$（　　　）。

(A)　1　；　(B)　0.4；　(C)　0.6　；　(D)　0.5　。

4．设总体$X$服从参数为的θ 泊松分布，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，

则当$n\to\infty$时， 则（$\overline{X}$）$^2$依概率收敛于（　　　　　）。

（A） 0；　　（B） $\theta^2$；　　（C） $\theta$；　　（D） 1。

5．总体$X$服从区间$[1-\theta,\ \theta+1]$上的均匀分布，$\theta>0$为未知参数；

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的简单随机样本。则下面选项中**不是统计量**的是（　　　　　）。

（A） $\overline{X}+2$ ；　（B）$\sum_{i=1}^{n}X_i^2-D(X)$；　（C）$n(\overline{X})^2$；　（D）$\overline{X}+E(X)$。

6.随机变量$X$、$Y$的相关系数为 1，已知 $X\sim U[0,2]$，$EY=2,DY=3$ 则

(A)　$Y\sim U[-1,5]$；(B) $Y\sim N(-2,4)$ ；(C) $Y\sim N(2,3)$ ；(D) $Y\sim U[-1,4]$。

三．**计算题**

（一））设$X$的分布列为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=0.5$；$Y$的分布密度函数

为$f_Y(y)=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，且$X$、$Y$相互独立，$Z=X+Y$.

试求出 $Z$ 的分布密度函数 $f_Z(z)$

（二）设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}cye^{-x} & 0<x<+\infty,\ 0<y<x\\ 0 & 其它\end{cases}$$

1.求常数$c$　　　2. 求出$X$、$Y$的边际分布密度

3,分别求出关于$X$、$Y$的条件密度函数　　4. 求 $EX$

（三）总体 $X$ 的**概率分布函数为**:

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-e^{-(x-\beta)} & x>\beta \\ 0 & 其它\end{cases}\quad，\beta \text{ 实数}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本。

1． 求参数β的矩估计$\widehat{\beta_1}$。

2. 求参数β的极大似然估计$\widehat{\beta_2}$。

3. 求出极大似然估计$\widehat{\beta_2}$的概率分布密度函数。

4. 令 $\widehat{\beta_3}=\widehat{\beta_2}-\frac{1}{\mathrm{n}}$ 验证它是参数β的无偏估计。

四．总体 $X$ 服从$N(1\ ,\sigma^2)$ ，$X_1,X_2,X_3,X_4$为来自总体 $X$ 的简单随机样本

记 $Y=\frac{X_1-X_2}{|\mathrm{X}_3+\mathrm{X}_4-2|}$ 。证明：$Y$ 服从自由度为 1 的 $t$ 分布

# 2017 秋答案

一．填空题

1．$0.6$ ；  2．$5e^{0.5}$ ；3．$\frac{\sqrt{n}(\bar{X})}{S}$；  4．$6$ ；5. $0$ ；  6. $\frac{5}{36}$

二．单选题

1-----6  *AACBBA*

三．

（一）解：据题意

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=P(X=1)P(X+Y\le z|X=1)+P(X=2)P(X+Y\le z|X=2)$$

$$=0.5P(Y\le z-1)+0.5P(Y\le z-2)$$

$$=0.5F_Y(z-1)+0.5F_Y(z-2)$$

所以分布密度为  $f_Z(z)=0.5f_Y(z-1)+0.5f_Y(z-2)$

所以  $f_Z(z)=\begin{cases}(z-1) & 1<z<2\\(z-2) & 2<z<3\\0 & 其它\end{cases}$

（二）解

（1）  $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

$c=1$ ，

$$f(x,y)=\begin{cases}ye^{-x} & 0<x<+\infty,\ \ 0<y<x\\0 & 其它\end{cases}$$

（2）$X$ 的边际分布密度  $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0.5x^2e^{-x} & x>0\\0 & x\le 0\end{cases}$

$Y$ 的边际分布密度  $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\0 & y\le 0\end{cases}$

（3）当$x>0$时，$f_{(Y|X)}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{2y}{x^2} & 0<y<x\\0 & 其它\end{cases}$

当$y>0$时，$f_{(X|Y)}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} e^{-(x-y)} & x>y \\ 0 & 其它 \end{cases}$

（4） $EX=3$

（三）

解：1. $X$ 密度函数

$$f(x;\beta)=\begin{cases} e^{-(x-\beta)} & x>\beta \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$E(X)=\beta+1$ 所以参数β的矩估计$\widehat{\beta_1}=\overline{X}-1$

2.

似然函数$L(\beta)=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\beta)} & x_i>\beta \ \ i=1,\cdots n \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\beta)} & \beta<min\{x_1,x_2.\cdots x_n\} \\ 0 & 其它 \end{cases}$

参数β的极大似然估计$\widehat{\beta_2}=Min\{X_1,\cdots,X_n\}$

3. $X$ 其分布函数为$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-(x-\beta)} & x>\beta \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$\widehat{\beta_2}=Min\{X_1,\cdots,X_n\}$的分布函数$G(x)=1-[1-F(x)]^n$

$=\begin{cases} 1-e^{-n(x-\beta)} & x>\beta \\ 0 & 其它 \end{cases}$

概率密度函数$g(x;\beta)=\begin{cases} ne^{-n(x-\beta)} & x>\beta \\ 0 & 其它 \end{cases}$

4. $E(Min(X_1\cdots,X_n)=\beta+\frac{1}{n}$ $E\acute{\beta}_3=\beta$

所以 $\widehat{\beta_3}$是参数β的无偏估计

四. 证明： 略

# 2018 春

## 一、填空题

1. 已知 $P(\mathrm{A})=0.5, P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0.8,$ A 和 B 相互独立，则 $P(\mathrm{B})=$ _____.

2. 将不同的两封信随机地投入 3 个邮筒中，则第一个邮筒中有一封信的概率是_____.

3. 随机变量 $X$ 服从期望是 2 的指数分布，则 $P(X<1)=$ ________.

4. 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(1,4)$，$Y$ 服从 $N(2,1)$，且 $X$ 和 $Y$ 相互独立, 则 $2X-3Y$ 服从________分布（要求分布包括参数）.

5. 设总体 $X$ 服从正态 $N(0,1)$，$X_1,X_2,X_3,X_4$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本，统计量

$$Y=\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$$ 服从_______分布(要求包括自由度).

6. 设总体 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，样本容量 $n=16$，样本均值的观察值为 5.2，则 $\mu$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为______________（已知 $z_{0.025}=1.96, t_{0.025}(15)=2.1315$）.

## 二、单项选择题

1. 下列函数中，可作为随机变量的概率密度函数的是(　　).

(A) $f(x)=\begin{cases} x^2, 0<x<1, \\ 0, 其他 \end{cases}$　　(B) $f(x)=\begin{cases} \cos x, 0<x<\pi, \\ 0, 其他 \end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases} \sin x, 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, 其他 \end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases} \sin x, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, 其他 \end{cases}$

2. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y=e^X$, 关于 $Y$ 的概率密度函数，正确的是(　　).

(A) $f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e, & y>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y\le 0 \end{cases}$　　(B) $f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$

(C) $f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$　　(D) $f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases} 0, & y>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y\le 0 \end{cases}$

3. 若方差 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，则下列一定正确的是(　　).

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　　(B) $X$与$Y$ 相互独立

(C) $X$与$Y$ 不相互独立　　　(D) $E(XY)=E(X)E(Y)$

4. 随机的掷 6 个骰子，利用切比雪夫不等式估计， 6 个骰子出现点数之和在 15 点到 27 点之间的概率不小于(　　).

(A) $\frac{37}{72}$　　(B) $\frac{53}{72}$　　(C) $\frac{25}{36}$　　(D) $\frac{29}{36}$

5. 设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数，$X_i=\begin{cases}1, & 事件A发生\\ 0, & 否则\end{cases}$，i=1, 2, ⋯，100，且 $P(\text{A})=0.8$，

$X_1$，$X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知，$P(Y\le y)$ 的值近似于(　　).

(A) $\Phi(\frac{y-80}{4})$　　(B) $\Phi(y)$　　(C) $\Phi(16y+80)$　　(D) $\Phi(\frac{y-80}{16})$

6. 在假设检验问题中，显著性水平 $\alpha$ 的意义是(　　).

(A) 原假设 $\text{H}_0$ 成立，经检验被拒绝的概率　　(B) 原假设 $\text{H}_0$ 成立，经检验被接受的概率

(C) 原假设 $\text{H}_0$ 不成立，经检验被拒绝的概率　　(D) 原假设 $\text{H}_0$ 不成立，经检验被接受的概率

## 三、 计算题

1. 某人去外地参加会议，乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为 0.3、0.2、0.1 和 0.4，若乘飞机不会迟到，乘火车、轮船、汽车迟到的概率分别为 0.25、0.5 和 0.5，求

(1) 此人迟到的概率.

(2) 若此人迟到，求他乘火车去开会的概率.

2. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(1) 求 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2) 判断 $X$ 和 $Y$ 是否相互独立, 并说明原因.

3. 随机变量 $X$ 的分布律为 $\begin{pmatrix} X & -1 & 1 \\ p_k & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，随机变量 $Y$ 的概率密度是

$f(y)=\begin{cases} 2y, & 0<y<1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$，$X$与$Y$ 相互独立，$Z=XY$，求

(1) $Y$ 的分布函数 . (2) 概率 $P\{Y<E(Y)\}$. (3) 协方差 $Cov(X,Z)$.

4. 设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta-1}, 1\le x\le\theta \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，其中 $\theta$ 为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本。求：

(1) 求 $\theta$ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$，并判断 $\hat{\theta}_1$ 是否为无偏估计, 说明原因.

(2) 求 $\theta$ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_2$，并求 $\hat{\theta}_2$ 的概率密度函数.

5. 设某次考试的考生成绩服从期望是 μ 的正态分布。从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得这 36 位考生的平均成绩为 66.5 分，样本标准差为 15 分。在显著水平 0.05 下，试检验假设：

$H_0:\mu=70, \quad H_1:\mu\ne 70$.（已知 $t_{0.025}(35)=2.0301; t_{0.05}(35)=1.6896$；

$t_{0.025}(36)=2.0281; t_{0.05}(36)=1.6883$）.

## 四、证明题

设总体 $X$ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，$X_1$，$X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一组简单随机样本。记

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2, \quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 ,$$

证明 $\hat{\sigma}^2$ 和 $S^2$ 都是 $\sigma^2$ 的无偏估计。

# 2018 春答案

一、0.6； $\frac{4}{9}$ ； $1-e^{-\frac{1}{2}}$ ； $N(-4,25)$ ； t(2); (4.71,5.69)

二、 CBDAAA

三、

1.（1）设迟到记为事件 A，乘火车、轮船、汽车、飞机分别记为事件 $B_1,B_2,B_3,B_4$ 由全概率公式， $P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.3\times0.25+0.2\times0.5+0.1\times0.5=0.225$

（2）由贝叶斯公式， $P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{0.3\times0.25}{0.225}=\frac{1}{3}$

2.

（1） $f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2),0<x<1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$； $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}\text{-}y)，0<y<1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$

（2） $f_X(x)f_Y(x)\neq f(x,y)$，不独立；

3.

$$(1).\qquad F(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \int_0^y 2tdt=y^2, 0<y<1\\ 1, y>1\end{cases}$$

$$(2)\qquad E(Y)=\int_0^1 2y^2dy=2\frac{y^3}{3}|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$P\{Y<E(Y)\}=P\{Y<\frac{2}{3}\}=F(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}$$

$$(3)\qquad Cov(X,Z)=Cov(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$$

$$EX=0, EX^2=1$$

$$\Rightarrow Cov(X,Z)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=\frac{2}{3}$$

4.

(1) $\overline{X}=EX=\frac{1+\theta}{2}\Rightarrow\hat{\theta}_1=2\overline{X}-1$ ；

$E[\hat{\theta}_1]=2E[\overline{X}]-1=2\times\frac{1+\theta}{2}-1=\theta$，是无偏估计

（2） $\hat{\theta}_2=\max_{1\le i\le n}\{X_i\}$

$$F_{X_i}(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ \dfrac{x-1}{\theta-1}, 1<x<\theta\\ 1, x\ge\theta\end{cases}\Rightarrow F_{\hat{\theta}_2}(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ (\dfrac{x-1}{\theta-1})^n, 1<x<\theta\\ 1, x\ge\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\hat{\theta}_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta-1}(\dfrac{x-1}{\theta-1})^{n-1}, 1<x<\theta\\ 0, \quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{n}{(\theta-1)^n}(x-1)^{n-1}, 1<x<\theta\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

5. 由题意知, 样本均值为$\overline{x}=66.6$ , 样本标准差$s=15$ , 样本容量$n=36$

$H_0:\mu=70 \qquad H_1:\mu\ne 70$

检验统计量$t=\dfrac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{n}}$

临界点为$\pm t_{0.025}(35)=\pm 2.0301$; 拒绝域为$(2.0301,+\infty)\cup(-\infty,-2.0301)$

代入观察值，计算得$t=\dfrac{\overline{x}-70}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}=-1.4$，没有落在拒绝域内，不能拒绝原假设。

四、证: $E(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\sigma^2$；

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow E[\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}]=n-1\Rightarrow E(S^2)=\sigma^2$ 或者

$$E[S^2]=E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\overline{X}^2)]=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i{}^2)-nE(\overline{X}^2)]$$
$$=\frac{1}{n-1}[n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}]=\sigma^2$$