一、填空题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 设 n 阶方阵 A、 B、C 满足 $\mathrm{ABC}=\boldsymbol{I}$，则 $\mathrm{B}^{-1}=($ $)$.

解：$\mathrm{ABC}=\boldsymbol{I} \Longrightarrow \mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{C}^{-1}=(\mathrm{CA})^{-1} \Longrightarrow \mathrm{B}^{-1}=\mathrm{CA}$.

2. 行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}+A_{45}=($ $)$.

解：$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}+A_{45}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$.

3. 设 3 阶方阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\gamma_1 \\ 3\gamma_2 \end{pmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$，且 $|\mathrm{A}|=6$，$|\mathrm{B}|=2$，则 $|\mathrm{A}-\mathrm{B}|=($ $)$.

解：$|\mathrm{A}|=6 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\gamma_1 \\ 3\gamma_2 \end{vmatrix}=6 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}=1$；$\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}=2$；

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\gamma_1 \\ 3\gamma_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ \gamma_1 \\ 2\gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}-\mathrm{B}|=\begin{vmatrix} \alpha-\beta \\ \gamma_1 \\ 2\gamma_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} \alpha-\beta \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}=2\left(\begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}\right)=2(1-2)=-2.$$

4. 若 3 阶方阵 A 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$，

则 $|\mathrm{A}^{-1}+2\boldsymbol{I}|=($ $)$.

解：A 的特征值为：-1，1，1；

A^{-1} 的特征值为：-1，1，1；

$\mathrm{A}^{-1}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值为：1，3，3；则 $|\mathrm{A}^{-1}+2\boldsymbol{I}|=9$.

5. 设 3 阶矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，B 为非零矩阵，且 $\mathrm{AB}=O$，则 $a=($ $)$.

解：$\mathrm{A}\neq O$，$\mathrm{B}\neq O$，则 $r(\mathrm{A})\geq 1$，$r(\mathrm{B})\geq 1$；

$AB = O \Longrightarrow r(A) + r(B) \le 3$；

所以，$1 \le r(A) \le 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow a = -3$.

二、选择题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 设 A、 B 为 n 阶方阵，则下列选项中正确的是（ D ）.

(A) 若 A、 B 都可逆，则 $A^* + B^*$ 一定可逆；

(B) 若 A、 B 都不可逆，则 $A^* + B^*$ 一定不可逆；

(C) 若 A 可逆，但 B 不可逆，则 $A^* + B^*$ 一定不可逆；

(D) 以上三选项都不对.

2. 设 β_1, β_2 是方程组 $Ax = b$ 的两个不同解，α_1, α_2 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，则 $Ax = b$ 的一般解为（ B ）.

(A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ ；　(B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{2}$；

(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{2}$；　(D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

解：$Ax = b$ 的一般解 $x = x_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$

1) x_0 可取 $\dfrac{\beta_1 + \beta_2}{2}$；

2) ξ_1, ξ_2 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，可取 $\xi_1 = \alpha_1$，$\xi_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)$，显然二者线性无关；

3) $\beta_1 - \beta_2$ 是方程组 $Ax = 0$ 的解，但不一定与 α_1 线性无关.

3. A、B 为 n 阶矩阵，且 $A \sim B$，则（ D ）.

(A) $\lambda \boldsymbol{I} - A = \lambda \boldsymbol{I} - B$；　(B) A 和 B 有相同的特征值和特征向量；

(C) $AB \sim B^2$ ；　(D) 对任意常数 t，均有 $tE - A \sim tE - B$.

解：多项式 $f(x) = t - x$，t 为任意常数；

则 $f(A) = tE - A$；$f(B) = tE - B$；

因为 $A \sim B$，所以 $f(A) \sim f(B)$；即 $tE - A \sim tE - B$.

4. 若 n 阶矩阵 A 经过若干次初等变换化为 B，则必有(A)

(A) $r(\mathrm{A})=r(\mathrm{B})$；　　(B) 存在可逆阵 Q，使得 $\mathrm{B}=\mathrm{AQ}$；

(C) 方程 $AX=0$ 与 $\mathrm{B}X=0$ 同解；　　(D) $|\mathrm{A}|=|\mathrm{B}|$；

解：$\mathrm{A}\xRightarrow{\text{初等变换}}\mathrm{B}$，初等变换不改变矩阵的秩；

且存在可逆阵 P,Q，使得 $\mathrm{B}=\mathrm{PAQ}$；

$AX=0\Longrightarrow X$ 的每一列均为齐次线性方程组 $\mathrm{A}x=0$ 的解向量；

$\mathrm{B}X=0\Longrightarrow X$ 的每一列均为齐次线性方程组 $\mathrm{B}y=0$ 的解向量；

而 $\mathrm{B}y=0\Longleftrightarrow\mathrm{PAQ}y=0\Longleftrightarrow\mathrm{AQ}y=0\Longrightarrow\mathrm{Q}y=x.$

5. 矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1，则 $a=$ (C).

(A) 1　　(B) -1　　(C) $-\frac{1}{3}$　　(D) 3

解：伴随矩阵 A^* 的秩为 1，则 $r(\mathrm{A})=3\Longrightarrow|\mathrm{A}|=0\Longrightarrow a=-\frac{1}{3}$.

三、计算和证明(共 36 分，每题 6 分)

1. 计算 $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\3&4&5&\cdots&1&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\3&4&5&\cdots&1&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1-n&\cdots&1&1\\1&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -(n-1) \\ 1 & 1 & \cdots & -(n-1) & 1 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & -(n-1) & \cdots & 1 & 1 \\ -(n-1) & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1\text{ 阶}}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & -(n-1) \\ -1 & 1 & \cdots & -(n-1) & 1 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ -1 & -(n-1) & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n-2]{r_i-r_{n-1}}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)\cdot(-n)^{n-2}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-1}.$$

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AX=A+2X$，求矩阵 X.

解：$AX=A+2X\Longrightarrow(A-2\boldsymbol{I})X=A$，这里 $A-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，

又 $|A-2\boldsymbol{I}|=-1\neq0$，则矩阵 $A-2\boldsymbol{I}$ 可逆；

从而，$(A-2\boldsymbol{I},A)=\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{I},X)$，所以，$X=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

3. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵，B 是 $m \times n$ 矩阵（$n < m$），又 $\mathrm{AB} = \boldsymbol{I}$（$n$ 阶单位矩阵），

证明：B 的列向量组线性无关.

证：$n = r(\boldsymbol{I}) = r(\mathrm{AB}) \le r(\mathrm{B}) \le n \Longrightarrow r(\mathrm{B}) = n \Longrightarrow$ 秩$\{$B 的列向量组$\} = n$，

即 B 的列向量组线性无关.

4. 求向量组 $\alpha_1 = (1,3,2,0)$，$\alpha_2 = (7,0,14,3)$，$\alpha_3 = (2,-1,0,1)$，$\alpha_4 = (5,1,6,2)$

的秩，及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $\mathrm{A} = (\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \alpha_3^{\mathrm{T}}, \alpha_4^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xRightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 秩$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = 3$；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组；

(3) $\alpha_4 = \dfrac{2}{3}\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_3$.

5. 设 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，分析 A 是否可对角化；

若能，求出相应的可逆矩阵 P 与对角阵 Λ，使得 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \Lambda$；

若不能，说明理由.

解：解：A 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I} - \mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$，

A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = -1$；

(1) 对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，由$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \mathrm{A})x = 0$，

即 $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$，得基础解系 $\begin{cases} \xi_1 = (1,4,0)^{\mathrm{T}} \\ \xi_2 = (1,0,4)^{\mathrm{T}} \end{cases}$，

(2) 对于 $\lambda_3=-1$，由$(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

$$\text{即}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\4&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\text{，得基础解系为}\ \xi_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}\text{，}$$

(3) 3 阶矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，所以 A 可对角化.

(4) 记矩阵 $\mathrm{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&0&0\\0&4&1\end{pmatrix}$，

且 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 R^3的一组基，求基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵.

解：两种方法：

(1) 方法 1：$\alpha_1+\alpha_2=1\alpha_1+2\left(\frac{1}{2}\alpha_2\right)+0\left(\frac{1}{3}\alpha_3\right)$；

$\alpha_2+\alpha_3=0\alpha_1+2\left(\frac{1}{2}\alpha_2\right)+3\left(\frac{1}{3}\alpha_3\right)$；

$\alpha_3+\alpha_1=1\alpha_1+0\left(\frac{1}{2}\alpha_2\right)+3\left(\frac{1}{3}\alpha_3\right)$；

则 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$；

于是，求从基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵

为 $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.

(2) 方法 2：记矩阵 $\mathrm{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，B 可逆.

① $\mathrm{B}_1=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}=\mathrm{BC}_1$

则 $\mathrm{C}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$是基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$的过渡矩阵；

② $\mathrm{B}_2=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\mathrm{BC}_2$，

则 $C_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 是基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵，

③设 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为 C，

则 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)C$

即 $B_2=B_1C\Longrightarrow BC_2=BC_1C$，B 可逆；

从而有 $C_1C=C_2$，求解该矩阵方程

$$(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1/2&0&1&1&0\\0&0&1/3&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&2&2&0\\0&0&1&0&3&3\end{pmatrix}=(I,C)$$

则过渡矩阵 $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.

四、证明题（8 分）

设 A 为 n 阶矩阵，若存在正整数 $k(k\geq 2)$，使得 $A^k\alpha=0$, 但 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，这里 α 为 n 维非零列向量，证明：$\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

证：设 $c_0\alpha+c_1A\alpha+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}\alpha=0\qquad(*)$

且 $A^k\alpha=0$，则 $A^{k+1}\alpha=0$，$A^{k+2}\alpha=0$，…，$A^{k+k-1}\alpha=0$；

①在 $(*)$ 式两边同乘 A^{k-1}，得

$c_0A^{k-1}\alpha+c_1A^{k-1}A\alpha+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}A^{k-1}\alpha=0$

整理，即得 $c_0A^{k-1}\alpha=0$，已知 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，所以 $c_0=0$；

②$(*)$ 式变为 $c_1A\alpha+\cdots+c_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$

在上式两边同乘 A^{k-2}，A^{k-3}，…，A，依次得到 $c_1=c_2=\cdots=c_{k-2}=0$

③$(*)$ 式变为 $c_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$，已知 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，所以 $c_{k-1}=0$；

由上可知，$\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

五、（13 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，已知方程组 $Ax=b$ 无解，

(1) 求 a 的值；

(2) 求方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的一般解.

解：

(1) $Ax=\beta$方程组的增广矩阵

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1-a&0\\0&-1&2a-1&1\\0&0&a(2-a)&a-2\end{array}\right)$$

因为方程组 $Ax=\beta$ 无解，则 $a=0$；

(2) 此时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$；

则 $A^{\mathrm{T}}A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$，$A^{\mathrm{T}}\beta=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$；

方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的增广矩阵

$$(A^{\mathrm{T}}A,A^{\mathrm{T}}\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)=(U,d)$$

取 x_3 为自由未知量，

①令 $x_3=0$，代入 $\mathrm{U}x=d$，得原方程组的一个特解 $x_0=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$；

②令 $x_3=1$，代入 $\mathrm{U}x=0$，得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系 $\xi=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

则原方程组的一般解为 $x=x_0+k\xi=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 任意.

六、（13 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的规范形为 $z_1^2+z_2^2$，

(1) 求 a 的值；

(2) 用正交变换法将二次型化为标准形，并写出对应的正交矩阵.

解：二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

(1) 由已知，得 $r(A)=2 \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow a=0$；从而 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

(2) A 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$，

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$；

①对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由$(\lambda_1\boldsymbol{I}-A)x=0$，

即 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases}\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}\\ \xi_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$，（显然 ξ_1,ξ_2 正交）

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$$令\ \beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

2)单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}};$$

②对于特征值 $\lambda_3=0$，由$(\lambda_3\boldsymbol{I}-A)x=0 \Leftrightarrow Ax=0$，

即 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，

且使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$；

④令 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x=\mathrm{Q}y$，原二次型就化成标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x=y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Q})y=2y_1^2+2y_2^2$.