

## 一、填空题(共 18 分)

1. 设  $A$  是 3 阶方阵,  $|A| = 3$ ,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵, 则  $|3A^{-1}| = ( \quad )$ ,  
 $|A^*| = ( \quad )$ ,  $|3A^* - 7A^{-1}| = ( \quad )$ .

解:  $|3A^{-1}| = 3^3|A^{-1}| = 3^3 \frac{1}{|A|} = 9$ ;  $|A^*| = |A|^{3-1} = 9$ ;

$$|3A^* - 7A^{-1}| = |3|A|A^{-1} - 7A^{-1}| = |2A^{-1}| = 2^3|A^{-1}| = \frac{8}{3}.$$

2. 设  $\alpha = (1, -2, 3)^T$ ,  $\beta = (-1, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $A = \alpha\beta$ , 则  $|A^{100}| = ( \quad )$ .

解:  $A = \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$

$$|A^{100}| = |A|^{100} = 0.$$

3. 设向量  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$  是矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  的一个特征向量, 则  $k = ( \quad )$ .

解: 设向量  $\alpha$  是  $A$  的特征值  $\lambda$  对应的特征向量, 则  $A\alpha = \lambda\alpha$ ,

$$\text{即 } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 + k + 1 = \lambda \\ 1 + 2k + 1 = \lambda k \end{cases}$$

$$\Rightarrow (k-1) = \lambda(k-1) \Rightarrow \begin{cases} k-1=0 \Rightarrow k=1, \lambda=4; \\ k-1 \neq 0 \Rightarrow \lambda=1, k=-2 \end{cases}.$$

4.  $A$  为 3 阶实对称矩阵, 向量  $\xi_1 = (1, 2, 5)^T$ ,  $\xi_2 = (k, 2k, 3)^T$  是分别对应于特征值 2 和 3 的特征向量, 则  $k = ( \quad )$ .

解: 由题意知:  $\xi_1, \xi_2$  正交, 即  $(\xi_1, \xi_2) = 0 \Rightarrow 1 \cdot k + 2 \cdot 2k + 5 \cdot 3 = 0$

从而  $k = -3$ .

5. 设  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  为 4 元非齐次线性方程组  $Ax = b$  的三个解,  $r(A) = 3$ , 已知

$$\eta_1 + \eta_2 = (3, 4, 5, 6)^T, \eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T, \text{ 则 } Ax = b \text{ 的一般解为 } ( \quad ).$$

解:  $r(A) = 3 \Rightarrow Ax = 0$  的基础解系含有  $4 - r(A) = 1$  个向量.

$Ax = b$  的一般解为  $x = x_0 + k\xi$ ;

(1)  $x_0$  可取  $\eta_3$ ;

(2) 取  $\xi = (\eta_1 - \eta_3) + (\eta_2 - \eta_3) = \eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3 = (1, 0, -1, -2)^T$ ;

于是,  $Ax = b$  的一般解  $x = (1, 2, 3, 4)^T + k(1, 0, -1, -2)^T$ ,  $k$  任意.

## 二、选择题(共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 设  $M$ 、 $P$  为  $n$  阶矩阵, 且  $P$  可逆, 则下列运算不正确的是( D ).

A.  $|M| = |P^{-1}MP|$ ;                      B.  $|2E - M| = |2E - P^{-1}MP|$ ;

C.  $|2E - M| = |2E - (P^{-1}MP)^T|$ ;    D.  $P^{-1}MP = M$ .

解: A.  $|M| = |P^{-1}MP| = |P^{-1}| \cdot |M| \cdot |P| = |M|$ ;

B.  $|2E - M| = |P^{-1}| \cdot |2E - M| \cdot |P| = |P^{-1}(2E - M)P| = |2E - P^{-1}MP|$ ;

C.  $|2E - (P^{-1}MP)^T| = |(2E - P^{-1}MP)^T| = |2E - P^{-1}MP| = |2E - M|$ ;

D.  $P^{-1}MP = M$  结论不一定成立;  $MP$  不一定等于  $PM$ .

2. 设  $M$ 、 $N$ 、 $P$  为同阶矩阵, 下列结论成立的有( D ).

A.  $MN = NM$ ;                      B.  $(M+N)^{-1} = M^{-1} + N^{-1}$ ;

C. 若  $MP = NP$ , 则  $M = N$ ;    D.  $(M+N)^T = M^T + N^T$ .

3. 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 线性方程组  $Ax = b$  有解的充分条件为( A ).

A. 矩阵  $A$  行满秩;                      B. 矩阵  $A$  列满秩;

C. 矩阵  $A$  的秩小于其行数;            D. 矩阵  $A$  的秩小于其列数.

解:  $A$  行满秩  $\Rightarrow r(A, b) = r(A) \Leftrightarrow Ax = b$  有解.

4. 设  $A$  是  $n$  阶实对称矩阵,  $P$  是  $n$  阶可逆矩阵; 若  $n$  维列向量  $\alpha$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则矩阵  $(P^{-1}AP)^T$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量是( B ).

A.  $P^{-1}\alpha$ ;    B.  $P^T\alpha$ ;    C.  $P\alpha$ ;    D.  $(P^{-1})^T\alpha$ .

解: 已知  $A\alpha = \lambda\alpha$ , 且  $A^T = A$ ; 记  $P^{-1}AP = Q$ , 则  $(P^{-1}AP)^T = Q^T$ ;

则  $PQ = AP \Rightarrow Q^TP^T = P^TA^T$ ,  $A$  对称

$\Rightarrow Q^TP^T = P^TA \Rightarrow Q^TP^T\alpha = P^TA\alpha = \lambda P^T\alpha$ .

5. 设向量  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关,  $\alpha, \beta, \delta$  线性相关, 下列哪个成立( C ).

- A.  $\alpha$  必可由  $\beta, \gamma, \delta$  线性表示; B.  $\beta$  必不可由  $\alpha, \gamma, \delta$  线性表示;  
C.  $\delta$  必可由  $\alpha, \beta, \gamma$  线性表示; D.  $\delta$  必不可由  $\alpha, \beta, \gamma$  线性表示.

解:  $\alpha, \beta, \gamma$  线性无关, 则  $\alpha, \beta$  线性无关; 又  $\alpha, \beta, \delta$  线性相关,

则  $\delta$  可由  $\alpha, \beta$  线性表示, 即  $\delta = k_1\alpha + k_2\beta = k_1\alpha + k_2\beta + 0\gamma$ .

6. 设  $A$  是  $n$  ( $n \geq 2$ ) 阶可逆矩阵, 交换  $A$  的第 1 行与第 2 行得矩阵  $B$ ;  $A^*$ 、 $B^*$  分别为  $A$ 、 $B$  的伴随矩阵, 则( C ).

- A. 交换  $A^*$  的第一列与第二列得  $B^*$ ; B. 交换  $A^*$  的第一行与第二行得  $B^*$ ;  
C. 交换  $A^*$  的第一列与第二列得  $-B^*$ ; D. 交换  $A^*$  的第一行与第二行得  $-B^*$ .

解:  $A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} B$ , 则  $B = E_{12}A \Rightarrow \begin{cases} |B| = |E_{12}A| = -|A| \\ B^{-1} = (E_{12}A)^{-1} = A^{-1}E_{12}^{-1} = A^{-1}E_{12} \end{cases}$

于是  $B^* = |B|B^{-1} = -|A|A^{-1}E_{12} = -A^*E_{12}$ ;

得  $-B^* = A^*E_{12} \Leftrightarrow$  交换  $A^*$  的第 1 列和第 2 列得到  $-B^*$ .

### 三、计算题(共 4 题, 共 28 分)

1. 计算行列式的值: 
$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解: 行列式  $D \xrightarrow{c_1 + c_2 + \cdots + c_{n+1}} \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (n+1) \cdot (-1)^{n+1+1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (n+1) a_1 a_2 \cdots a_n.$$

2. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 矩阵  $X$  满足  $A^*X = A^{-1} + 2X$ , 其中  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 求矩阵  $X$ .

解:  $A^*X = A^{-1} + 2X \Rightarrow (A^* - 2I)X = A^{-1}$

$$\Rightarrow A(A^* - 2I)X = AA^{-1} = I \Rightarrow (|A|I - 2A)X = I$$

$$\Rightarrow X = (|A|I - 2A)^{-1}; \text{ 又 } |A| = 4,$$

$$\text{则 } |A|I - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2B,$$

$$\text{这里 } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ 从而 } X = (2B)^{-1} = \frac{1}{2}B^{-1}$$

$$\text{由 } (B, I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (I, B^{-1}),$$

$$\text{得 } B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 于是 } X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 已知  $R^3$  的两组基  $B_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  和  $B_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , 其中

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T;$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, -1)^T, \beta_3 = (1, 2, 0)^T.$$

(1) 求基  $B_1$  到基  $B_2$  的过渡矩阵  $A$ ;

(2) 已知  $\alpha$  在基  $B_1$  下的坐标向量为  $(1, -2, -1)^T$ , 求  $\alpha$  在基  $B_2$  下的坐标向量.

解: 仍记  $B_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $B_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ .

(1) 由  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$ , 即得  $B_2 = B_1A$ ,

$$\text{于是, } (B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = (I, A)$$

则基  $B_1$  到基  $B_2$  的过渡矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ .

(2) 两种方法: 已知  $\alpha_{B_1} = (1, -2, -1)^T$

方法 1:  $\alpha = B_1 \alpha_{B_1} = (1, -1, -2)^T$ , 又有  $\alpha = B_2 \alpha_{B_2}$ , 则求解该方程组

$$(B_2, \alpha) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right),$$

则  $\alpha$  在基  $B_2$  下的坐标向量  $\alpha_{B_2} = (5, 7, -4)^T$ .

方法 2: 因为  $A \alpha_{B_2} = \alpha_{B_1}$ , 求解该方程组

$$(A, \alpha_{B_1}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right),$$

则  $\alpha$  在基  $B_2$  下的坐标向量  $\alpha_{B_2} = (5, 7, -4)^T$ .

4. 求向量组  $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\alpha_2 = (2, 1, -3, 7)$ ,  $\alpha_3 = (4, 1, -1, 7)$ ,  $\alpha_4 = (3, 1, 0, 3)$ ,  $\alpha_5 = (4, 1, 3, -1)$  的秩, 及其一个极大线性无关组, 并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解: 记矩阵  $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

(1) 秩  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = 3$ ;

(2)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  的一个极大线性无关组;

(3)  $\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ,

$$\alpha_5 = -\alpha_2 + 2\alpha_4.$$

#### 四、证明题(共 1 题, 共 8 分)

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $4A^2 - I = O$ , 证明:

(1)  $A$  的特征值只能为  $-\frac{1}{2}$  或  $\frac{1}{2}$ ; (2)  $r(2A + I) + r(2A - I) = n$ .

证:

(1) 设  $A$  的特征值为  $\lambda$ , 则  $4A^2 - I$  的特征值为  $4\lambda^2 - 1$ ,

因为  $4A^2 - I = O$ , 而零矩阵  $O$  的特征值均为 0,

于是有  $4\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$  或  $\frac{1}{2}$ ;

(2)  $4A^2 - I = O \Rightarrow (2A + I)(2A - I) = O$ , 则

$$\textcircled{1} r(2A + I) + r(2A - I) \leq n;$$

$$\textcircled{2} r(2A + I) + r(2A - I) = r(2A + I) + r(I - 2A)$$

$$\geq r(2A + I + (I - 2A)) = r(2I) = n;$$

于是,  $r(2A + I) + r(2A - I) = n$ .

#### 五、解方程组 (共 1 题, 13 分)

当  $\lambda$  取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解: 系数矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \lambda \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \lambda \end{pmatrix}$ .

$$\text{又 } |A| = \begin{vmatrix} 1 + \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 3)$$

①当  $|A| \neq 0$ , 即当  $\lambda \neq 0$  且  $\lambda \neq -3$  时, 方程组有唯一解;

②当  $\lambda = 0$  时, 增广矩阵

$$(A, b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

方程组出现矛盾方程，则原方程组无解；

③当  $\lambda = -3$  时，增广矩阵

$$(A, b) = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (U, d)$$

取  $x_3$  为自由未知量，

1) 令  $x_3 = 0$ ，代入  $Ux = d$ ，得原方程组的一个特解  $x_0 = (-1, -2, 0)^T$ ；

2) 令  $x_3 = 1$ ，代入  $Ux = 0$ ，得  $Ax = 0$  的一个基础解系  $\xi = (1, 1, 1)^T$ ；

则原方程组的通解为  $x = x_0 + k\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $k$  任意；

综上， $\begin{cases} \text{当 } \lambda \neq 0 \text{ 且 } \lambda \neq -3 \text{ 时，方程组有唯一解；} \\ \text{当 } \lambda = 0 \text{ 时，方程组无解；} \\ \text{当 } \lambda = -3 \text{ 时，方程组有无穷多解。} \end{cases}$

## 六、二次型（共 1 题，12 分）

二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$  的秩为 2，

(1) 求  $c$ ；

(2) 用正交变换法将二次型化为标准形，并写出对应的正交矩阵。

解：二次型对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & c \end{pmatrix}$ ，

(1) 已知  $r(A) = 2 \Rightarrow |A| = 0$ ，得  $c = 2$ ；

(2)  $A$  的特征多项式  $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda - 5 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 6)^2$ ，

$A$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ ， $\lambda_3 = 0$ ；

①对于  $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ ，由  $(\lambda_1 I - A)x = 0$ ，

即  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ , 得基础解系  $\begin{cases} \xi_1 = (1, 1, 0)^T \\ \xi_2 = (2, 0, 1)^T \end{cases}$ ,

1) 正交化: 取  $\beta_1 = \xi_1 = (1, 1, 0)^T$ ,

$$\text{令 } \beta_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1, -1, 1)^T,$$

2) 单位化: 令  $\eta_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$ ;

$$\eta_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T;$$

②对于特征值  $\lambda_3 = 0$ , 由  $(\lambda_3 I - A)x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$ ,

即  $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ , 得基础解系为  $\xi_3 = (-1, 1, 2)^T$ ,

单位化得:  $\eta_3 = \frac{1}{\|\xi_3\|} \xi_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$ ;

③记矩阵  $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , 则  $Q$  为正交阵,

且使得  $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

④令  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ , 做正交变换  $x = Qy$ ,

原二次型就化成标准形  $x^T A x = y^T (Q^T A Q) y = 6y_1^2 + 6y_2^2$ .