一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 向量 $\alpha=(3,1,4)^{\mathrm{T}},\beta=(2,-1,0)^{\mathrm{T}},\gamma=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\alpha-2\beta+3\gamma=$(　).

解：$\alpha-2\beta+3\gamma=(3,1,4)^{\mathrm{T}}-2(2,-1,0)^{\mathrm{T}}+3(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}=(2,-3,1)^{\mathrm{T}}$

2. 设 A 为 m 阶方阵，B 是 n 阶方阵，且 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=a\neq 0$，$\begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix}=b$，

则 $\dfrac{b}{a}=$(　).

解：$a=\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$；$b=\begin{vmatrix} O & B \\ A & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A|\cdot|B|$，则 $\dfrac{b}{a}=(-1)^{mn}$.

3. 设 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|A|=$(　).

解：由已知得，$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(2\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3)$

即 $\begin{cases} A\alpha_1=2\alpha_1 \\ A\alpha_2=\alpha_2 \\ A\alpha_3=-\alpha_3 \end{cases}\Longrightarrow A$ 的特征值为 2，1，-1，则 $|A|=-2$.

4. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，$\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，

$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$；如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则 $Ax=\beta$ 的一般解为(　).

解：矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，由已知，得 $r(\mathrm{A})=3$.

由$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3\Longrightarrow\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0\Longrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=0$

得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系为 $\xi=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\mathrm{A}\eta$，

得 $\mathrm{A}x=\beta$ 的一个特解为 $\eta=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

则 $\mathrm{A}x=\beta$ 的通解为 $x=\eta+k\xi=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$k$ 任意.

5. 设 3 阶实对称方阵 A 满足 $A^2=A$，且 $\mathrm{r}(A)=2$，则 $|A+I|=(\quad)$.

解：设 A 的特征值为 λ，则 $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}$ 的特征值为 $\lambda^2-\lambda$；

而 $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}=O$，于是 $\lambda^2-\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=0$ 或 1；

A 是 3 阶实对称矩阵，则 $\mathrm{A}\sim\Lambda$；

对 $\lambda=0$，齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，即 $\mathrm{A}x=0$；

其基础解系包含的向量个数为 $3-r(\mathrm{A})=3-2=1$，

则 $\lambda=0$ 是单特征值，从而 $\lambda=1$ 是 2 重特征值；

于是，A 的特征值为 0，1，1；

从而 $A+I$的特征值为 $\lambda+1$，即 1，2，2；

则 $|A+I|=1\cdot2\cdot2=4$.

6. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4{x_1}^2+2{x_2}^2+b{x_3}^2+4x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，

则 b 的取值范围是(　).

解：二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}4&2&1\\2&2&0\\1&0&b\end{pmatrix}$，且 A 正定；

则 A 的顺序主子式均大于 0：

$$|A_3|=|A|=\begin{vmatrix}4&2&1\\2&2&0\\1&0&b\end{vmatrix}=2(2b-1)>0 \Longrightarrow b>\frac{1}{2}.$$

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，则下列条件中，不能推出线性方程组 $(AB)x=0$ 有非零解的是(B).

(A) $m<p$　　(B) $m<n$　　(C) $n<p$　　(D) $\mathrm{r}(B)<p$

解：AB 为 $m\times p$ 矩阵，$(AB)x=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(AB)<p$；

$$r(AB) \le \begin{cases} r(A) \le \begin{cases} m \\ n \end{cases} \\ r(B) \le \begin{cases} n \\ p \end{cases} \end{cases}$$，所以 $m<p$，或 $n<p$，或 $\mathrm{r}(B)<p$ 都可以.

2. 设 $A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^{2019}=$ (A).

(A) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$; (B) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2019}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$;

(C) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^{2019}$; (D) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2019}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^{2019}$

解：$A=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\alpha\beta^T$，这里 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\beta^T=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

则 $\beta^T\alpha=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-1$，

$$A^k=\underbrace{AA\cdots AA}_{k个}=\underbrace{(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\cdots(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)}_{k个}$$

$$=\alpha\underbrace{(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)}_{(k-1)个}\beta^T=\alpha^{\mathrm{T}}(-1)^{k-1}\beta=(-1)^{k-1}A,$$

则 $A^{2019}=(-1)^{2019-1}\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

3. 设 α 为 n 维列向量，$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$，$B=I-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，则下列说法错误的是(D).

(A) B 是对称阵 (B) B 是可逆阵 (C) B 是正交阵 (D) B 是对角阵

解：$B^T=I-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=B\Longrightarrow B$ 是对称阵;

$B^TB=(I-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(I-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}})=I-4\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+4\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=I$，

则 B 是正交阵，也是可逆阵.

4. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(\alpha_i\in\mathrm{R}^n,i=1,\cdots,m,m>2)$ 线性相关，说法正确的是(C).

(A) 对任意常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，均有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

(B) 任意 k 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$ 线性相关.

(C)对任意 $\beta \in \mathrm{R}^n$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关.

(D)任意 k 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}$ 线性无关.

解：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，即存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，

使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$

于是，$0\,\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$

且 $0, k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B（ B ）.

(A)合同且相似；(B)合同但不相似；(C)不合同但相似；(D)既不合同也不相似

解：A 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I} - \mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)^2$，

则 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 0$；

A 与 B 有相同的正惯性指数 2，相同的负惯性指数 0；

则 A 与 B 合同，但是不相似，因为相似矩阵的特征值相同.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准型为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，其中 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$；若 $Q = (\alpha_1, -\alpha_3, \alpha_2)$，则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准型为（ A ）.

(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$　　　　(B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$　　　　(D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

解：$P^TAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

则有$\begin{cases} A\alpha_1 = 2\alpha_1 \\ A\alpha_2 = 1\alpha_2 \\ A\alpha_3 = -\alpha_3 \Rightarrow A(-\alpha_3) = (-1)(-\alpha_3) \end{cases}$；

又 $Q = (\alpha_1, -\alpha_3, \alpha_2)$，于是 $Q^TAQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，

则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

三、计算题(共 4 题，第 1, 2 题每题 8 分，第 3, 4 题每题 6 分，共 28 分)

1. 计算 n 阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解：行列式 $= 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2D_n$，

这里 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n\text{阶}}$

$$\underline{\underline{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&1\\1&2&0&\cdots&0&0&1\\1&-1&2&\ddots&0&0&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&2&0&1\\1&0&0&\cdots&-1&2&1\\0&0&0&\cdots&0&-1&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&0&1\\-1&2&\ddots&0&0&1\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&0&1\\0&0&\cdots&-1&2&1\\0&0&\cdots&0&-1&1\end{vmatrix}_{n-1\text{阶}}$$

$$\xlongequal{c_n-c_1}2\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\1&2&0&\cdots&0&0&0\\1&-1&2&\ddots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&2&0&0\\1&0&0&\cdots&-1&2&0\\0&0&0&\cdots&0&-1&1\end{vmatrix}+D_{n-1}=2\cdot 2^{n-2}+D_{n-1}$$

由此可得，$D_n=2^{n-1}+D_{n-1}=2^{n-1}+2^{n-2}+D_{n-2}=\cdots$

$$=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^1+D_1$$

$$=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^1+1=2^n-1$$

所以，原行列式$=2D_n=2(2^n-1)=2^{n+1}-2.$

2. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,4,3,7)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(-1,-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_5=(1,4,5,9)^{\mathrm{T}}$；求向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&1\\2&-1&4&-2&4\\1&0&3&1&5\\3&-1&7&-1&9\end{pmatrix}$

$$\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&0&4\\0&1&2&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

①秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$；

②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③ $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$；$\alpha_5=4\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4$.

3. 已知 R^3 的两组基为 $\mathbf{B_1}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$\mathbf{B_2}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1)^T$；

$\beta_1=(0,1,1)^T$，$\beta_2=(1,1,0)^T$，$\beta_3=(1,0,2)^T$；

(1) 求基 $\mathbf{B_1}$ 到基 $\mathbf{B_2}$ 的过渡矩阵；

(2) 若 3 维向量 γ 在基 $\mathbf{B_2}$ 下的坐标为 $(1,3,1)^{\mathrm{T}}$，求 γ 在基 $\mathbf{B_1}$ 下的坐标.

解：仍记 $\mathrm{B}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\mathrm{B}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.

①由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\mathrm{A}$，即得 $\mathrm{B}_2=\mathrm{B}_1\mathrm{A}$，

于是，$$(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1\\2&0&1&1&1&0\\0&1&-1&1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&0&1\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&1&-2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{I},\mathrm{A})$$

则基 B_1到基 B_2的过渡矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&1&0\\-3&1&-2\end{pmatrix}$.

②两种方法：已知 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B_2}}=(1,3,1)^{\mathrm{T}}$

方法 1：$$\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{B}_2\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix},$$

又有 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{B}_1\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}$，则求解该方程组

$$(\mathrm{B}_1,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\2&0&1&4\\0&1&-1&3\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&-2\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(3,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

方法 2：因为 $$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}=\mathrm{A}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&1&0\\-3&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(3,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & 4 & -2\\ -3 & -3 & b\end{pmatrix}$ 是可对角化的，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，求 a,b.

解：对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，特征矩阵为 $2\boldsymbol{I}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -a & -2 & 2\\ 3 & 3 & 2-b\end{pmatrix}$；

A 可对角化，则方程组 $(2\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$ 的基础解系包含的向量个数为 2，

即 $3-r(2\boldsymbol{I}-\mathrm{A})=2\Rightarrow r(2\boldsymbol{I}-\mathrm{A})=1$；

方法 1：$(2\boldsymbol{I}-\mathrm{A})\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5-\mathrm{b}\end{pmatrix}$

从而 $\begin{cases}2-a=0\\ 5-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=5\end{cases}$；

方法 2：$(2\boldsymbol{I}-\mathrm{A})$ 的任一 2 阶子式均为 $0\Rightarrow\begin{cases}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -a & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=2\\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2-b\end{vmatrix}=0\Rightarrow b=5\end{cases}$.

四、证明题(共 1 题，共 8 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，并且

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$， $\cdots$，$\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$；

证明：当 m 为偶数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关；

当 m 为奇数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

证：两种方法：

(1) 记 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}$,

$$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\ \cdots,$$

$$\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_m=\alpha_m+\alpha_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix};$$

于是 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{m-1},\beta_m)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}=AC,$$

其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1},\alpha_m)$，又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则秩(A) $=m$；

m 阶矩阵 $C=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}$，且 $|C|=1+(-1)^{m-1}=\begin{cases}2, & m\text{ 为奇数}\\0, & m\text{ 为偶数}\end{cases}$，

①若 m 为奇数，则 $|C|\neq 0$，即 C 可逆；

秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}=$ 秩(B) $=$ 秩(AC) $=$ 秩(A) $=m$；

此时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关；

②若 m 为偶数，则 $|C|=0\Longrightarrow$ 秩(C) $<m$；

秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}=$ 秩(B) $=$ 秩(AC) $\leq$ 秩(C) $<m$；

此时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

(2) 当 m 为偶数时，$\beta_1-\beta_2+\beta_3-\cdots+(-1)^{m+1}\beta_m=0$，

所以，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关；

当 m 为奇数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 等价，

所以，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

讨论 a,b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3-5x_4=3 \\ (a-1)x_2+2x_3+bx_4=b-3 \\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3 \end{cases}$

无解、有无穷多解、有唯一解，并且在有无穷多解时写出方程组的通解.

解：增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & a-1 & 2 & b & b-3 \\ 1 & 1 & 2 & b-2 & b+3 \end{array}\right)$

$\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b+2 \end{array}\right)=(\mathrm{U},d)$

原方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 与 $\mathrm{U}x=d$ 同解，则

①当 $|\mathrm{U}|=-2(a-2)(b-1)\neq 0$，即 $a\neq 2$，且 $b\neq 1$ 时，原方程组有唯一解；

②当 $b=1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

出现矛盾方程，故原方程组无解；

③当 $a=2$，且 $b\neq 1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6-3b \end{array}\right)$

1) 当 $6-3b\neq 0$，即 $b\neq 2$ 时，出现矛盾方程，故原方程组无解；

2) 当 $b=2$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&14\\0&1&2&0&-9\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

取 x_3 为自由未知量，

令 $x_3=0$，得方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 的一个特解 $x_0=(14,-9,0,4)^{\mathrm{T}}$；

令 $x_3=1$，得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系 $\xi=(0,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

则原方程组的一般解为

$$x=x_0+k\xi=(14,-9,0,4)^{\mathrm{T}}+k(0,-2,1,0)^{\mathrm{T}}，k \text{ 任意}.$$

综上， $\begin{cases}\text{当 } a\neq 2，\text{且 } b\neq 1 \text{ 时，方程组有唯一解；}\\ \text{当 } b=1 \text{ 或 } a=2，\text{且 } b\neq 2 \text{ 时，方程组无解；}\\ \text{当 } a=2，\text{且 } b=2 \text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、二次型（共 1 题，14 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax$，利用正交变换法可化为标准型 $y_1^2+y_2^2$，

相应的正交矩阵 Q 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$；

(1) 写出 A 的全部特征值；

(2) 求出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.

解：

(1) 二次型 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x$ 在正交变换 $x=\mathrm{Q}y$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，

则 $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，即 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=0$；

且 $\eta_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_3=0$ 对应的标准正交的特征向量；

(2) 设向量 $\alpha=(t_1,t_2,t_3)^{\mathrm{T}}$ 是特征值 1 对应的特征向量，A 是实对称矩阵，

则 $(\alpha,\eta_3)=0\Leftrightarrow t_1+t_3=0$，解此方程：

得基础解系$\begin{cases}\xi_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}\\ \xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$，单位化得$\begin{cases}\eta_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}\\ \eta_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}}\end{cases}$,

则 η_1,η_2 是特征值 1 对应的标准正交的特征向量；

①取正交矩阵 $\mathrm{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,

则 $\mathrm{Q}^{-1}=\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，于是 $\mathrm{A}=\mathrm{Q}\Lambda\mathrm{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

②二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax=\dfrac{1}{2}x_1^2+x_2^2+\dfrac{1}{2}x_3^2-x_1x_3$.