一、填空题(每空 3 分，共 18 分)

1. 已知 4 阶行列式的第 1 行元素以此为 $1,2,2,-1$；第 4 行元素的余子式依次为 $8,k,-6,10$；则 $k=(\quad)$.

解：第 1 行元素，与第 4 行元素的代数余子式乘积之和为 0；即

$$1\cdot(-1)^{4+1}\cdot 8+2\cdot(-1)^{4+2}\cdot k+2\cdot(-1)^{4+3}\cdot(-6)+(-1)\cdot(-1)^{4+4}\cdot 10=0$$

$$\Longrightarrow -8+2k+12-10=0\Longrightarrow k=3.$$

2. 设 $\alpha=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1,0,1)$，$\mathrm{A}=\alpha\beta$，则 $\mathrm{A}^3=(\quad)$.

解：(1) $\mathrm{A}=\alpha\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1,0,1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}$;

(2) $\lambda=\beta\alpha=(1,0,1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$;

(3) $\mathrm{A}^3=\mathrm{AAA}=(\alpha\beta)(\alpha\beta)(\alpha\beta)=\alpha(\beta\alpha)(\beta\alpha)\beta=4\alpha\beta$

$$=4\mathrm{A}=4\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

3. 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$；矩阵 B 与 A 相似，则 $|\mathrm{B}^{-1}+2\boldsymbol{I}|=(\quad)$，$\left|(\frac{1}{2}\mathrm{A})^*-\boldsymbol{I}\right|=(\quad)$.

解：矩阵 B 与 A 相似，则 B 的特征值也为 $1,2,3$；

则 B^{-1} 的特征值为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，从而 $\mathrm{B}^{-1}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $3,\frac{5}{2},\frac{7}{3}$，

于是 $|\mathrm{B}^{-1}+2\boldsymbol{I}|=\frac{35}{2}$；

A 的特征值为 $1,2,3$，则 $|\mathrm{A}|=6$，于是 A^* 的特征值为 6，3，2，

$(\frac{1}{2}\mathrm{A})^*-\boldsymbol{I}=\frac{1}{4}\mathrm{A}^*-\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $\frac{6}{4}-1$，$\frac{3}{4}-1$，$\frac{2}{4}-1$，

从而 $\left|(\frac{1}{2}\mathrm{A})^*-\boldsymbol{I}\right|=\frac{1}{16}$.

4. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $3A^2+2A-10\boldsymbol{I}=O$，则 $(A-2\boldsymbol{I})^{-1}=($　$)$.

解：$3A^2+2A-10\boldsymbol{I}=O \Longrightarrow (A-2\boldsymbol{I})(3A+8\boldsymbol{I})=-6\boldsymbol{I}$

$$\Longrightarrow (A-2\boldsymbol{I})^{-1}=-\frac{3A+8\boldsymbol{I}}{6}.$$

5. 四元线性方程组 $Ax=b$，$r(A)=r(A,b)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $Ax=b$ 的 3 个解，

$\alpha_1=(4,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2+2\alpha_3=(3,0,-3,6)^{\mathrm{T}}$，则 $Ax=b$ 的全部解为（　）.

解：$r(A)=3 \Longrightarrow Ax=0$ 的基础解系只含有 $4-r(A)=1$ 个向量 ξ；

则 $Ax=b$ 的一般解 $x=x_0+k\xi$，k 任意.

① x_0可取 α_1；

②令 $\xi=3\alpha_1-(\alpha_2+2\alpha_3)=(9,-3,3,3)^{\mathrm{T}}=3(3,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

于是，$Ax=b$ 的一般解

$$x=(4,-1,0,3)^{\mathrm{T}}+k(3,-1,1,1)^{\mathrm{T}}，k \text{ 任意.}$$ （答案形式不唯一）

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m>2)$ 线性相关的充要条件是（ C ）.

A. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有两个向量成正比；

B. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个零向量；

C. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示；

D. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的任一部分向量组线性相关.

解：书本**定理** 3. 1.

2. 设 P, Q 均为 n 阶可逆矩阵，A 是 n 阶矩阵，且 $PAQ=E$，则 $A^{-1}=$（ C ）.

A. PQ　B. $P^{-1}Q^{-1}$　C. QP　D. $Q^{-1}P^{-1}$

解：$PAQ=E \Longrightarrow A=P^{-1}EQ^{-1}=(QP)^{-1} \Longrightarrow A^{-1}=QP.$

3. 对于非齐次线性方程组 $Ax=b$ 和对应的齐次线性方程组 $Ax=0$，下列结论正确的是（ D ）.

A. 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；

B. 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；

C. 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 只有零解；

D. 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解.

解；$Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A,b)=r(A)<A$ 的列数 $\Rightarrow Ax=0$ 有非零解.

4. n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ a & 1 & a & \cdots & a\\ a & a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & a & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 的秩为 $n-1$，且 $n\geq 3$，则 $a=$ (B).

A. 1　　B. $\frac{1}{1-n}$　　C. -1　　D. $\frac{1}{n-1}$

解：$r(A)=n-1<n$，且 $n\geq 3$，则 $\begin{cases}a\neq 0 \text{ 且 } a\neq 1\\ |A|=0\end{cases}$，得 $a=\frac{1}{1-n}$.

5. 设 A 是 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，记 $P_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则 $A=$ (D).

A. P_1P_2　　B. $P_1^{-1}P_2$　　C. P_2P_1　　D. $P_2P_1^{-1}$

解：$P_1=E_{12}(1)$，$P_2=E_{23}$，$A\xRightarrow{c_1+c_2}B\xRightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\boldsymbol{I}$，

则有　$\boldsymbol{I}=E_{23}B=E_{23}AE_{12}(1)$

$$\Rightarrow A=E_{23}^{-1}\boldsymbol{I}E_{12}^{-1}(1)=E_{23}E_{12}^{-1}(1)=P_2P_1^{-1}.$$

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $E+2BA^*=ABA^*$，E 是 3 阶单位矩阵，则 $|B|=$ (A).

A. $\frac{1}{9}$　　B. 9　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

解：$|A|=3$，$A^*A=|A|E=3E$

$E+2BA^*=ABA^*\Rightarrow EA=(A-2E)BA^*A\Rightarrow 3(A-2E)B=A$

则 $|3(A-2E)|\cdot|B|=|A|=3\Rightarrow 3^3|A-2E|\cdot|B|=3$，

又 $A-2E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，$|A-2E|=1$；于是 $|B|=\frac{1}{9}$.

三、计算题(每题 8 分，共 24 分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 的值，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均不为 0.

解：$D=a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1/a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/a_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_1-r_2-\cdots-r_n} a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/a_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_2\cdots a_n\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ 满足方程 $AX=B$，求矩阵 X.

解：两种方法：

(1) $AX=B$，且 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Longrightarrow A$ 可逆；

则 $(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{I},X)$

得 $X=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) 或先求 A^{-1}(可用不同方法)，再求 $X=A^{-1}B$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基，求基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵.

解：两种方法：

(1)方法 1：$\alpha_1+\alpha_2=1\alpha_1+2\left(\frac{1}{2}\alpha_2\right)+0\left(\frac{1}{3}\alpha_3\right)$；

$\alpha_2+\alpha_3=0\alpha_1+2\left(\frac{1}{2}\alpha_2\right)+3\left(\frac{1}{3}\alpha_3\right)$；

$\alpha_3+\alpha_1=1\alpha_1+0\left(\frac{1}{2}\alpha_2\right)+3\left(\frac{1}{3}\alpha_3\right)$；

则 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$；

于是，从基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵

为 $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.

(2)方法 2：记矩阵 $\mathrm{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，B 可逆.

① $\mathrm{B}_1=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}=\mathrm{BC}_1$

则 $\mathrm{C}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$是基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$的过渡矩阵；

② $\mathrm{B}_2=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\mathrm{BC}_2$，

则 $\mathrm{C}_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$是基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵；

③设 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为 C，

则 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)\mathrm{C}$

即 $\mathrm{B}_2=\mathrm{B}_1\mathrm{C}$，即 $\mathrm{BC}_2=\mathrm{BC}_1\mathrm{C}$，B 可逆，

所以，$\mathrm{C}_1\mathrm{C}=\mathrm{C}_2$，求解该矩阵方程

$$(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1/2&0&1&1&0\\0&0&1/3&0&1&1\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&2&2&0\\0&0&1&0&3&3\end{pmatrix}=(I,\mathrm{C})$$

则过渡矩阵 $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.

四、证明题(共 1 题，共 12 分)

设 A,B 均为 n 阶非零矩阵，且满足 $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}=\mathrm{O}$，$\mathrm{B}^2+\mathrm{B}=\mathrm{O}$；证明：

(1) -1 是 A,B 的特征值；

(2) 若 $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}=O$，$\xi_1$ 和 ξ_2 分别是 A,B 的属于特征值 -1 的特征向量，

则 ξ_1,ξ_2 线性无关.

解：

(1) 设 A 的特征值为 λ，则 $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}$ 的特征值为 $\lambda^2+\lambda$；

而 $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}=O$，于是 $\lambda^2+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0$ 或 -1；

同理可得，B 的特征值也为 0 或 -1；

所以，-1 是 A,B 的特征值；

(2) 已知 $\begin{cases}\mathrm{A}\xi_1=-\xi_1\\ \mathrm{B}\xi_2=-\xi_2\end{cases}$，则 $\mathrm{BA}\xi_1=-\mathrm{B}\xi_1$，

因为 $\mathrm{BA}=O$，则有 $\mathrm{B}\xi_1=0=0\xi_1$；

即 ξ_1 是 B 的属于特征值 0 的特征向量，

而 ξ_2 是 B 的属于特征值 -1 的特征向量，

所以，ξ_1,ξ_2 线性无关.

五、解方程组（14 分）

讨论 p,q 取何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=p\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=q\end{cases}$

有解、无解；有解时求解.

解：方程组的增广矩阵为

$$(\mathrm{A},b)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&p\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&q\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&p-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&q-5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&p\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&q-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&p\\0&0&0&0&0&q-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&p\\0&0&0&0&0&q-2\end{array}\right)$$

(1) 当 $p\neq 0$ 或 $q-2\neq 0$，即 $p\neq 0$ 或 $q\neq 2$ 时，方程组出现矛盾方程，

则原方程组无解；

(2) 当 $p=0$ 且 $q=2$ 时，增广矩阵

$$(\mathrm{A},b)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)=(\mathrm{U},d)$$

取 x_3，x_4，x_5 为自由未知量，

1) 令 $x_3=x_4=x_5=0$，代入 $\mathrm{U}x=d$，

得原方程组的一个特解 $x_0=(-2,3,0,0,0)^{\mathrm{T}}$；

2) 令 $(x_3,\ x_4,\ x_5)=\begin{cases}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{cases}$，代入 $\mathrm{U}x=0$，

得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系

$\xi_1=(1,-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(1,-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$；$\xi_3=(5,-6,0,0,1)^{\mathrm{T}}$

则原方程组的通解为

$$x=x_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$$

$$=(-2,3,0,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(5,-6,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

k_1,k_2,k_3 任意；

综上，$\begin{cases}\text{当 } p\neq 0 \text{ 或 } q\neq 2 \text{ 时，方程组无解}\\ \text{当 } p=0 \text{ 且 } q=2 \text{ 时，方程组有无穷多解}\end{cases}$.

六、二次型（14 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$，且 $b>0$；二次型对应矩阵的特征值之和为 1，特征值的乘积为 -12；

(1)求 a，b 的值；

(2)用正交变换化二次型为标准形，写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

解：二次型对应的矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，其特征值为 λ_1，λ_2，λ_3；

(1) $\begin{cases} 1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2-2 \\ -12=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\mathrm{A}|=2(-2a-b^2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$；

(2) A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

则 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-3$；

①对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases} \xi_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}} \\ \xi_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$，($\xi_1$ 与 ξ_2 正交)

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$$令\ \beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

2)单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}};$$

②对于特征值 $\lambda_3=-3$，由 $(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},0,\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，

且使得 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -3\end{pmatrix}$；

④令 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，$y=(y_1,y_2,y_3)^T$，做正交变换 $x=Qy$，

原二次型就化成标准形 $x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.