一、填空题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 已知 A 为 3 阶方阵，$|A|=3$，则 $\left|\left(\frac{1}{6}A\right)^{-1}-3A^*\right|=(\quad)$.

解：$\left|\left(\frac{1}{6}A\right)^{-1}-3A^*\right|=|6A^{-1}-3|A|A^{-1}|=|-3A^{-1}|=(-3)^3|A^{-1}|=-9$.

2. 设 A 为 4 阶方阵，第一行的元素依次为 $1,2,a,-1$，第二行各元素的余子式依次为 $3,1,2,1$，则 $a=(\quad)$.

解：第 1 行元素，与第 2 行元素的代数余子式乘积之和为 0；即

$$1\cdot(-1)^{2+1}\cdot 3+2\cdot(-1)^{2+2}\cdot 1+a\cdot(-1)^{2+3}\cdot 2+(-1)\cdot(-1)^{2+4}\cdot 1=0$$

$$\Longrightarrow -3+2-2a-1=0\Longrightarrow a=-1.$$

3. 设 A 为 3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量；$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$；则 $|A|=(\quad)$.

解：记矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，显然，P 可逆；

则 $AP=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=PB\Longrightarrow P^{-1}AP=B\Longrightarrow A\sim B,$$

这里 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$；则 $|A|=|B|=2$.

4. $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&2&1\\\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots\\0&n-1&\cdots&2&1\\n&n-1&\cdots&2&1\end{vmatrix}=(\quad)$.

解：$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}1\cdot 2\cdots(n-1)n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$

5. 已知齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1+x_2-x_3=0\\3x_1-4x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=(\quad)$.

解：齐次线性方程组有非零解 $\Longrightarrow$ 系数行列式为零，

即 $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\3&-4&\lambda\end{vmatrix}=0\Longrightarrow\lambda=-7$.

二、选择题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 设向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组(II)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(D).

(A) 当 $r < s$ 时，向量组(II)必线性相关

(B) 当 $r > s$ 时，向量组(II)必线性相关

(C) 当 $r < s$ 时，向量组(I)必线性相关

(D) 当 $r > s$ 时，向量组(I)必线性相关

解：**定理 3.4.**

2. 设 A, B, C 为 n 阶方阵，且 $\mathrm{ABC}=\boldsymbol{I}$，则必有(A).

(A) $\mathrm{CAB}=\boldsymbol{I}$　　(B) $\mathrm{BAC}=\boldsymbol{I}$　　(C) $\mathrm{CBA}=\boldsymbol{I}$　　(D) $\mathrm{ACB}=\boldsymbol{I}$

解：$\mathrm{ABC}=\boldsymbol{I} \Rightarrow \begin{cases}(\mathrm{AB})\mathrm{C}=\boldsymbol{I} \Rightarrow \mathrm{C}(\mathrm{AB})=\boldsymbol{I} \Rightarrow \mathrm{CAB}=\boldsymbol{I} \\ \mathrm{A}(\mathrm{BC})=\boldsymbol{I} \Rightarrow (\mathrm{BC})\mathrm{A}=\boldsymbol{I} \Rightarrow \mathrm{BCA}=\boldsymbol{I}\end{cases}$;

3. 设 A, B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是(C).

(A) A^{T} 与 B^{T} 相似；　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似；

(C) $\mathrm{A}+\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\mathrm{B}+\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$ 相似；　　(D) $\mathrm{A}+\mathrm{A}^{-1}$ 与 $\mathrm{B}+\mathrm{B}^{-1}$ 相似；

解：A 与 B 相似，即存在可逆矩阵 P，使得 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\mathrm{B}$;

则 $\begin{cases}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}=(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})^{\mathrm{T}}=\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{P}^{\mathrm{T}})^{-1} \Rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\text{与 }\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\text{相似；} \\ \mathrm{B}^{-1}=(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})^{-1}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{A}^{-1}\text{与 }\mathrm{B}^{-1}\text{相似；}\end{cases}$

于是，$\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A}+\mathrm{A}^{-1})\mathrm{P}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}+\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{P}=\mathrm{B}+\mathrm{B}^{-1}$

$\Rightarrow \mathrm{A}+\mathrm{A}^{-1}$与 $\mathrm{B}+\mathrm{B}^{-1}$相似；

4. 设 A, B 是 n 阶矩阵，$r(\mathrm{X})$ 表示矩阵 X 的秩，(X,Y)表示分块矩阵，

则下列正确的是(B).

(A) $r(\mathrm{A},\mathrm{BA})=r(\mathrm{A})$;　　(B) $r(\mathrm{A},\mathrm{AB})=r(\mathrm{A})$;

(C) $r(\mathrm{A},\mathrm{B})=\max\{r(\mathrm{A}),r(\mathrm{B})\}$;　　(D) $r(\mathrm{A},\mathrm{B})=r(\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}^{\mathrm{T}})$.

解：(A)：$r(\mathrm{A},\mathrm{BA})\geq r(\mathrm{A})$;

(B)：矩阵 $(\mathrm{A},\mathrm{AB})=\mathrm{A}(\boldsymbol{I},\mathrm{B})$，则 $r(\mathrm{A})\leq r(\mathrm{A},\mathrm{AB})=r(\mathrm{A}(\boldsymbol{I},\mathrm{B}))\leq r(\mathrm{A})$,

所以 $r(\mathrm{A},\mathrm{AB})=r(\mathrm{A})$.

(C)：$\min\{r(\mathrm{A}),r(\mathrm{B})\}\le r(\mathrm{A},\mathrm{B})\le r(\mathrm{A})+r(\mathrm{B})$；

(D)：反例：$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

则 $(\mathrm{A},\mathrm{B})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\mathrm{A},\mathrm{B})=2$；

$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}^{\mathrm{T}})=1$

5. 设 A 为 n 阶矩阵，则 A 为正定矩阵的充分必要条件是（ D ）.

(A) 对任意 n 维非零向量 x，均有 $x^TAx\ge 0$；　(B) A 没有负特征值；

(C) 存在 n 阶矩阵 C，使得 $\mathrm{A}=\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}$；　(D) A 与单位矩阵合同.

解：**定理 6.4**

三、计算和证明(共 36 分，每题 6 分)

1. 计算行列式的值 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2^2&2^3\\1&3&3^2&3^3\\1&4&4^2&4^3\end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2^2&2^3\\1&3&3^2&3^3\\1&4&4^2&4^3\end{vmatrix}=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=12.$

2. 已知 A 为 n 阶矩阵，且 $\mathrm{A}^2-2\mathrm{A}+4\boldsymbol{I}=O$，证明 $\mathrm{A}+\boldsymbol{I}$ 可逆，并求 $(\mathrm{A}+\boldsymbol{I})^{-1}$.

解：$\mathrm{A}^2-2\mathrm{A}+4\boldsymbol{I}=0\Rightarrow(\mathrm{A}+\boldsymbol{I})(\mathrm{A}-3\boldsymbol{I})=-7\boldsymbol{I}$

$\Rightarrow|\mathrm{A}+\boldsymbol{I}|\cdot|\mathrm{A}-3\boldsymbol{I}|\ne 0\Rightarrow|\mathrm{A}+\boldsymbol{I}|\ne 0$，且$|\mathrm{A}-3\boldsymbol{I}|\ne 0$

$\Rightarrow \mathrm{A}+\boldsymbol{I}$和 $\mathrm{A}-3\boldsymbol{I}$均可逆；

又有 $(\mathrm{A}+\boldsymbol{I})\dfrac{\mathrm{A}-3\boldsymbol{I}}{-7}=\boldsymbol{I}$；

从而 $(\mathrm{A}+\boldsymbol{I})^{-1}=-\dfrac{\mathrm{A}-3\boldsymbol{I}}{7}=\dfrac{3\boldsymbol{I}-\mathrm{A}}{7}$.

3. 已知 R^3的两组基 $\mathrm{B}_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$和 $\mathrm{B}_2=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$，其中

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 A;

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1 下的坐标向量为 $(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标向量.

解：仍记 $\mathrm{B}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\mathrm{B}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.

(1) 由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\mathrm{A}$，即得 $\mathrm{B}_2=\mathrm{B}_1\mathrm{A}$，

于是，$(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&2\\1&1&1&1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{I},\mathrm{A})$

则基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$.

(2) 两种方法：已知 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$

方法 1：$\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{B}_1\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}=(1,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，又有 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{B}_2\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}$，则求解该方程组

$$(\mathrm{B}_2,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&2&-1\\1&-1&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&7\\0&0&1&-4\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(5,7,-4)^{\mathrm{T}}$.

方法 2：因为 $\mathrm{A}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}$，求解该方程组

$$(\mathrm{A},\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\-1&1&1&-2\\1&-2&-2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&7\\0&0&1&-4\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_2 下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(5,7,-4)^{\mathrm{T}}$.

4. 求向量组 $\alpha_1=(1,0,1,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,1,0,1)$，$\alpha_3=(1,1,0,1,0)$，

$\alpha_4=(-3,-2,3,0,1)$，$\alpha_5=(-2,-1,3,-3,3)$ 的秩，及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)=\begin{pmatrix}1&0&1&-3&-2\\0&1&1&-2&-1\\1&1&0&3&3\\0&0&1&0&-3\\1&1&0&1&3\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

①秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=4$；

② $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③ $\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3$.

5. 设 A 为 n 阶方阵，且 $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}$，证明：$r(\mathrm{A})+r(\mathrm{A}-\boldsymbol{I})=n$.

证：$\mathrm{A}^2=\mathrm{A}\Longrightarrow \mathrm{A}(\mathrm{A}-\boldsymbol{I})=0$，则

(1) $r(\mathrm{A})+r(\mathrm{A}-\boldsymbol{I})\le n$；

(2) $r(\mathrm{A})+r(\mathrm{A}-\boldsymbol{I})=r(\mathrm{A})+r(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})\ge r\big(\mathrm{A}+(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})\big)=r(\boldsymbol{I})=n$；

于是，$r(\mathrm{A})+r(\mathrm{A}-\boldsymbol{I})=n$.

6. 设 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&0\\1&3&5\end{pmatrix}$，判断 A 是否可对角化并说明理由.

解：A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&-4\\0&\lambda-1&0\\-1&-3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-6)$，

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$；

(1) 对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，由$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}-1&-3&-4\\0&0&0\\-1&-3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases}\xi_1=(-3,1,2)^{\mathrm{T}}\\\xi_2=(-4,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$，

(2) 对于 $\lambda_3=6$，由$(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}4&-3&-4\\0&5&0\\-1&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

(3) 3 阶矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，所以 A 可对角化.

四、证明题（8 分）

设向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性相关，$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$线性无关. 回答下列问题并证明.

(1) α_1 能否由 $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示？

(2) α_4 能否由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示？

解：(1) α_1 能由 $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示：

证：$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 线性无关 $\Rightarrow \{\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关，又$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性相关，

$\Rightarrow \alpha_1$ 能由 $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示.

(2) α_4 不能由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示：

证：反证法，设 α_4 能由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示；

已知 α_1 能由 $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示，

则 α_4 能由 $\{\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示，从而 $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 线性相关；

与已知 $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 线性无关矛盾；

故假设错误，原结论成立；即 α_4 不能由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表示.

五、（13 分）讨论 a,b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多解，并求出有无穷多解时的通解.

解：方程组的增广矩阵

$$(A,\beta) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right) = (\mathrm{U},d)$$

原方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 与 $\mathrm{U}x=d$ 同解，则

(1) 当 $|\mathrm{U}| = (a-1)^2 \neq 0$，即 $a \neq 1$ 时，原方程组有唯一解；

(2) 当 $a=1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&b+1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

①当 $b+1\neq 0$，即 $b\neq -1$ 时，出现矛盾方程，故原方程组无解；

②当 $a=1$，且 $b=-1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

取 x_3,x_4 为自由未知量，

1) 令 $x_3=x_4=0$，得原方程组的一个特解 $x_0=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

2) 令 $(x_3,x_4)=\begin{cases}(1,0)\\(0,1)\end{cases}$，得齐次线性方程组 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系

$$\xi_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}，\xi_2=(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}；$$

则原方程组的一般解为

$$x=x_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$$

$=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 任意.

综上， $\begin{cases}\text{当 } a\neq 1 \text{ 时，方程组有唯一解；}\\ \text{当 } a=1\text{，且 } b\neq -1 \text{ 时，方程组无解；}\\ \text{当 } a=1\text{，且 } b=-1 \text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、（13 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换 $x=\mathrm{Q}y$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值和相应的正交矩阵 Q.

解：二次型对应的矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$，其特征值为 λ_1，λ_2，和 $\lambda_3=0$；

(1) $0=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{vmatrix}\Rightarrow a=2$；

(2) A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)(\lambda+3)$

则 A 的特征值为 $\lambda_1=6$，$\lambda_2=-3$，$\lambda_3=0$；

①对于特征值 $\lambda_1=6$，由$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\xi_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

单位化得 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$；

②对于特征值 $\lambda_2=-3$，由$(\lambda_2\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}-5&-1&4\\-1&-2&-1\\4&-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_2=\dfrac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$；

③对于特征值 $\lambda_3=0$，由$(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0\Leftrightarrow \mathrm{A}x=0$，

即 $\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$；

(3) 记矩阵 $\mathrm{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，

且使得 $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}=\Lambda=\begin{pmatrix}6&&\\&-3&\\&&0\end{pmatrix}$；

(4) 令 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x=\mathrm{Q}y$，

原二次型就化为标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x=y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ})y=6y_1^2-3y_2^2$.