一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&3&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&-3&2\end{pmatrix}$，则 $AB^{\mathrm{T}}=$______.

解：$AB^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&7\\7&-9\end{pmatrix}$

2. 设 A,B 为 3 阶方阵，I为 3 阶单位矩阵，$|A|=2$，$A^3+ABA+2I=0$，

则 $|A+B|$ 的值为______.

解：$A^3+ABA+2I=0\Longrightarrow A(A+B)A=-2I\Longrightarrow |A|\cdot|A+B|\cdot|A|=|-2I|$

则 $|A+B|=-2$.

3. 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解，$\mathrm{r}(A)=3$，

$\alpha_1+2\alpha_2=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，则 $Ax=b$ 的通解为______.

解：$r(\mathrm{A})=3\Longrightarrow \mathrm{A}x=0$ 的基础解系含有 $4-r(\mathrm{A})=1$ 个向量.

$\mathrm{A}x=b$ 的一般解 $x=x_0+k\xi$；

(1) x_0 可取 α_3；

(2) 取 $\xi=(\alpha_1-\alpha_3)+2(\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3=(0,-2,-4,-6)^{\mathrm{T}}$；

于是，$\mathrm{A}x=b$ 的一般解 $x=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$.（答案形式不唯一）

4. 设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&1&b\\4&-2&1\end{pmatrix}$，已知 2 是 A 的二重特征值，则 $b=$______.

解：A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3$；

则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=5+1+1\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=6(3+b)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_3=3\\b=-1\end{cases}$.

5. 设 3 阶矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&a&3\\2&-1&1\end{pmatrix}$，B 为非零矩阵，且 $\mathrm{AB}=\mathrm{O}$，则 $a=$ ______.

解：$\begin{cases} B \neq O \Longrightarrow r(B) \geq 1 \\ AB = O \Longrightarrow r(A) + r(B) \leq 3 \end{cases} \Longrightarrow r(A) \leq 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow a = -3.$

6. 设 A 为 3 阶方阵，$|\mathrm{A}| = 3$，A^*为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第三行得方阵 B，则 $|\mathrm{BA}^*| =$_______.

解：$\left.\begin{array}{l} A \xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} B \Longrightarrow |B| = -|A| \\ |A^*| = |A|^2 = 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow |BA^*| = |B| \cdot |A^*| = -27$

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 下列方阵中，属于初等矩阵的是(A).

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + A + 2I = O$，则 $(A - I)^{-1}$为(D).

(A) $\frac{1}{4}(A + 2I)^{-1}$ (B) $\frac{1}{4}(A + 2I)$ (C) $-\frac{1}{4}(A + 2I)^{-1}$ (D) $-\frac{1}{4}(A + 2I)$

解：$A^2 + A + 2I = O \Longrightarrow (A - I)(A + 2I) = -4I \Longrightarrow (A - I)^{-1} = -\dfrac{A + 2I}{4}.$

3. 设 $\mathrm{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$是 4 阶方阵，若$(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$是齐次线性方程组 $\mathrm{A}x = 0$ 的一个基础解系，则 $\mathrm{A}^*x = 0$ 的基础解系可为(C).

(A) α_1, α_2 (B) α_1, α_3 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (D) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$

解：A 是 4 阶方阵，且 $\mathrm{A}x = 0$ 的基础解系只有一个向量，则 $1 = 4 - r(\mathrm{A})$，

即 $r(\mathrm{A}) = 3 \Longrightarrow \begin{cases} |\mathrm{A}| = 0 \Longrightarrow \mathrm{A}^*\mathrm{A} = 0 \Longrightarrow \mathrm{A} \text{ 的每一列都是 } \mathrm{A}^*x = 0 \text{ 的解} \\ r(\mathrm{A}^*) = 1 \Longrightarrow \mathrm{A}^*x = 0 \text{ 的基础解系有 } 4 - 1 = 3 \text{ 个向量} \end{cases}$，

从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 $\mathrm{A}^*x = 0$ 的解；且秩$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$.

又 $(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$是 $\mathrm{A}x = 0$ 的解 $\Longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

即 $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \Longrightarrow \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

4. 下列说法正确的是(D).

(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m>2)$线性无关的充要条件是其中任意两个向量均线性无关.

(B) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m>2)$线性相关的充要条件是其中任意 $m-1$个向量线性相关.

(C) 若 α_1,α_2 线性相关，α_3,α_4 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_4$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

解：(A)：部分无关，不一定整体无关，充分性不成立；

(B)：整体相关，不一定部分相关，必要性不成立；

(C)：$\alpha_1=(1,0)$，$\alpha_2=(0,0)$，$\alpha_3=(0,0)$，$\alpha_4=(0,1)$，

则 α_1,α_2 线性相关，α_3,α_4 线性相关；

但是 $\alpha_1+\alpha_3=(1,0)$，$\alpha_2+\alpha_4=(0,1)$；二者线性无关.

5. 设 A, B, C 为 n 阶方阵，则下列结论成立的是（ B ）.

(A) $ABC\neq O$ 当且仅当 $AB\neq O$ 且 $BC\neq O$　　(B) $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B & O \\ O & A \end{vmatrix}$

(C) A 为单位阵当且仅当 $|A|=1$　　(D) $|A+B|=|A|+|B|$

解：(A)：举例，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；

则 $AB\neq O$ 且 $BC\neq O$，但是 $ABC=O$.

6. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，且 $A^2-A=O$，若 $r(A)=2$，则 A 相似于（ B ）.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解：设 A 的特征值为 λ，则 A^2-A 的特征值为 $\lambda^2-\lambda$，

因为 $A^2-A=O$，而零矩阵的特征值均为 0 $\Longrightarrow \lambda^2-\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=0$ 或 1；

对 $\lambda=0$，方程组 $(0\boldsymbol{I}-A)x=0$，即 $Ax=0$；

其基础解系包含向量个数为 $3-r(A)=1$；

从而 $\lambda=0$ 为 A 的单特征值，而 $\lambda=1$ 为 A 的 2 重特征值；

则与 A 相似的对角阵的主对角元有 2 个 1，一个 0.

三、计算题(共 4 题，共 28 分)

1. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\mathrm{D}_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解：$\mathrm{D}_{n+1}=(-1)^n\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \end{vmatrix}$

$$=(-1)^n(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^3 & (a-1)^3 & (a-2)^3 & \cdots & (a-n)^3 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \end{vmatrix}$$

$=\cdots$

$$=(-1)^n(-1)^{n-1}\cdots(-1)^2(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathrm{D}$，

这里 D 是 n+1 阶范德蒙行列式，且 $\mathrm{D}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}k!$

所以，原行列式 $D_{n+1}=\prod_{k=1}^{n}k!$

2. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,1,2)^T,\alpha_2=(-1,2,0,0)^T,\alpha_3=(-1,4,2,4)^T,$

$\alpha_4=(-1,1,0,0)^T,\alpha_5=(2,0,1,2)^T$. 求此向量组的秩及一个极大线性无关组，

并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&2\\-1&2&4&1&0\\1&0&2&0&1\\2&0&4&0&2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&3&0&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

①秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$；

②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③ $\alpha_3=2\alpha_1+3\alpha_2$，

$\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_4$.

3. 设 α_1,α_2 是 R^2中的一组基，求从基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 到基 $3\alpha_1-\alpha_2,5\alpha_1-\alpha_2$ 的过渡矩阵.

解：记矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2)$，B 可逆.

① $B_1=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=BC_1$

则 $C_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$是基 α_1,α_2 到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 的过渡矩阵，

且 $B=B_1C_1^{-1}$

② $B_2=(3\alpha_1-\alpha_2,5\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}3&5\\-1&-1\end{pmatrix}=BC_2$，

则 $C_2=\begin{pmatrix}3&5\\-1&-1\end{pmatrix}$是基 α_1,α_2 到 $3\alpha_1-\alpha_2,5\alpha_1-\alpha_2$的过渡矩阵，

且 $B_2=BC_2=B_1C_1^{-1}C_2$

③设基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2$ 到基 $3\alpha_1-\alpha_2,5\alpha_1-\alpha_2$ 的过渡矩阵为 C，

则 $(3\alpha_1-\alpha_2,5\alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)\mathrm{C}$，即 $\mathrm{B}_2=\mathrm{B}_1\mathrm{C}$；

从而有 $\mathrm{C}=\mathrm{C}_1^{-1}\mathrm{C}_2\Leftrightarrow \mathrm{C}_1\mathrm{C}=\mathrm{C}_2$，求解该矩阵方程

$$(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&3\end{pmatrix}=(I,\mathrm{C})$$

则过渡矩阵 $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$.

4. 设方阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$，且 $A^*B=A^{-1}+B$，求 B.

解：$A^*B=A^{-1}+B\Longrightarrow (A^*-I)B=A^{-1}$

$\Longrightarrow A(A^*-I)B=I\Longrightarrow (|A|I-A)B=I\Longrightarrow B=(|A|I-A)^{-1}$；

又 $|A|=1$，则 $|A|I-A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$，于是 $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}$.

四、证明题(共 1 题， 8 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方阵 A 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，

证明：$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 不是 A 的特征向量.

证：反证法：设 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则有

$$\mathrm{A}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3);$$

已知 $\mathrm{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\mathrm{A}\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，$\mathrm{A}\alpha_3=\lambda_3\alpha_3$，代入上式整理得

$$(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2+(\lambda-\lambda_3)\alpha_3=0，(*)$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

于是 $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=\lambda-\lambda_3=0\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，与已知矛盾；

故假设错误，原结论得证，即 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 不是 A 的特征向量.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

$$\begin{cases} x_2+2x_3+2x_4=-1\\ x_1+x_2+2x_3-x_4=-1\\ ax_2+2x_3+bx_4=b-1\\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+1\end{cases}$$

(1) 讨论 a, b 取何值时，此方程组无解，有无穷多解，有唯一解；

(2) 当方程组有无穷解时，求其一般解.

解：方程组的增广矩阵

$$(A,d)=\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&2&2&-1\\1&1&2&-1&-1\\0&a&2&b&b-1\\1&1&2&b-2&b+1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&-1&-1\\0&1&2&2&-1\\0&a&2&b&b-1\\1&1&2&b-2&b+1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{\substack{r_4-r_1\\r_1-r_2}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&0\\0&1&2&2&-1\\0&a-1&0&b-2&b\\0&0&0&b-1&b+2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&0\\0&1&2&2&-1\\0&a-1&0&-1&-2\\0&0&0&b-1&b+2\end{array}\right)=(U_1,d')$$

$Ax=d$ 与 $U_1x=d'$为同解方程组：

(1) 当 $|U_1|=-2(a-1)(b-1)\neq 0$，

即 $a\neq 1$ 且 $b\neq 1$ 时，原方程组有唯一解；

(2) 当 $b=1$ 时，增广矩阵

$$(A,d)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&0\\0&1&2&2&-1\\0&a-1&0&-1&-2\\0&0&0&0&3\end{array}\right)$$

则原方程组无解；

(3) 当 $a=1$ 且 $b\neq 1$ 时，增广矩阵

$$(A,d)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&0\\0&1&2&2&-1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&4-b\end{array}\right)$$

①当 $4-b\neq 0$，即 $b\neq 4$ 时，则原方程组无解；

②当 $4-b=0$，即 $b=4$ 时，增广矩阵

$$(A,d)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&6\\0&1&2&0&-5\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)=(U_2,d'')$$

取 x_3 为自由未知量，

1) 令 $x_3=0$，代入 $U_2x=d''$，得原方程组的一个特解 $x_0=(6,-5,0,2)^T$；

2) 令 $x_3=1$，代入 $U_2x=0$，得 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\xi=(0,-2,1,0)^T$；

则原方程组的通解为 $x=x_0+k\xi=\begin{pmatrix}6\\-5\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$k$ 任意；

综上，$\begin{cases}\text{当 } a\neq1 \text{ 且 } b\neq1 \text{ 时，方程组有唯一解；}\\ \text{当 } b=1 \text{ 或 } a=1 \text{ 且 } b\neq4 \text{ 时，方程组无解；}\\ \text{当 } a=1 \text{ 且 } b=4 \text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、二次型（共 1 题，14 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$.

(1) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的实对称阵的所有特征值；

(2) 若 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范型为 $z_1^2+z_2^2$，求 a 的值；

(3) 设 a 取(2)中的值，写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 通过正交变换法化成的标准型，

以及相应的正交矩阵.

解：二次型对应的矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

(1) A 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-(1-a)&-(1+a)&0\\-(1+a)&\lambda-(1-a)&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+2a)(\lambda-2)^2,$$

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2a$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $z_1^2+z_2^2$，则其正惯性指数为 2，负惯性指数为 0；

于是 $a=0$；

(3) 此时，矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$；

①对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases}\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}\\\xi_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$，（显然 ξ_1,ξ_2 正交）

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$$令\ \beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

2)单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}};$$

②对于特征值 $\lambda_3=0$，由$(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0\Leftrightarrow \mathrm{A}x=0$，

即 $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $\mathrm{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，

且使得 $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$；

④令 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x=\mathrm{Q}y$，

原二次型就化成标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x=y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ})y=2y_1^2+2y_2^2$.