一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 若向量 $\alpha=(3,2,1)^T$，$\beta=(4,1,2)^T$，$\gamma=(-1,-2,1)^T$，则 $2\alpha-\beta+\gamma=(\quad)$.

解：$2\alpha-\beta+\gamma=2(3,2,1)^T-(4,1,2)^T+(-1,-2,1)^T=(1,1,1)^T$.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2+2A+3\boldsymbol{I}=O$，则 $(A+3\boldsymbol{I})^{-1}=(\quad)$.

解：$A^2+2A+3\boldsymbol{I}=O\Longrightarrow(A+3\boldsymbol{I})(A-\boldsymbol{I})=-6\boldsymbol{I}$

$$\Longrightarrow(A+3\boldsymbol{I})^{-1}=-\frac{A-\boldsymbol{I}}{6}=\frac{\boldsymbol{I}-A}{6}.$$

3. 已知 $\alpha_1=(1,2,1,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,3,3)^T$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解，且系数矩阵的秩为 3，则方程组 $Ax=b$ 的一般解为(　).

解：$r(A)=3\Longrightarrow Ax=0$ 的基础解系只含有 $4-r(A)=1$ 个向量 ξ；

则 $Ax=b$ 的一般解 $x=x_0+k\xi$，k 任意.

① x_0可取 α_1；

②令 $\xi=\alpha_1-\alpha_2=(0,1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$；

于是，$Ax=b$ 的一般解

$$x=(1,2,1,2)^T+k(0,1,-2,-1)^{\mathrm{T}}，k\text{ 任意}.$$ (答案形式不唯一)

4. 设 A, B 均为 n 阶方阵，$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=1$，则 $|B^{-1}+A|=$(　).

解：$|B^{-1}+A|=|B^{-1}(A^{-1}+B)A|=|B^{-1}|\cdot|A^{-1}+B|\cdot|A|=\frac{3}{2}$.

5. 矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^{\mathrm{T}}=A^*$，若 $2a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$，则 $a_{11}=(\quad)$.

解：(1) $A=(a_{ij})_{3\times3}$，$A^{\mathrm{T}}=(a_{ji}^T)_{3\times3}$，且有 $a_{ij}=a_{ji}^T$；

$cof A=(A_{ij})_{3\times3}$，$A^*=(A_{ji}^T)_{3\times3}$，且有 $A_{ij}=A_{ji}^T$；

又已知 $A^{\mathrm{T}}=A^*$，有 $a_{ji}^T=A_{ji}^T$；

由上述三式可知 $a_{ij}=A_{ij}$.

(2) $|A|$ 按第1 行展开，得

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=9a_{11}^2>0.$$

(3) 由 $A^T = A^* \Longrightarrow |A^T| = |A^*| \Longrightarrow |A| = |A|^{3-1} \xrightarrow{|A|>0} |A| = 1$；

即 $9a_{11}^2 = 1 \Longrightarrow a_{11} = \frac{1}{3}$.

6. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，与矩阵 B 相似，则 $|B-3\boldsymbol{I}| = (\quad)$.

解：A 的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$

则 A 的特征值为 $1, 2, -1$；

矩阵 B 与 A 相似，则 B 的特征值也为 $1, 2, -1$；

从而 $B-3\boldsymbol{I}$ 的特征值为 $-2, -1, -4$，于是 $|B-3\boldsymbol{I}| = -8$.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & a \end{pmatrix}$，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解，则 $a = ($ D $)$.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

解：$Ax = 0$ 有非零解，则系数行列式 $|A| = 0 \Longrightarrow a = 3$.

2. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，向量 β_2 不能由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，则对任意常数 k 必有（ A ）

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关；(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关；

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关；(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关；

解：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，且 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关；则(A)正确.

3. 设 A 为 3 阶方阵，B 为 2 阶方阵，C 为 3×2 矩阵，且 $|A| = 3$，$|B| = 2$，

则 $\begin{vmatrix} O & B \\ A & C \end{vmatrix} = ($ C $)$.

(A) 3　(B) 2　(C) 6　(D) -6

解：$\begin{vmatrix} O & B \\ A & C \end{vmatrix} = (-1)^{3\times 2} |A| \cdot |B| = 6$.

4. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 1 列加到第 3 列得 B，再将 B 的第 3 行的 -1倍加到第 1 行得 C，记 $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则一定有（ B ）.

(A) $\mathrm{A}=\mathrm{PCP}^{\mathrm{T}}$　(B) $\mathrm{A}=\mathrm{PCP}^{-1}$　(C) $\mathrm{A}=\mathrm{PCP}$　(D) $\mathrm{A}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{CP}$

解：$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_{31}(1)$；又已知 $\mathrm{A}\xRightarrow{c_3+c_1}\mathrm{B}\xRightarrow{r_1-r_3}\mathrm{C}$，

则 $\mathrm{C}=E_{31}(-1)\mathrm{B}=E_{31}(-1)\mathrm{A}E_{31}(1)=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$

从而 $\mathrm{A}=\mathrm{PCP}^{-1}$

5. 记 $r(\mathrm{X})$ 表示矩阵 X 的秩，$r(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 表示分块矩阵 (X,Y) 的秩；则对 n 阶矩阵 A, B, 下列一定成立的是（ A ）.

(A) $r(\mathrm{A},\mathrm{AB})=r(\mathrm{A})$；　(B) $r(\mathrm{A},\mathrm{BA})=r(\mathrm{A})$；

(C) $r(\mathrm{A},\mathrm{B})=\max\{r(\mathrm{A}),r(\mathrm{B})\}$；　(D) $r(\mathrm{A},\mathrm{B})=r(\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}^{\mathrm{T}})$.

解：(A)：矩阵 $(\mathrm{A},\mathrm{AB})=\mathrm{A}(\boldsymbol{I},\mathrm{B})$，则 $r(\mathrm{A})\le r(\mathrm{A},\mathrm{AB})=r(\mathrm{A}(\boldsymbol{I},\mathrm{B}))\le r(\mathrm{A})$,

所以 $r(\mathrm{A},\mathrm{AB})=r(\mathrm{A})$.

(B)：$r(\mathrm{A},\mathrm{BA})\ge r(\mathrm{A})$；

(C)：$\min\{r(\mathrm{A}),r(\mathrm{B})\}\le r(\mathrm{A},\mathrm{B})\le r(\mathrm{A})+r(\mathrm{B})$；

(D)：反例：$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

则 $(\mathrm{A},\mathrm{B})=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\mathrm{A},\mathrm{B})=2$；

$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}^{\mathrm{T}})=1$

6. 设 A 为 3 阶方阵，已知存在可逆矩阵 P，使得 $\mathrm{PAP}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则下列对角阵中与 A 相似的是（ B ）.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

解：记矩阵 $B=PAP^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A\sim B$，二者有相同的特征值；

B 的特征多项式 $|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-2&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$

则 B 的特征值为 $2,3,-1$；从而 A 的特征值也为 $2,3,-1$；

与 A 合同的对角阵的主对角元也是 $2,3,-1$.

三、计算题(共 4 题，每题 8 分，共 32 分)

1. 计算如下 $n+1$ 阶行列式的值，其中a_0，a_1，$a_2,\cdots$，a_n 均不为 0；

$$\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}.$$

解：$$\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1/a_1&1&0&\cdots&0\\1/a_2&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1/a_n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1-r_2-\cdots-r_{n+1}}{=\!=\!=\!=\!=}a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}&0&0&\cdots&0\\1/a_1&1&0&\cdots&0\\1/a_2&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1/a_n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $2BA^2=A^*BA^2+3A$，A^* 为 A 的伴随矩阵，

求矩阵 B.

解：$|A| = 1$，则 A 可逆；

(1) $2BA^2 = A^*BA^2 + 3A \Longrightarrow (2\boldsymbol{I} - A^*)BA^2 = 3A \Longrightarrow (2\boldsymbol{I} - A^*)BA = 3\boldsymbol{I}$

$\Longrightarrow B = (2\boldsymbol{I} - A^*)^{-1}3\boldsymbol{I}A^{-1} = 3\big(A(2\boldsymbol{I} - A^*)\big)^{-1} = 3(2A - \boldsymbol{I})^{-1}$

(2) $2A - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $(2A - \boldsymbol{I})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$；

则 $B = 3\begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (-1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3 = (1, 2, 4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4 = (-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，求向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出.

解：记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

①秩$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$；

②$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组；

③$\alpha_3 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2$；

4. 已知 R^2的两组基为 $\mathbf{B_1} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，$\mathbf{B_2} = \{\beta_1, \beta_2\}$，其中

$\alpha_1 = (1, 1)^T$，$\alpha_2 = (1, -1)^T$；$\beta_1 = (3, -1)^T$，$\beta_2 = (5, -1)^T$；

(1) 求从基 $\mathbf{B_1}$到基 $\mathbf{B_2}$的过渡矩阵；

(2) 若向量 γ 在基 $\mathbf{B_1}$下的坐标为 $(3, 4)^T$，求 γ 在基 $\mathbf{B_2}$下的坐标.

解：

(1) 仍记矩阵 $B_1 = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$B_2 = (\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，

因为 $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)A$，即 $B_1A = B_2$，解此矩阵方程

$$(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)=\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&3\end{pmatrix}=(I,\mathrm{A})$$

则从基 α_1,α_2 到基 β_1，β_2 的过渡矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$

(2) 两种方法：已知 γ 在基 α_1,α_2 下的坐标为 $\gamma_{B_1}=(3,4)^{\mathrm{T}}$，

设 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标为 γ_{B_2}，

方法 1：因为 $\gamma=\mathrm{B}_1\gamma_{B_1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$；

又有 $\gamma=\mathrm{B}_2\gamma_{B_2}$，则求解该方程组

$$(\mathrm{B}_2,\gamma)=\left(\begin{array}{cc|c}3&5&7\\-1&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&2\end{array}\right),$$

则 γ 在基 B_2 下的坐标向量 $\gamma_{B_2}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$；

方法 2：因为 $\mathrm{A}\gamma_{B_2}=\gamma_{B_1}$，求解该非齐次线性方程组

$$\left(\mathrm{A},\gamma_{B_1}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\2&3&4\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&2\end{array}\right)=(I,\gamma_{B_2})$$

则 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标为 $\gamma_{B_2}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

四、证明题（共 1 题，8 分）

设 α_1,α_2 是 3 阶方阵 A 分别对应于特征值 $-2,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $\mathrm{A}\alpha_3=2\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

证：已知 $\begin{cases}\mathrm{A}\alpha_1=-2\alpha_1\\\mathrm{A}\alpha_2=\alpha_2\end{cases}$，从而 α_1,α_2 线性无关；

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$　(*1)

于是 $k_1\mathrm{A}\alpha_1+k_2\mathrm{A}\alpha_2+k_3\mathrm{A}\alpha_3=0$，又 $\mathrm{A}\alpha_3=2\alpha_2+\alpha_3$，

整理，得 $-2k_1\alpha_1+(k_2+2k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$　(*2)

(*2) − (*1)，得 $-3k_1\alpha_1+2k_3\alpha_2=0$，又 α_1,α_2 线性无关

于是 $k_1=k_3=0$，代入(*1)，得 $k_2\alpha_2=0$，从而 $k_2=0$；

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

五、解方程组（共 1 题，12 分）

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + (a-1)x_3 + (b-3)x_4 = b+6 \\ -2x_1 - x_2 + (b-2)x_4 = b-2 \end{cases}$$

(1) 讨论 a,b 取何值时，方程组无解，有无穷多解，有唯一解；

(2) 当方程组有无穷多解时求其一般解.

解：增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & a-1 & b-3 & b+6 \\ -2 & -1 & 0 & b-2 & b-2 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & b+3 \end{array}\right)=(\mathrm{U},d)$$

原方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 与 $\mathrm{U}x=d$ 同解，则

①当 $|\mathrm{U}|=(a-1)(b-2)\neq 0$，即 $a\neq 1$，且 $b\neq 2$ 时，原方程组有唯一解；

②当 $b=2$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$

出现矛盾方程，故原方程组无解；

③当 $a=1$，且 $b\neq 2$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7-b \end{array}\right)$

1) 当 $7-b\neq 0$，即 $b\neq 7$ 时，出现矛盾方程，故原方程组无解；

2) 当 $b=7$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

取 x_3 为自由未知量，

令 $x_3=0$，得方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 的一个特解 $x_0=(1,3,0,2)^{\mathrm{T}}$；

令 $x_3=1$，得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系 $\xi=(-4,8,1,0)^{\mathrm{T}}$；

则原方程组的一般解为 $x=x_0+k\xi=(1,3,0,2)^{\mathrm{T}}+k(-4,8,1,0)^{\mathrm{T}}$，$k$ 任意.

综上，$\begin{cases}\text{当 } a\neq 1\text{，且 } b\neq 2 \text{ 时，方程组有唯一解；}\\ \text{当 } b=2 \text{ 或 } a=1\text{，且 } b\neq 7 \text{ 时，方程组无解；}\\ \text{当 } a=1\text{，且 } b=7 \text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、二次型（共 1 题，12 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$的秩为 1，

(1) 求 c 的值；

(2) 利用正交变换法将二次型化为标准形，并写出对应的正交矩阵；

(3) 写出规范形.

解：二次型对应的矩阵为 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&c\end{pmatrix}$，

(1) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&c\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&0\\0&0&c-4\end{pmatrix}$

已知 $r(\mathrm{A})=1\Rightarrow c=4$；则 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$.

(2) A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-2\\1&\lambda-1&2\\-2&2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-6)$，

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=6$；

①对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0\Leftrightarrow \mathrm{A}x=0$

即 $\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases}\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}\\ \xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$；

令 $\beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

2)单位化：令 $\eta_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}};$$

③对于特征值 $\lambda_3=6$，由$(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $\mathrm{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，

且使得 $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&6\end{pmatrix}$；

④令 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x=\mathrm{Q}y$，原二次型就化成标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x=y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ})y=6y_3^2$.

(3) 二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 0，

则二次型的规范形为：z_3^2；（这里 z_1^2，z_2^2 都可以.）