一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1.若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量，且已知 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，

则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|=$______.

解：$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2| \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2|$

$= -|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|$

$= -m+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3| = -m+n = n-m.$

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+A=4I$，则 $(A-I)^{-1}=$______.

解：$A^2+A=4I \Rightarrow (A-I)(A+2I)=2I$

$$\Rightarrow (A-I)\left[\frac{1}{2}(A+2I)\right]=I \Rightarrow (A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2I).$$

3. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵， 若交换 A 的第一行与第二行得矩阵 B，

则 $|BA^*|=$______.

解：$\left.\begin{array}{l} A \xRightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} B \Rightarrow |B|=-|A| \\ |A^*|=|A|^2=9 \end{array}\right\} \Rightarrow |BA^*|=|B|\cdot|A^*|=-27.$

4. 已知 R^2 中两组基为 $\begin{array}{l}\alpha_1=(1,-1)^T,\alpha_2=(1,0)^T; \\ \beta_1=(1,2)^T,\beta_2=(3,5)^T,\end{array}$ 则从基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 的过渡矩阵

是________，已知 α 在基 α_1,α_2 下的坐标为 $(1,-1)^T$，则 α 在基 β_1,β_2 下的坐标为______.

解：(1) 记矩阵 $\mathrm{B}_1=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}_2=(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$，

因为 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\mathrm{A}$，即 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}=\mathrm{B}_2$，解此矩阵方程

$$(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\-1&0&2&5\end{pmatrix} \xRightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1&0&-2&-5\\0&1&3&8\end{pmatrix}=(I,\mathrm{A})$$

则从基 α_1,α_2 到基 β_1，β_2 的过渡矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2&-5\\3&8\end{pmatrix}$

(2) 两种方法：已知 γ 在基 α_1,α_2 下的坐标为 $\gamma_{B_1}=(1,-1)^{\mathrm{T}}$，

设 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标为 γ_{B_2}，

方法 1：因为 $\gamma = B_1\gamma_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$；

又有 $\gamma = B_2\gamma_{B_2}$，则求解该方程组

$$(B_2,\gamma) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

则 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标向量 $\gamma_{B_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$；

方法 2：因为 $A\gamma_{B_2} = \gamma_{B_1}$，求解该非齐次线性方程组

$$(A,\gamma_{B_1}) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I,\gamma_{B_2})$$

则 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标为 $\gamma_{B_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$， B 与 A 相似，则 $|B^{-1}-I| =$______.

解：$A \sim B \Rightarrow B$ 的特征值也为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4} \Rightarrow B^{-1}$ 的特征值为 $2,3,4$；

$B^{-1} - \boldsymbol{I}$ 的特征值为 $2-1$，$3-1$，$4-1$，即 1，2，3；

则 $|B^{-1} + 2\boldsymbol{I}| = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化，则 $a =$______.

解：矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I} - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -3 & 5 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-4)$,

则 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 4$；

A 可对角化，则对特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{I} - A)x = 0$，

即 $Ax = 0$ 的基础解系包含的向量个数为 $2 = 3 - r(A) \Rightarrow r(A) = 1$，

从而 $a = 0$.

二、选择题(共 8 题，每题 3 分，共 24 分)

1. 已知矩阵 A 的类型是 2×3，矩阵 B 的类型是 3×4，则下列（ C ）运算可行.

（A） $A+B$ （B） $A-B$ （C） AB （D） BA

解：A 的列数 = B 的行数.

2. 设n维列向量$\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T, a<0$, $A=I-\alpha\alpha^T, B=I+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$，已知$A$与$B$互为逆矩阵，

则$a=$（ B ）.

（A） -3 （B） -1 （C） 1 （D） -2

解：$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=(a,0,\cdots,0,a)(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}=2a^2$，

$$\boldsymbol{I}=\mathrm{AB}=(\boldsymbol{I}-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{a}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\right)=\boldsymbol{I}^2+\frac{1}{a}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha-\alpha^{\mathrm{T}}\alpha-\frac{1}{a}\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$$

$$=\boldsymbol{I}+(\tfrac{1}{a}-1-2a)\alpha^T\alpha,$$

由上可知，$\frac{1}{a}-1-2a=0$

$$\Leftrightarrow 2a^2+a-1=0\Rightarrow a=\tfrac{1}{2}\text{或}-1;$$

又$a<0$，则$a=-1.$

3. 设A、B均为3阶方阵，$|A|=2,|B|=3$，A^*、B^*分别为A、B的伴随矩阵，令$C=\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}$，

则C的伴随矩阵$C^*=$（ C ）.

(A) $\begin{pmatrix}O & 2B^*\\ 3A^* & O\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}-2B^* & O\\ O & -3A^*\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}O & -2B^*\\ -3A^* & O\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}O & -3B^*\\ -2A^* & O\end{pmatrix}$

解：$|\mathrm{C}|=\begin{vmatrix}O & \mathrm{A}\\ \mathrm{B} & O\end{vmatrix}=(-1)^{3\cdot 3}|\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|=-|\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|=-6\Rightarrow \mathrm{C}$ 可逆，

且$\mathrm{C}^{-1}=\begin{pmatrix}O & \mathrm{B}^{-1}\\ \mathrm{A}^{-1} & O\end{pmatrix}$，因为$\mathrm{C}^*\mathrm{C}=|\mathrm{C}|\boldsymbol{I}$；

则$\mathrm{C}^*=|\mathrm{C}|\mathrm{C}^{-1}=-|\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|\begin{pmatrix}O & \mathrm{B}^{-1}\\ \mathrm{A}^{-1} & O\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}O & -|\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|\mathrm{B}^{-1}\\ |\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|\mathrm{A}^{-1} & O\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}O & -|\mathrm{A}|\mathrm{B}^*\\ -|\mathrm{B}|\mathrm{A}^* & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & -2\mathrm{B}^*\\ -3\mathrm{A}^* & O\end{pmatrix}.$$

4. 已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性

相关的是（ C ）.

（A） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ （B） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ （C） $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ （D） $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

解：$\alpha_3+\alpha_4=(0,0,c_3+c_4)=k\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

5. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵， B 为 $n\times m$ 矩阵， I 为 m 阶单位矩阵，若 $AB=I$，则（ A ）.

（A） $r(A)=m,r(B)=m$ （B） $r(A)=m,r(B)=n$

（C） $r(A)=n,r(B)=m$ （D） $r(A)=n,r(B)=n$

解：AB 为 m 阶方阵，又 $\mathrm{AB}=I$，则 $m=r(\mathrm{AB})\le \begin{cases} r(\mathrm{A})\le m \\ r(\mathrm{B})\le m \end{cases} \Longrightarrow r(\mathrm{A})=r(\mathrm{B})=m.$

6. 设 A 是 4×3 矩阵，$r(A)=1$，ξ_1,ξ_2,ξ_3 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个线性无关解，下列哪个是 $Ax=0$ 的基础解系？（ A ）.

(A) $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_2$ (B) $\xi_1+\xi_2-2\xi_3$ (C) $\xi_1+\xi_2+\xi_3$ (D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3$

解：A 是 4×3 矩阵，$r(\mathrm{A})=1 \Longrightarrow \mathrm{A}x=0$ 的基础解系含有 $3-r(\mathrm{A})=2$ 个向量.

ξ_1,ξ_2,ξ_3是 $\mathrm{A}x=b$ 的三个线性无关的解 $\Longrightarrow \xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_2$是 $\mathrm{A}x=0$ 的解；

且 $\mathrm{M}=(\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_2)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{BC}$，

秩$(\mathrm{B})=$秩$\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}=3 \Longrightarrow \mathrm{B}$ 可逆，秩$(\mathrm{C})=2$；

则秩$\{\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_2\}=$秩$(\mathrm{M})=$秩$(\mathrm{BC})=$秩$(\mathrm{C})=2$，

所以，$\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_2$ 线性无关；

于是，$\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_2$ 是 $\mathrm{A}x=0$ 的基础解系.

注：以下两道为多选题

7. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵， $r(A)=m(m<n)$， B 是 n 阶方阵，则下列叙述正确的是（ CEF ）.

(A) A 中任一 m 阶子式均不等于 0 (B) A 中任一 m 列均线性无关

(C) A 的行向量组线性无关 (D) $r(A^TA)=n$

(E) 若 $r(B)=n$，则 $r(AB)=m$ (F) 齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解

8. 设 A、B 均为 n 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$，则下列叙述正确的是（ ABC ）.

(A) A、B 既相似又合同 (B) $|A|=|B|$

(C) 若A正定，则B也正定　　(D) A与B有相同的特征值，也有相同的特征向量

三、计算题（共 3 题，共 24 分）

1．(6 分)求n阶行列式的值：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ -1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,\cdots,n-1]{r_i-r_n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & -n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)\cdot(-1)^{n-1}(n+1)^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}$$

2．(8 分)设向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)^T$，$\alpha_2=(0,3,1,2)^T$，$\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(2,1,5,6)^T$，$\alpha_5=(1,-1,2,0)^T$，求它的一个极大线性无关组、此向量组的秩、并且将剩余向量用求出的这个极大线性无关组线性表出。

解：记矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2+r_1]{\substack{r_4-2r_3\\ r_3-2r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\cdot(-\frac{1}{4})]{r_2\cdot\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

①秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$；

②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③对向量 α_3,α_5，有$\begin{cases}\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_5=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4\end{cases}$.

3. （10 分）若方阵 P,Q 满足 $PQ=P+Q$，

（1）证明 $P-I,Q-I$ 均可逆　　（2）已知 $P=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 Q

解：（1）$(\mathrm{P}-I)(\mathrm{Q}-I)=\mathrm{PQ}-\mathrm{P}-\mathrm{Q}+I=I$，因为 $\mathrm{PQ}=\mathrm{P}+\mathrm{Q}$，

则有$(\mathrm{P}-I)(\mathrm{Q}-I)=I$，则矩阵 $\mathrm{P}-I$，$\mathrm{Q}-I$ 可逆；

（2）$\mathrm{PQ}=\mathrm{P}+\mathrm{Q}\Longrightarrow(\mathrm{P}-I)\mathrm{Q}=\mathrm{P}$，而 $\mathrm{P}-I=\begin{pmatrix}0&-3&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

则 $(\mathrm{P}-I,\mathrm{P})=\begin{pmatrix}0&-3&0&1&-3&0\\2&0&0&2&1&0\\0&0&1&0&0&2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2\cdot\frac{1}{2}]{r_1\cdot(-\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}0&1&0&-1/3&1&0\\1&0&0&1&1/2&0\\0&0&1&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&1/2&0\\0&1&0&-1/3&1&0\\0&0&1&0&0&2\end{pmatrix}=(I,\ \mathrm{Q}),$$

则 $\mathrm{Q}=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\-1/3&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

四、（8 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是矩阵 A 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，

若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta$ 不是 A 的特征向量。

证：反证法：设 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则有

$$\mathrm{A}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3);$$

已知 $\mathrm{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\mathrm{A}\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,\ \mathrm{A}\alpha_3=\lambda_3\alpha_3$，代入上式整理得

$$(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2+(\lambda-\lambda_3)\alpha_3=0,\ (*)$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

于是 $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=\lambda-\lambda_3=0\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，与已知矛盾；

故假设错误，原结论得证；

即 β 不是 A 的特征向量.

五、（12 分）已知

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

试就 a,b 讨论方程组解的情况，当有无穷多个解的时候，求出这无穷多个解。

解：方程组的增广矩阵

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)=(\mathrm{U},d)$$

原方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 与 $\mathrm{U}x=d$ 同解，则

(1) 当 $|\mathrm{U}|=(a-1)^2\neq 0$，即 $a\neq 1$ 时，原方程组有唯一解；

(2) 当 $a=1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

①当 $b+1\neq 0$，即 $b\neq -1$ 时，出现矛盾方程，故原方程组无解；

②当 $a=1$，且 $b=-1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

取 x_3,x_4 为自由未知量，

1) 令 $x_3=x_4=0$，得原方程组的一个特解 $x_0=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

2) 令 $(x_3,x_4)=\begin{cases}(1,0)\\(0,1)\end{cases}$，得齐次线性方程组 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系

$$\xi_1=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}，\xi_2=(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}；$$

则原方程组的一般解为

$x = x_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$

$= (-1,1,0,0)^{\mathrm{T}} + k_1(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_1, k_2$ 任意.

综上，$\begin{cases} \text{当 } a \neq 1 \text{ 时，方程组有唯一解；} \\ \text{当 } a = 1\text{，且 } b \neq -1 \text{ 时，方程组无解；} \\ \text{当 } a = 1\text{，且 } b = -1 \text{ 时，方程组有无穷多解.} \end{cases}$

六、(14 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$，

(1) 求二次型 f 对应矩阵的所有特征值；

(2) 若二次型 f 的规范型为 $y_1^2 + y_2^2$，求 a 的值；

(3) 利用正交变换法，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型，并写出相应的正交矩阵。

解：二次型对应的矩阵为 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$，

(1) A 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I} - \mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - (a-1) \end{vmatrix}$

$= [\lambda - (a-2)](\lambda - a)[\lambda - (a-1)]$，

则 A 的特征值为 $\lambda_1 = a-2$，$\lambda_2 = a$，$\lambda_3 = a+1$；

(2) 二次型的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$，则其正惯性指数为 2，负惯性指数为 0；

则 A 的特征值一个为 0，其余两个均大于 0；则 $a = 2$；

(3) 矩阵为 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，其特征值为 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = 3$；

①对于 $\lambda_1 = 0$，由 $(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \mathrm{A})x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}x = 0$，

即 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$，得基础解系 $\xi_1 = (-1,1,2)^{\mathrm{T}}$，

单位化：令 $\eta_1 = \dfrac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1 = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$；

②对于 $\lambda_2 = 2$，由 $(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \mathrm{A})x = 0$，

即 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$，得基础解系 $\xi_2 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

单位化：令 $\eta_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}$；

③对于特征值 $\lambda_3=3$，由$(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$；

④记矩阵 $\mathrm{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 Q 为正交阵，

且使得 $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$

⑤令 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x=\mathrm{Q}y$，

原二次型就化成标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x=y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ})y=2y_2^2+3y_3^2$.