一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$, A^*是 A 的伴随矩阵, 则 $|4AA^*|=$____

解：$AA^*=|A|I$，则 $|4AA^*|=|4|A|I|=|2I|=2^3=8$；

2. 已知 $A=P\Lambda Q$，其中 $P=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix},QP=I$

（I 是 2 阶单位矩阵），则 $A^8=$________

解：$A^8=\underbrace{AA\cdots A}_{8\text{个}}=\underbrace{(P\Lambda Q)(P\Lambda Q)\cdots(P\Lambda Q)(P\Lambda Q)}_{8\text{个}}$

$=P\underbrace{\Lambda(QP)\Lambda(Q\cdots P)\Lambda(QP)\Lambda}_{8\text{个}\Lambda}Q$ ，已知 $QP=I$

$=P\Lambda^8Q=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^8&0\\0&(-1)^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I.$

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$，则 $a=$________

解：$r(A)=2\Rightarrow\begin{cases}a\neq0\text{ 且 }a\neq1\\|A|=\begin{vmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{vmatrix}=0\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}.$

4. 设 η_1,η_2,η_3 为 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，系数矩阵 A 的秩为 3，$\eta_1+\eta_2=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$，$\eta_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，则该方程组的一般解为______

解：$r(A)=3\Rightarrow Ax=0$ 的基础解系含有 $4-r(A)=1$ 个向量.

$Ax=b$ 的一般解 $x=x_0+k\xi$：

① x_0 可取 $\eta_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$；

②取 $\xi=(\eta_1-\eta_3)+(\eta_2-\eta_3)=\eta_1+\eta_2-2\eta_3=(1,0,-1,-2)^{\mathrm{T}}$；

于是，$Ax=b$ 的一般解 $x=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+k(1,0,-1,-2)^{\mathrm{T}}$.

5. 若 3 阶方阵 A 与 B 相似，I 为 3 阶单位矩阵，A 的特征值为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，

则行列式 $|B^{-1}-I|=$__________

解：$\mathrm{A}\sim\mathrm{B}\Longrightarrow\mathrm{B}$ 的特征值也为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\Longrightarrow\mathrm{B}^{-1}$ 的特征值为 $2,3,4$；

$\mathrm{B}^{-1}-I$ 的特征值为 $2-1$，$3-1$，$4-1$，即 1，2，3；

则 $|\mathrm{B}^{-1}-I|=1\cdot2\cdot3=6.$

6. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&a\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可对角化, 则 $a=$__________.

解：矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\-3&\lambda-1&-a\\-4&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-6)$,

则 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$；

A 可对角化，则对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$ 的基础解系包含的向量个数为 $2=3-r(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})\Longrightarrow r(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})=1$；

特征矩阵 $(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-3&0&-a\\-4&0&-4\end{pmatrix}$，则

方法 1：特征矩阵$(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&3-a\\0&0&0\end{pmatrix}$

从而 $3-a=0\Longrightarrow a=3$；

方法 2：$(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})$ 的任一 2 阶子式为 $0\Longrightarrow\begin{vmatrix}-1&-1\\-3&-a\end{vmatrix}=0\Longrightarrow a=3.$

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知 A,B 均为 n 阶可逆方阵，k 为常数，则下列命题不正确的是（ A ）.

A. $|A+B|=|A|+|B|$ B. $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

C. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ D. $|kAB|=k^n|A||B|$

2. 设 A 是 3×4 矩阵，B 是 4×3 矩阵，则下列结论正确的是(C).

A. $ABx=0$必有非零解　　　B. $ABx=0$只有零解

C. $BAx=0$必有非零解　　　D. $BAx=0$只有零解

解：AB 是 3×3 矩阵，BA 是 4×4 矩阵，$r(BA)\le r(A)\le 3<4$，

则 $BAx=0$ 必有非零解.

3. 设 A,B 均为 3 阶可逆方阵, 若交换 A 的第一行与第三行得方阵 B，则下列叙述正确的是(B).

A. 交换A^{-1}的第一行与第三行得 B^{-1}　　B. 交换A^{-1}的第一列与第三列得 B^{-1}

C. 交换A^{-1}的第一行与第三行得$-B^{-1}$　　D. 交换A^{-1}的第一列与第三列得$-B^{-1}$

解：$A\xRightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}B$，则 $B=E_{13}A$，于是 $B^{-1}=(E_{13}A)^{-1}=A^{-1}E_{13}^{-1}=A^{-1}E_{13}$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 A 与 B(B).

A. 合同且相似　　B. 合同但是不相似

C. 不合同但相似　　D. 不合同不相似

解：$\begin{cases}A\text{ 是 3 阶实对称矩阵}\\ r(A)=1\Rightarrow |A|=0\end{cases}\Rightarrow 0$ 是 A 的 2 重特征值，即 $\lambda_1=\lambda_2=0$；

A 的各行元素之和是 3，则 3 是 A 的特征值，即 $\lambda_3=3$；

则 A 与 B 有相同的正惯性指数 1，相同的负惯性指数 0；

则 A 与 B 合同，但是不相似，因为相似矩阵的特征值相同.

5. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的，则下列向量组中相关的是(D).

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　B. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

C. $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$　　D. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$

解：$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)-(\alpha_1-\alpha_3)=0.$

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 下的标准型为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，若 $Q=(\alpha_1,-\alpha_3,\alpha_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 下的标准型为(A).

A. $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　B. $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

C. $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　D. $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

解：$P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

则有 $\begin{cases}A\alpha_1=2\alpha_1\\A\alpha_2=1\alpha_2\\A\alpha_3=-\alpha_3\Rightarrow A(-\alpha_3)=(-1)(-\alpha_3)\end{cases}$；

又 $Q=(\alpha_1,-\alpha_3,\alpha_2)$，于是 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

三、计算题(共 4 题，共 28 分)

1.（6 分）计算 $n+1$阶行列式的值：$\begin{vmatrix}-a_1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_n&a_n\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix}-a_1&a_1&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_n&a_n\\1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_{n+1}}\begin{vmatrix}0&a_1&0&\cdots&0&0\\0&-a_2&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-a_n&a_n\\n+1&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$

$$=(n+1)\cdot(-1)^{n+1+1}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \end{vmatrix}=(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n.$$

2.（8 分）设向量组 $\alpha_1=(-1,1,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-1,-1,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(-2,4,5,7)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_5=(1,1,-1,-5)^{\mathrm{T}}$，求此向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用其极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

$$\xRightarrow[r_2+r_1]{\substack{r_4-2r_3 \\ r_3-2r_2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\xRightarrow[r_2+r_3]{r_4-r_3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow[r_1+r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xRightarrow{r_1\cdot(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

①秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=2$；

②α_1,α_2 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③对向量 $\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，有 $\begin{cases} \alpha_3=\alpha_1-\alpha_2 \\ \alpha_4=3\alpha_1-\alpha_2 \\ \alpha_5=-\alpha_2 \end{cases}$.

3.（8 分）设矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\mathrm{A}^*\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}+2\mathrm{X}$，其中 A^*是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

解：$\mathrm{A}^*\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}+2\mathrm{X}\Rightarrow(\mathrm{A}^*-2I)\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}$

$\Rightarrow\mathrm{A}(\mathrm{A}^*-2I)\mathrm{X}=\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}=I\Rightarrow(|\mathrm{A}|I-2\mathrm{A})\mathrm{X}=I$

$\Rightarrow\mathrm{X}=(|\mathrm{A}|I-2\mathrm{A})^{-1}$；又 $|\mathrm{A}|=2$，

则 $|\mathrm{A}|I-2\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2\mathrm{B}$，

这里 $B=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$；从而 $X=(2B)^{-1}=\frac{1}{2}B^{-1}$

由 $(B,I)=\begin{pmatrix}0&-1&-2&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&-1&2&0\\0&0&1&0&-1&0\end{pmatrix}=(I,B^{-1})$，得 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$；

于是 $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

4.（6 分）已知 R^2 的两组基

$\alpha_1=(1,-1)^T$，$\alpha_2=(1,0)^T$； $\beta_1=(1,2)^T$，$\beta_2=(3,5)^T$.

(1) 求从基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 的过渡矩阵 A；

(2) 已知 γ 在基 α_1,α_2 下的坐标为 $(1,-1)^T$，求 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标.

解：

(1) 记矩阵 $B_1=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$，$B_2=(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$，

因为 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)A$，即 $B_1A=B_2$，解此矩阵方程

$$(B_1,B_2)=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\-1&0&2&5\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-5\\0&1&3&8\end{pmatrix}=(I,A)$$

则从基 α_1,α_2 到基 β_1, β_2 的过渡矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&-5\\3&8\end{pmatrix}$

(2) 两种方法：已知 γ 在基 α_1,α_2 下的坐标为 $\gamma_{B_1}=(1,-1)^T$，

设 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标为 γ_{B_2}，

方法 1：因为 $\gamma=B_1\gamma_{B_1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$；

又有 $\gamma=B_2\gamma_{B_2}$，则求解该方程组

$$(\mathrm{B}_2,\gamma)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right),$$

则 γ 在基 B_2 下的坐标向量 $\gamma_{B_2}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$；

方法 2：因为 $\mathrm{A}\gamma_{B_2}=\gamma_{B_1}$，求解该非齐次线性方程组

$$(\mathrm{A},\gamma_{B_1})=\left(\begin{array}{cc|c}-2 & -5 & 1\\ 3 & 8 & -1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)=(I,\gamma_{B_2})$$

则 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标为 $\gamma_{B_2}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

四、证明题(共 1 题， 8 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 是齐次线性方程组 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系，向量 β 满足 $\mathrm{A}\beta\neq 0$，证明：向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_p$ 线性无关.

证：设 $k\beta+k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_p(\beta+\alpha_p)=0$，

整理得 $(k+k_1+\cdots+k_p)\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_p\alpha_p=0$，(*)

等式两边左乘矩阵 A 得：

$$(k+k_1+\cdots+k_p)\mathrm{A}\beta+k_1\mathrm{A}\alpha_1+k_2\mathrm{A}\alpha_2+\cdots+k_p\mathrm{A}\alpha_p=0,$$

已知 $\mathrm{A}\alpha_i=0$，$i=1,\cdots,p$，则有 $(k+k_1+\cdots+k_p)\mathrm{A}\beta=0$，

而 $\mathrm{A}\beta\neq 0$，所以有 $k+k_1+\cdots+k_p=0$，

则(*)式变为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_p\alpha_p=0$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 是基础解系，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性无关，

于是 $k_1=k_2=\cdots=k_p=0$，从而 $k=0$；

即 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_p$ 线性无关.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

讨论 a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=1\\ x_1+ax_2+x_3=1\\ ax_1+x_2+x_3=-2\end{cases}$

无解、有无穷多解、有唯一解，并且在有无穷多解时求出方程组的一般解.

解：系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$；

又 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2)$

(1) 当 $|A|\neq 0$，即当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时，方程组有唯一解；

(2) 当 $a=1$ 时，增广矩阵

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{array}\right)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{array}\right)$$

方程组出现矛盾方程，则原方程组无解；

(3) 当 $a=-2$ 时，增广矩阵

$$(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&-2\end{array}\right)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)=(U,d)$$

取 x_3 为自由未知量，

①令 $x_3=0$，代入 $Ux=d$，得原方程组的一个特解 $x_0=(1,0,0)^T$；

②令 $x_3=1$，代入 $Ux=0$，得 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\xi=(1,1,1)^T$；

则原方程组的通解为 $x=x_0+k\xi=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 任意；

综上，$\begin{cases}\text{当 } a\neq 1 \text{ 且 } a\neq -2 \text{ 时，方程组有唯一解；}\\ \text{当 } a=1 \text{ 时，方程组无解；}\\ \text{当 } a=-2 \text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、二次型（共 1 题，14 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$，已知它对应矩阵的所有特征值之和为 12，

(1) 求 c 的值；

(2) 正交变换法将此二次型化为标准型，并写出相应的正交矩阵Q；

(3) 写出它的规范型；

(4) 分析此二次型是否是正定二次型.

解：二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & c\end{pmatrix}$,

(1) A 的所有特征值之和为 12，即 $5+5+c=12$，得 $c=2$；

从而 $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

(2) A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-5 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)^2$,

则 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6$，$\lambda_3=0$；

①对于 $\lambda_1=\lambda_2=6$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-A)x=0$，

即 $\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases}\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}\\ \xi_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$,

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,

$$\text{令 } \beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

2) 单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}};$$

②对于特征值 $\lambda_3=0$，由 $(\lambda_3\boldsymbol{I}-A)x=0\Leftrightarrow Ax=0$，

即 $\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$,

单位化得：$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则 Q 为正交阵，

且使得 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}6 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

④令 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，$y=(y_1,y_2,y_3)^T$，做正交变换 $x=Qy$，

原二次型就化成标准形 $x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=6y_1^2+6y_2^2$.

(3) 二次型的正惯性指数为 2，负惯性指数为 0；则二次型的规范形为：$z_1^2+z_2^2$.

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数为 2，不是正定二次型.