一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =(　).

解：$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 - 1.$

2. 设 3 阶方阵 $A = \alpha\beta^T$, 其中 $\alpha = (1,2,3)^T$，$\beta = (0,1,-1)^T$，则 A^{2019} =(　).

解：(1) $\mathrm{A} = \alpha\beta^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$;

(2) $\lambda = \beta^T\alpha = (0,1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1$;

(3) $\mathrm{A}^{2019} = \underbrace{\mathrm{AA}\cdots\mathrm{A}}_{2019\text{个}} = \underbrace{(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)\cdots(\alpha\beta^T)}_{2019\text{个}} = \alpha\,\underbrace{(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)}_{2018\text{个}}\beta^T$

$= \alpha(\beta^T\alpha)^{2018}\beta^T = \alpha\beta^T = \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$

3. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，$\mathrm{A} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$；如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$，则 $Ax = \beta$ 的一般解为(　).

解：矩阵 $\mathrm{A} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，由已知，得 $r(\mathrm{A}) = 3$.

由 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 \Longrightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = 0 \Longrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

得 $\mathrm{A}x = 0$ 的一个基础解系为 $\xi = (1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{A}\eta$，

得 $\mathrm{A}x = \beta$ 的一个特解为 $\eta = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

则 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=\eta+k\xi=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$k$ 任意.

4. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第二行与第三行得 B，则 $|BA^*|=$(　).

解：$\left.\begin{array}{l} A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}B\Rightarrow|B|=-|A| \\ |A^*|=|A|^2=9\end{array}\right\}\Rightarrow|BA^*|=|B|\cdot|A^*|=-27.$

5. 设 2 阶实对称矩阵 A 有对应不同特征值的特征向量 α_1 和 α_2，满足 $A^3(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+8\alpha_2$，则 $|A|=$(　).

解：已知 $\begin{cases}A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1\Rightarrow A^3\alpha_1=\lambda_1^3\alpha_1\\ A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow A^3\alpha_2=\lambda_2^3\alpha_2\end{cases}$，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，且 α_1 和 α_2 线性无关；

$$A^3(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+8\alpha_2\Rightarrow(\lambda_1^3-1)\alpha_1+(\lambda_2^3-8)\alpha_2=0$$

则 $\begin{cases}\lambda_1^3-1=0\Rightarrow\lambda_1=1\\ \lambda_2^3-8=0\Rightarrow\lambda_2=2\end{cases}$，因此 $|A|=\lambda_1\lambda_2=2$.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$，其规范型为(　).

解：二次型对应的矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}$，

其特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)\lambda$

则 A 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=5$；

于是，A 的正惯性指数为 2，负惯性指数为 0，则规范形为 $z_1^2+z_2^2$.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 4×3 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-1&-1\\-1&1&s+t\\0&3&5\end{pmatrix}$，向量 $b=\begin{pmatrix}4\\t-5\\-3\\1\end{pmatrix}$，则方程组 $Ax=b$ 有唯一解的充要条件是(B).

A. $s=4,t=-2$；B. $s\neq4,t=-2$；C. $s=4,t\neq-2$；　D. $s\neq4,t\neq-2$

解：$Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A,b)=r(A)=3$；

$$\text{增广矩阵 } (A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & t-5 \\ -1 & 1 & s+t & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & s+t-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right)$$

从而，$\begin{cases} t+2=0 \\ s+t-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-2 \\ s\neq 4 \end{cases}$.

2. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则下列向量组线性无关的是（ C ）.

A. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4-\alpha_1$

B. $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$

C. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$

D. $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4,-\alpha_1+\alpha_3-\alpha_4,-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

解：可用定义：（也可用秩）

A. $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$；

B. $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_3-\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$；

D. $(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)+2(\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)+2(-\alpha_1+\alpha_3-\alpha_4)=(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$

3. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，则（ A ）.

A. $x=0$，$y=1$；　　C. $x=0$，$y=0$；

B. $x=-1$，$y=0$；　D. $x=1$，$y=1$；

解：矩阵 A 和 B 相似 $\Rightarrow$ A 和 B 有相同的特征值；

对角阵 B 的特征值为主对角元素 $2,y,-1$，

所以 $\begin{cases} 2+y+(-1)=2+0+x \\ 2\cdot y\cdot(-1)=|A|=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

4. 设 A 为 3 阶方阵，A 的第三行加到第一行得 B，再将 B 的第三列的 (-1)倍加到第一列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A=$（ A ）.

A． $P^{-1}CP^T$； B． $PC(P^{-1})^T$； C． $(P^{-1})^TCP$； D． $(P^{-1})^TCP^{-1}$

解：$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_{31}(1)$；又已知 $A\xRightarrow{r_1+r_3}B\xRightarrow{c_1-c_3}C$,

则 $C=BE_{13}(-1)=E_{31}(1)AE_{13}(-1)=PAE_{13}(-1)$

因为 $E_{13}(-1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=(E_{31}(-1))^T=(P^{-1})^T=(P^T)^{-1}$

从而 $A=P^{-1}CP^T$.

5. 设 A,B 均为 n 阶方阵，$n\geq 3$，且 A 的秩 $r(A)=n$，B 的秩 $r(B)=n-1$，则 AB 的伴随矩阵的秩为（ B ）.

A． 0　　　B． 1　　　C． $n-1$　　　D． n

解：秩$(A)=n\Longrightarrow$ 秩$(A^*)=n\Longrightarrow A^*$ 可逆；

秩$(B)=n-1\Longrightarrow$ 秩$(B^*)=1$，又$(AB)^*=B^*A^*$

则 $r(AB)^*=r(B^*A^*)=r(B^*)=1$.

6. 设 A 为 3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量组，P 是 3 阶可逆阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=-\alpha_2$，$A\alpha_3=-\alpha_3$，则 P 可取为（ A ）.

A． $(\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2-\alpha_3)$　　　B． $(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3)$

C． $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$　　　D． $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$

解：已知 $\begin{cases} A\alpha_1 = \alpha_1 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 \\ A\alpha_2 = -\alpha_2 \Longrightarrow \lambda_2 = -1 \\ A\alpha_3 = -\alpha_3 \Longrightarrow \lambda_3 = -1 \end{cases}$；$\alpha_2, \alpha_3$ 都是属于特征值 -1 的特征向量.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix};$$

则 $P = (k_1\alpha_1,\ k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3,\ k_2^*\alpha_2 + k_3^*\alpha_3)$，

这里：$k_1 \neq 0$；k_2, k_3不全为 0；k_2^*, k_3^*不全为 0；

且 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$与 $k_2^*\alpha_2 + k_3^*\alpha_3$要线性无关.

三、计算题(共 3 题，每题 8 分，共 24 分)

1. 设向量组 $\alpha_1 = (1,2,1,3)^T$，$\alpha_2 = (-1,-1,0,-1)^T$，$\alpha_3 = (1,4,3,7)^T$，

$\alpha_4 = (-1,-2,1,-1)^T$，$\alpha_5 = (1,3,6,9)^T$；求向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

①秩$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = 3$；

②$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③ $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$，

$\alpha_5 = 4\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4$.

2. 已知 R^3 的两组基为 $\mathbf{B_1} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，$\mathbf{B_2} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，其中

$\alpha_1 = (1,2,0)^T$，$\alpha_2 = (1,0,1)^T$，$\alpha_3 = (0,-3,2)^T$；

$\beta_1 = (0,1,1)^T$，$\beta_2 = (1,1,0)^T$，$\beta_3 = (1,0,2)^T$；

(1) 求基 $\mathbf{B_1}$ 到基 $\mathbf{B_2}$ 的过渡矩阵；

(2) 若 3 维向量 γ 在基 $\mathbf{B_2}$ 下的坐标为 $(1,1,2)^T$，求 γ 在基 $\mathbf{B_1}$ 下的坐标.

解：仍记 $\mathrm{B}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\mathrm{B}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.

①由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\mathrm{A}$，即得 $\mathrm{B}_2=\mathrm{B}_1\mathrm{A}$，

于是，$(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1\\2&0&-3&1&1&0\\0&1&2&1&0&2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&5&-1&3\\0&1&0&-5&2&-2\\0&0&1&3&-1&2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{I},\mathrm{A})$$

则基 B_1到基 B_2的过渡矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-5&2&-2\\3&-1&2\end{pmatrix}$.

②两种方法：已知 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B_2}}=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$

方法 1：$\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{B}_2\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$,

又有 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{B}_1\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}$，则求解该方程组

$$(\mathrm{B}_1,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\2&0&-3&2\\0&1&2&5\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&10\\0&1&0&-7\\0&0&1&6\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(10,-7,6)^{\mathrm{T}}$.

方法 2：因为 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}=\mathrm{A}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-5&2&-2\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-7\\6\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(10,-7,6)^{\mathrm{T}}$.

3. 已知 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$是可对角化的，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，求 a,b.

解：对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，特征矩阵为 $2\boldsymbol{I}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-a&-2&-b\\3&3&-3\end{pmatrix}$;

A 可对角化，则方程组 $(2\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$ 的基础解系包含的向量个数为 2，

即 $3-r(2\boldsymbol{I}-A)=2 \Rightarrow r(2\boldsymbol{I}-A)=1$；

方法 1：$(2\boldsymbol{I}-A) \xRightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2-a & 0 & -2-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

从而 $\begin{cases} 2-a=0 \\ -2-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$；

方法 2：$(2\boldsymbol{I}-A)$ 的任一 2 阶子式均为 $0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -b \end{vmatrix}=0 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$.

4. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a_1+\lambda_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2+\lambda_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n+\lambda_n \end{pmatrix}$，求 $|A|$.

解：$\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+0 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ a_1+0 & a_2+\lambda_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ a_1+0 & a_2+0 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1+0 & a_2+0 & a_3+0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2+0 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ a_1 & a_2+0 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2+0 & a_3+0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2+0 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ 0 & a_2+\lambda_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ 0 & a_2+0 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2+0 & a_3+0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ a_1 & a_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ a_1 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ a_1 & \lambda_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ a_1 & 0 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & a_3+0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ 0 & a_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ 0 & a_2 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ 0 & \lambda_2 & a_3+0 & \cdots & a_n+0 \\ 0 & 0 & a_3+\lambda_3 & \cdots & a_n+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_3+0 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$$

$= \cdots$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \cdot (-1)^{1+1}\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n + a_2 \cdot (-1)^{2+2}\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$+a_3 \cdot (-1)^{3+3}\lambda_1\lambda_2\lambda_4\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n + \cdots + a_n \cdot (-1)^{n+n}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}$$

$$+ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$= a_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n + \lambda_1 a_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$+\lambda_1\lambda_2 a_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n + \cdots + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}a_n + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

$$= (1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i})\prod_{j=1}^{n}\lambda_j$$

四、证明题(共 2 题，每题 6 分，共 12 分)

1. 设 P 是一个 m 阶可逆矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组 m 维向量，$n \le m$.

证明：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 $P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n$ 也线性无关.

证：设 $k_1P\alpha_1 + k_2P\alpha_2 + \cdots + k_nP\alpha_n = 0$

$\Longrightarrow P(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) = 0$，$P$ 可逆

则有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，

所以，$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$；

从而 $P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n$ 也线性无关.

2. 设向量组 α_1,α_2 是线性无关的，且都与非零向量 β 正交；

证明：向量组 α_1,α_2,β 是线性无关的.

证：已知 $\begin{cases}(\alpha_1,\beta)=0\\(\alpha_2,\beta)=0\end{cases}$，设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k\beta=0$ （$*$）

则 $k_1(\alpha_1,\beta)+\ k_2(\alpha_2,\beta)+k\ (\beta,\beta)=0\Longrightarrow k(\beta,\beta)=0$，而 $\beta\neq 0$

于是 $(\beta,\beta)\neq 0$，从而 $k=0$，代入($*$)

得到 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=0$；

由此可知，向量组 α_1,α_2,β 是线性无关的.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

讨论 a,b 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=1\\x_1-x_2-2x_3-5x_4=3\\x_2+(a-1)x_3+bx_4=b-3\\x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3\end{cases}$

无解，有无穷多解，有唯一解；并在有无穷多解时求其通解.

解：增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&-1&1\\1&-1&-2&-5&3\\0&1&a-1&b&b-3\\1&1&2&b-2&b+3\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&2\\0&1&2&2&-1\\0&0&a-3&-1&-4\\0&0&0&b-1&b+2\end{array}\right)=(\mathrm{U},d)$$

原方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 与 $\mathrm{U}x=d$ 同解，则

①当 $|\mathrm{U}|=(a-3)(b-1)\neq 0$，即 $a\neq 3$，且 $b\neq 1$ 时，原方程组有唯一解；

②当 $b=1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&2\\0&1&2&2&-1\\0&0&a-3&-1&-4\\0&0&0&0&3\end{array}\right)$

出现矛盾方程，故原方程组无解；

③当 $a=3$，且 $b\neq 1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&2\\0&1&2&2&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&6-3b\end{array}\right)$

1) 当 $6-3b\neq 0$，即 $b\neq 2$ 时，出现矛盾方程，故原方程组无解；

2) 当 $b=2$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&14\\0&1&2&0&-9\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

取 x_3 为自由未知量，

令 $x_3=0$，得方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 的一个特解 $x_0=(14,-9,0,4)^{\mathrm{T}}$；

令 $x_3=1$，得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系 $\xi=(0,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

则原方程组的一般解为

$$x=x_0+k\xi=(14,-9,0,4)^{\mathrm{T}}+k(0,-2,1,0)^{\mathrm{T}}\text{，}k\text{ 任意.}$$

综上，$\begin{cases}\text{当 } a\neq 3\text{，且 } b\neq 1 \text{ 时，方程组有唯一解；}\\ \text{当 } b=1 \text{ 或 } a=3\text{，且 } b\neq 2 \text{ 时，方程组无解；}\\ \text{当 } a=3\text{，且 } b=2 \text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、化二次型为标准型（共 1 题，14 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+cx_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 1，

(1) 求 c 的值；

(2) 用正交变换法，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准型，并写出相应的正交矩阵.

解：二次型对应的矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&c&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，

(1) 由已知，得 $r(\mathrm{A})=1\Rightarrow c=1$；从而 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

(2) A 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ 1 & \lambda-1 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)$，

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$；

①对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}x=0$

即 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases}\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}\\ \xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$；

$$令\ \beta_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}},$$

2)单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}};$$

③对于特征值 $\lambda_3=3$，由$(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $\mathrm{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，

且使得 $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Q}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Q}=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$；

④令 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x=\mathrm{Q}y$，

原二次型就化成标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x=y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Q})y=3y_3^2$.