一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. n阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$的值为______.

解：$D \xlongequal[\substack{i=3,\cdots,n \\ r_2-r_1}]{r_i-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$

$$= 2\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，且 3 阶方阵 B 满足 $ABC=D$，

则$|B^{-1}|=$______.

解：$|A| = (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}1\cdot1\cdot1 = -1$；$|C| = 1$；$|D| = 6$.

$$ABC = D \Longrightarrow |A|\cdot|B|\cdot|C| = |D| \Longrightarrow |B| = -6 \Longrightarrow |B^{-1}| = -\frac{1}{6}.$$

3. 已知 R^2 中两组基为 $\begin{matrix} \alpha_1 = (1,1)^T, \alpha_2 = (0,1)^T; \\ \beta_1 = (1,-1)^T, \beta_2 = (1,2)^T, \end{matrix}$ 则从基 α_1, α_2 到基 β_1, β_2 的过渡矩阵是________，

已知 α 在基 α_1, α_2 下的坐标为 $(3,0)^T$，则 α 在基 β_1, β_2 下的坐标为______.

解：(1)记矩阵 $B_1 = (\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B_2 = (\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，

设所求过渡矩阵为 A，则有 $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)A$，

即 $B_1A = B_2$，解此矩阵方程

$$(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (I, A)$$

则从基 α_1, α_2 到基 β_1, β_2 的过渡矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2)两种方法：已知 α 在基 α_1, α_2 下的坐标为 $\alpha_{B_1} = (3,0)^T$，

设 α 在基 β_1, β_2 下的坐标为 α_{B_2}，

方法 1：因为 $\alpha=B_1\alpha_{B_1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$；

又有 $\alpha=B_2\alpha_{B_2}$，则求解该方程组

$$(B_2,\alpha)=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\-1&2&3\end{array}\right)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\end{array}\right),$$

则 α 在基 β_1,β_2下的坐标为 $\alpha_{B_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$；

方法 2：因为 $A\alpha_{B_2}=\alpha_{B_1}$，求解该非齐次线性方程组

$$(A,\alpha_{B_1})=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\-2&1&0\end{array}\right)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\end{array}\right)=(I,\alpha_{B_2})$$

则 α 在基 β_1,β_2下的坐标为 $\alpha_{B_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}a&-1&1\\-1&0&1\\1&b&0\end{pmatrix},\alpha=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$为 A 的属于特征值 -2 的特征向量，则 $a=$______， $b=$______.

解：由$A\alpha=-2\alpha\Rightarrow\begin{pmatrix}a&-1&1\\-1&0&1\\1&b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a+1+1=2\\-1-b+0=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}.$$

5. 设3阶实对称矩阵 A 的秩 $r(A)=2$，且 A 满足 $A^2-2A=O$（O 表示零矩阵），则 $|4I-A|=$______.

解：设 A 的特征值为 λ，则 A^2-2A 的特征值为 $\lambda^2-2\lambda$；
而 $A^2-2A=O$，于是 $\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\lambda=0$ 或 2；
A 是 3 阶实对称矩阵，则 $A\sim\Lambda$；
对 $\lambda=0$，齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{I}-A)x=0$，即 $Ax=0$；
其基础解系包含的向量个数为 $3-r(A)=3-2=1$，
则 $\lambda=0$ 是单特征值，从而 $\lambda=2$ 是 2 重特征值；
于是，A 的特征值为 0，2，2；

从而 $4\boldsymbol{I}-A$ 的特征值为 $4-\lambda$，即 4，2，2；

则 $|4\boldsymbol{I}-A|=4\cdot2\cdot2=16$.

6. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_3$经正交变换 $x=Py$ 可化为标准型 $f=2y_1^2+3y_2^2$，则 $a=$______.

解：二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&a&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,

由题意，知其特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$；

且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+a+1\Rightarrow a=3$.

二、选择题(共 8 题，每题 3 分，共 24 分)

1. 下列$n(n\geq 2)$阶行列式的值必为 0 的是（ C ）.

(A) 行列式主对角线上的元素均为 0　　(B) 行列式零元素的个数多于n个

(C) 行列式零元素的个数多于n^2-n个　　(D) 行列式非零元素的个数比n+1少

解：A 的反例：$\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=1$；B 的反例：$\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}$；D 的反例：$\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}$；

C 中非零元素的个数$<n^2-(n^2-n)=n$，

则由抽象算式定义，行列式展开式的每一项都是 0，从而行列式的值为 0.

2. 将 2 阶方阵A的第二列加到第一列得方阵B，再交换B的第一行与第二行得单位矩阵，则$A=$（ D ）.

（A）$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

解：$\mathrm{A}\xRightarrow{c_1+c_2}\mathrm{B}\xRightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}I$，+

则 $I=E_{12}\mathrm{B}=E_{12}\mathrm{A}E_{12}(1)$

$\Rightarrow \mathrm{A}=E_{12}^{-1}E_{12}^{-1}(1)=E_{12}E_{12}(-1)=E_{12}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

3. 设A是n阶矩阵，$A^3=O$，则$(I-A)^{-1}=$（ B ）.

（A）$I-A+A^2$　（B）$I+A+A^2$　（C）$I+A-A^2$　（D）$I-A-A^2$

解：$\mathrm{A}^3=0\Rightarrow \boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}^3-\mathrm{A}^3=(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})(\boldsymbol{I}+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2)\Rightarrow(\boldsymbol{I}-\mathrm{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2$.

4. 齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$的系数矩阵记为$A$，若存在 3 阶非零矩阵$B$使得$AB=O$，则（ C ）.

（A）$\lambda=-2$且$|B|=0$　（B）$\lambda=-2$且$|B|\neq 0$　（C）$\lambda=1$且$|B|=0$　（D）$\lambda=1$且$|B|\neq 0$

解：$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix}\neq 0\Rightarrow r(\mathrm{A})\geq 1$，$\mathrm{B}\neq 0\Rightarrow r(\mathrm{B})\geq 1$；

存在 $\mathrm{B}\neq 0$，使得 $\mathrm{AB}=0\Rightarrow\begin{cases}r(\mathrm{A})<\mathrm{A}\text{ 的列数}=3\Rightarrow|\mathrm{A}|=0\Rightarrow\lambda=1\\r(\mathrm{A})+r(\mathrm{B})\leq 3\Rightarrow r(\mathrm{B})\leq 2\Rightarrow|\mathrm{B}|=0\end{cases}$.

5. 已知β_1,β_2是方程组$Ax=b$的两个不同解，α_1,α_2是对应齐次方程组$Ax=0$的基础解系，则$Ax=b$的一般解是（ B ）.

（A）$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　（B）$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_2-\alpha_1)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

（C）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　（D）$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

解：$\mathrm{A}x=b$ 的一般解 $x=x_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$

1) x_0 可取 β_1，β_2，或 $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$；

2) ξ_1,ξ_2 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，可取 $\xi_1=\alpha_1$，$\xi_2=(\alpha_2-\alpha_1)$，显然二者线性无关；
3) $\beta_1-\beta_2$ 是方程组 $Ax=0$ 的解，但不一定与 α_1 线性无关.

6. 下列矩阵中不能对角化的是（ A ）.

(A) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$

解：A 中矩阵由 2 重特征值 1，但特征矩阵 $I-A=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$ 的秩为 1，$(I-A)x=0$ 的基础解系含有 1 个线性无关的解向量，则该矩阵不能与对角阵相似，即不能对角化；

B、C、D 中的矩阵都是有 2 个互不相同的特征值，则都能对角化.

注：以下两道为多选题

7. 对向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，其中 $\alpha_i\in R^n, i=1,2,\cdots,m$，下列说法正确的是（ ACDE ）.

(A) 设 A 为 n 阶方阵，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$ 也线性相关

(B) 设 A 为 n 阶方阵，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$ 也线性无关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余向量线性表出

(D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一个是零向量，则此向量组线性相关

(E) 零向量可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出

解：记矩阵 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，则秩(C)$=$ 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$

记矩阵 $B=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m)=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=AC$，

则秩$\{A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m\}=$ 秩$(B)=$ 秩$(AC)\le\begin{cases}\text{秩}(A)\\\text{秩}(C)\end{cases}$，

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则秩(C)$=$ 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}<m$，

从而秩$\{A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m\}<m\Rightarrow A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$ 线性相关；

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则秩(C)$=$ 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}=m$，

从而秩$\{A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m\}\le m$，无法判定 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$ 的情况.

8. 下列说法正确的是（ ABD ）.

(A) 对矩阵 A 不管施行初等行变换还是初等列变换都不会改变矩阵的秩的值

(B) 若 A、B 均可逆，则 $r(ACB)=r(C)$

(C) 若 n 阶方阵 A 的秩 $r(A)=n-1$，则 $r(A^*)=0$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵

(D) 若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,，其中 a_i,b_j（$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$）均非零，则 $r(\alpha^T\beta)=1$

解：n 阶矩阵 A，$\begin{cases} 当\ r(\mathrm{A}) = n\ 时，r(\mathrm{A}^*) = n; \\ 当\ r(\mathrm{A}) = n-1\ 时，r(\mathrm{A}^*) = 1; \\ 当\ r(\mathrm{A}) < n-1\ 时，\mathrm{A}^* = O \Longrightarrow r(\mathrm{A}^*) = 0. \end{cases}$

三、计算题（共 3 题，共 24 分）

1.（8 分）已知 4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式，

求 $A_{13} + A_{23} + 2A_{43}$ 的值。

解：$\mathrm{A}_{13} + \mathrm{A}_{23} + 2\mathrm{A}_{43} = 1 \cdot \mathrm{A}_{13} + 1 \cdot \mathrm{A}_{23} + 0 \cdot \mathrm{A}_{33} + 2 \cdot \mathrm{A}_{43}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 2r_2]{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

2.（8 分）设向量组 $\alpha_1 = (-1,-1,0,0)$，$\alpha_2 = (1,2,1,-1)$，$\alpha_3 = (0,1,1,-1)^T$，$\alpha_4 = (1,3,2,1)$，$\alpha_5 = (2,6,4,-1)$，

求它的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表出。

解：记矩阵 $\mathrm{A} = (\alpha_1^{\mathrm{T}}, \alpha_2^{\mathrm{T}}, \alpha_3^{\mathrm{T}}, \alpha_4^{\mathrm{T}}, \alpha_5^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xRightarrow[r_4 + r_3]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow[r_4 \cdot 1/3]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{r_1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

①秩$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = 3$；
②$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组；
③$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$，
$\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4$.

3.（8 分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基，

求从基 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2$ 的过渡矩阵。

解：记矩阵 $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\mathbf{B}$ 可逆.

① $\mathbf{B}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\mathbf{B}\mathrm{C}_1$，

则 C_1是基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵；

② $\mathbf{B}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\mathbf{B}\mathrm{C}_2$，

则 C_2是基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$的过渡矩阵；

③设 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 的过渡矩阵为 C，

则 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)\mathrm{C}$

即 $\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_1\mathrm{C}$，从而有 $\mathbf{B}\mathrm{C}_2=\mathbf{B}\mathrm{C}_1\mathrm{C}\xRightarrow{\mathbf{B}\text{ 可逆}}\mathrm{C}_1\mathrm{C}=\mathrm{C}_2$，求解该矩阵方程

$$(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&2\\1&1&1&1&-1&0\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{I},\mathrm{C})$$

则过渡矩阵 $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$.

四、(8 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是矩阵 A 对应于互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，

若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关。

证：已知 $\mathrm{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\mathrm{A}\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,\mathrm{A}\alpha_3=\lambda_3\alpha_3$，且 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$；则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

并且 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$\mathrm{A}\beta=\mathrm{A}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，

$\mathrm{A}^2\beta=\mathrm{AA}\beta=\mathrm{A}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3$；

则 $(\beta,\mathrm{A}\beta,\mathrm{A}^2\beta)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathrm{C}$，

其中：矩阵 $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}$，因为 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$，

则 $|\mathrm{C}|=\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq0\Rightarrow\mathrm{C}$ 可逆，

则秩$\{\beta,\mathrm{A}\beta,\mathrm{A}^2\beta\}=$秩$(\beta,\mathrm{A}\beta,\mathrm{A}^2\beta)=$秩$\big((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathrm{C}\big)$

$=$秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=3\Rightarrow\beta,\mathrm{A}\beta,\mathrm{A}^2\beta$ 线性无关.

五、(14 分) 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，

求 a 的值及所有公共解。

解：由题意，知线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + a x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1 \end{cases}$ $(*)$有解；

$$\text{其增广矩阵 } (\mathrm{A}, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_1]{\substack{r_4 - r_2 \\ r_3 - r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 + (a-2)r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right)$$

①当$(a-1)(a-2) \neq 0$，即 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时，方程组$(*)$无解；

②当 $a = 1$ 时，增广矩阵为 $(\mathrm{A}, b) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathrm{U}, d)$

即方程组 $(*)$ 为齐次线性方程组，取 x_3 为自由未知量，

令 $x_3 = 1$，代入 $\mathrm{U}x = 0$，得方程组$(*)$的一个基础解系 $\xi = (-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

则公共解为 $x = k\xi = k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$， k 任意.

③当 $a = 2$ 时，增广矩阵为 $(\mathrm{A}, b) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

显然，方程组$(*)$有唯一解 $x = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，

则公共解为 $x = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

综上，$\begin{cases} \text{当 } a = 1 \text{ 时，公共解为 } x = k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}，\ k \text{ 任意.} \\ \text{当 } a = 2 \text{ 时，公共解为 } x = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$

六、（12 分）已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + cx_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 的秩为 1，

求：（1） c 的值；

（2）利用正交变换法，将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准型，并写出相应的正交矩阵。

解：二次型对应的矩阵为 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - 2r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-4 \end{pmatrix}$

(1) 已知 $r(\mathrm{A}) = 1$，则 $c - 4 = 0 \Rightarrow c = 4$

于是 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$；

(2) A 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda-4 & 4\\ -2 & 4 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-9)\lambda^2$，

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$；

①对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}x=0$，

即 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases}\xi_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}\\ \xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}\end{cases}$，

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$，

令 $\beta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{5}(-2,4,5)^{\mathrm{T}}$，

2)单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\left(\frac{-2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}；$$

②对于特征值 $\lambda_3=9$，由 $(\lambda_3\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix}8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-2}{3},\dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $\mathrm{Q}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则 Q 为正交阵，

且使得 $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$

④令 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x=\mathrm{Q}y$，

原二次型就化成标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x=y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ})y=9y_3^2$.