一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}$，且 $AC=B$，则 $C=$(　).

解：$(A,B)=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\3&-1&4&5\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&1\end{pmatrix}=(I,C)$

则 $C=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$

2. 设 α_1,α_2 为两个线性无关的 3 维列向量，方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2$，向量 $\beta=2\alpha_1+\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为(　).

解：矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，由已知，得 $r(\mathrm{A})=2$.

由$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2\Longrightarrow\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0\Longrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$

得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系为 $\xi=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$；

由 $\beta=2\alpha_1+\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\mathrm{A}\eta$，

得 $\mathrm{A}x=\beta$ 的一个特解为 $\eta=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

则 $\mathrm{A}x=\beta$ 的通解为 $x=\eta+k\xi=(2,1,0)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 任意.

3. 设方阵 $\begin{pmatrix}1&1&-3\\3&-1&-3\\-2&2&0\end{pmatrix}$ 的特征值为 a,b 和 c，则 $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=$(　).

解：$a+b+c=1-1+0=0$，

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\1&c&a\\1&a&b\end{vmatrix}=0.$$

4. 设 3 阶方阵 $A=\alpha\beta^T$，其中 $\alpha=(2,3,1)^T$，$\beta=(1,0,-1)^T$，则 $A^6=$(　).

解：(1) $\mathrm{A}=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}(1,0,-1)=\begin{pmatrix}2&0&-2\\3&0&-3\\1&0&-1\end{pmatrix}$；

(2) $\lambda=\beta^T\alpha=(1,0,-1)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=1$；

(3) $A^6=AAAAAA=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)$

$$=\alpha(\beta^T\alpha)^5\beta^T=\alpha\beta^T=A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\3&0&-3\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

5. 设 2 阶方阵 A 的秩为 1，且满足 $A^2+2A=O$，则 A 的特征值为(　).

解：设 A 的特征值为 λ，则 A^2+2A 的特征值为 $\lambda^2+2\lambda$，

因为 $A^2+2A=O$，而零矩阵的特征值均为 0

$\Longrightarrow \lambda^2+2\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0$ 或 -2.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$，则其规范型为(　).

解：二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}$,

其特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-1&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)\lambda$

则 A 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=5$；

于是，A 的正惯性指数为 2，负惯性指数为 0，则规范形为 $z_1^2+z_2^2$.

二、选择题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，则方程组 $(AB)x=0$ 满足(B).

A. 当 $m>n$ 时，仅有零解　　B. 当 $m>n$ 时，有非零解

C. 当 $m<n$ 时，仅有零解　　D. 当 $m<n$ 时，有非零解

解：AB 是 $m\times m$ 矩阵，$r(AB)\le r(B)\le n<m$，则 $(AB)x=0$ 有非零解.

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件为(C).

A. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均不为零向量

B. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意两个向量的分量不成比例

C. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意一个向量都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示

D. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关中有一部分向量线性无关

3. n 阶非零矩阵 A,B 满足 $AB=O$，则 A 的秩 $r(A)$ 和 B 的秩 $r(B)$ 必有（ C ）.

A. $r(A)=0$ 或 $r(B)=0$　　B. $r(A)=n$ 或 $r(B)=n$

C. $r(A)<n$ 或 $r(B)<n$　　D. $r(A)>0$ 或 $r(B)>0$

解：$\mathrm{A,B}$ 是非零矩阵 $\Longrightarrow r(\mathrm{A})\geq 1$，且 $r(\mathrm{B})\geq 1$；

$\mathrm{AB}=0\Longrightarrow r(\mathrm{A})+r(\mathrm{B})\leq n$，因此 $r(\mathrm{A})\leq n-1$，且 $r(\mathrm{B})\leq n-1$.

4. 设 A 为 3 阶方阵，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=-\alpha_2$，$A\alpha_3=-\alpha_3$，若要找 3 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 P 可以取（ A ）.

A. $(\alpha_1,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_2-3\alpha_3)$　　B. $(\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_3)$

C. $(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$　　D. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$

解：已知 $\begin{cases}\mathrm{A}\alpha_1=\alpha_1\Longrightarrow\lambda_1=1\\\mathrm{A}\alpha_2=-\alpha_2\Longrightarrow\lambda_2=-1\\\mathrm{A}\alpha_3=-\alpha_3\Longrightarrow\lambda_3=-1\end{cases}$；$\alpha_2,\alpha_3$ 都是属于特征值 -1 的特征向量.

$$\mathrm{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix};$$

则 $\mathrm{P}=(k_1\alpha_1,\ k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,\ k_2^*\alpha_2+k_3^*\alpha_3)$，

这里：$k_1\neq 0$；k_2,k_3 不全为 0；k_2^*,k_3^* 不全为 0；

且 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 与 $k_2^*\alpha_2+k_3^*\alpha_3$ 要线性无关.

5. 设 A,B 为 3 阶方阵，P 为 3 阶正交矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 A 与 B 一定满足（ A ）.

A. 不相似也不合同　B. 合同但不相似　C. 相似但不合同　D. 相似且合同

解：$M=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，其特征值为 1，3，$-1$；也是 A 的特征值；

$N=P^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，其特征值为 1，2，3；也是 B 的特征值；

所以，A 与 B 既不相似也不合同.

6. 设 A,B 均为 $n(n\geq 3)$阶方阵，且秩$(A)=n$，秩$(B)=n-1$，则 AB 的伴随矩阵 $(AB)^*$ 的秩为（ B ）.

A．0　　　B．1　　　C．$n-1$　　　D．n

解：秩$(A)=n\Longrightarrow$ 秩$(A^*)=n\Longrightarrow A^*$ 可逆；

秩$(B)=n-1\Longrightarrow$ 秩$(B^*)=1$，又$(AB)^*=B^*A^*$

则 $r(AB)^*=r(B^*A^*)=\ r(B^*)=1$.

三、计算题(共 3 题，每题 10 分，共 30 分)

1. 设向量组 $\alpha_1=(1,3,1,2)^T$，$\alpha_2=(-1,-2,1,-3)^T$，$\alpha_3=(-1,-1,3,-4)^T$，$\alpha_4=(1,3,3,4)^T$，$\alpha_5=(1,5,9,4)^T$；求向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&1\\3&-2&-1&3&5\\1&1&3&3&9\\2&-3&-4&4&4\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&2&0&2\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

①秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$；

② $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③ $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，　$\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_4$.

2. 已知 R^3的两组基为 $\mathbf{B}_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$\mathbf{B}_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,-3,2)^T$；

$\beta_1=(0,1,1)^T$，$\beta_2=(1,1,0)^T$，$\beta_3=(1,0,2)^T$.

(1) 求基 $\mathbf{B}_1$ 到基 $\mathbf{B}_2$ 的过渡矩阵；

(2) 若向量 γ 在基 $\mathbf{B}_2$ 下的坐标为 $(1,1,2)^T$，求 γ 在基 $\mathbf{B}_1$ 下的坐标.

解：仍记 $\mathrm{B}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\mathrm{B}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.

①由 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\mathrm{A}$，即得 $\mathrm{B}_2=\mathrm{B}_1\mathrm{A}$，

$$\text{于是，}(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1\\2&0&-3&1&1&0\\0&1&2&1&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&5&-1&3\\0&1&0&-5&2&-2\\0&0&1&3&-1&2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{I},\mathrm{A})$$

则基 B_1到基 B_2的过渡矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-5&2&-2\\3&-1&2\end{pmatrix}$.

②两种方法：已知 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$

方法 1：$\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{B}_2\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$,

又有 $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{B}_1\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}$，则求解该方程组

$$(\mathrm{B}_1,\boldsymbol{\alpha})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\2&0&-3&2\\0&1&2&5\end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&10\\0&1&0&-7\\0&0&1&6\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(10,-7,6)^{\mathrm{T}}$.

方法 2：因为 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_1}=\mathrm{A}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-5&2&-2\\3&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-7\\6\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 B_1下的坐标向量 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{B}_2}=(10,-7,6)^{\mathrm{T}}$.

3. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解：$D_{n+1}=(-1)^n\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \end{vmatrix}$

$$=(-1)^n(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^3 & (a-1)^3 & (a-2)^3 & \cdots & (a-n)^3 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \end{vmatrix}$$

$=\cdots$

$$=(-1)^n(-1)^{n-1}\cdots(-1)^2(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & \cdots & (a-n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}D$，

这里 D 是 $n+1$ 阶范德蒙行列式，且 $D=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}k!$

所以，原行列式 $D_{n+1}=\prod_{k=1}^{n}k!$

四、证明题(共 1 题， 8 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，

证明：存在 $m\le n$，使得第 m 个向量 α_m可由前 $m-1$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$

线性表示.

证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，

使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$；

令 $m=\max\{\, i|\ k_i\ne 0, i=1,\cdots,n\}$，则有

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+0\alpha_{m+1}+\cdots+0\alpha_n=0$；

从而得到 $\alpha_m=-\dfrac{k_1}{k_m}\alpha_1-\dfrac{k_2}{k_m}\alpha_2-\cdots-\dfrac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1}$

即存在 $m\le n$，使得第 m 个向量 α_m可由前 $m-1$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$

线性表示.

五、解方程组（共 1 题，14 分）

讨论 a,b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=5 \\ x_2+(a+3)x_3+bx_4=b-3 \\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3 \end{cases}$

无解、有无穷多解、有唯一解，并在有无穷多解时写出方程组的通解.

解：增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & a+3 & b & b-3 \\ 1 & 1 & 2 & b-2 & b+3 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b+2 \end{array}\right)=(\mathrm{U},d)$$

原方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 与 $\mathrm{U}x=d$ 同解，则

①当 $|\mathrm{U}|=(a+1)(b-1)\neq 0$，即 $a\neq -1$，且 $b\neq 1$ 时，原方程组有唯一解；

②当 $b=1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&2\\0&1&2&2&-1\\0&0&a+1&-1&-4\\0&0&0&0&3\end{array}\right)$

出现矛盾方程，故原方程组无解；

③当 $a=-1$，且 $b\neq 1$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-3&2\\0&1&2&2&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&6-3b\end{array}\right)$

1) 当 $6-3b\neq 0$，即 $b\neq 2$ 时，出现矛盾方程，故原方程组无解；

2) 当 $b=2$ 时，增广矩阵 $(\mathrm{A},\beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&14\\0&1&2&0&-9\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

取 x_3 为自由未知量，

令 $x_3=0$，得方程组 $\mathrm{A}x=\beta$ 的一个特解 $x_0=(14,-9,0,4)^{\mathrm{T}}$；

令 $x_3=1$，得 $\mathrm{A}x=0$ 的一个基础解系 $\xi=(0,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

则原方程组的一般解为

$$x=x_0+k\xi=(14,-9,0,4)^{\mathrm{T}}+k(0,-2,1,0)^{\mathrm{T}}，k\text{ 任意}.$$

综上， $\begin{cases}\text{当 } a\neq -1\text{，且 } b\neq 1 \text{ 时，方程组有唯一解；}\\ \text{当 } b=1 \text{ 或 } a=-1\text{，且 } b\neq 2 \text{ 时，方程组无解；}\\ \text{当 } a=1\text{，且 } b=2 \text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、二次型（共 1 题，12 分）

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的规范型为 z_1^2.

(1) 求 a 的值；

(2) 利用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准型，并写出相应的正交矩阵.

解：二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，

(1) 由已知，得 $r(A)=1 \Rightarrow a=1$；从而 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) A 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I}-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)$，

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$；

①对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-A)x=0 \Leftrightarrow Ax=0$

即 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，得基础解系 $\begin{cases} \xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}} \\ \xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$

1) 正交化：取 $\beta_1=\xi_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$；

令 $\beta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$，

2)单位化：令 $\eta_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}};$$

③对于特征值 $\lambda_3=3$，由 $(\lambda_3\boldsymbol{I}-A)x=0$，

即 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$，得基础解系为 $\xi_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，

且使得 $Q^TAQ = Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$；

④令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$，$y = (y_1, y_2, y_3)^T$，做正交变换 $x = Qy$，

原二次型就化成标准形 $x^TAx = y^T(Q^TAQ)y = 3y_3^2$.