一、填空题

1. 设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=3$，则 $|2A^{-1}A^T|=$______.

解：$|2A^{-1}A^T|=2^3|A^{-1}|\cdot|A^T|=8\,|A|^{-1}\,|A|=8$.

2. 设 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}$的伴随矩阵为 $A^*=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\-6&3&-1\\4&-2&2\end{pmatrix}$，则$a=$_____.

解：矩阵 A 的第 1 行第 2 列的元素 -1的代数余子式为 $A_{12}=-6$；

又 $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\0&a\end{vmatrix}=-2a$，即 $-2a=-6$，则 $a=3$.

3. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+3A+2I=O$，则 $(A-I)^{-1}=$______.

解：$A^2+3A+2I=O\Longrightarrow(A-I)(A+4I)=-6I\Longrightarrow(A-I)^{-1}=-\dfrac{A+4I}{6}$.

4. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为 3 阶方阵，若 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一般解为______.

解：由已知，得 $r(A)=2$，则 $Ax=0$ 的基础解系含有 $3-r(A)=1$ 个解向量；

$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2\Leftrightarrow\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0\Longrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$，

即 $\xi=(1,-2,1)^T\neq0$ 是 $Ax=0$ 的解，可以做基础解系；

则 $Ax=0$ 的一般解为 $x=k\xi=k(1,-2,1)^T$，k 任意.

5. 设 3 阶方阵 A 的秩 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\\3&-2\end{pmatrix}$，则 A 的特征值为______.

解：记 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，$\alpha_2=(1,0,-1)^T$，则有 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,2\alpha_2)$，

于是，$\begin{cases}A\alpha_1=\alpha_1\Longrightarrow\lambda_1=1\\A\alpha_2=2\alpha_2\Longrightarrow\lambda_2=2\end{cases}$；

又 $r(A)=2\Longrightarrow|A|=0\Longrightarrow\lambda_3=0$；

则 A 的特征值为 1，2，0.

6. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&3&-5\\0&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}$ 可对角化，则 $a=$______.

解：矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&5\\0&\lambda&0\\0&-a&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)$,

则 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=2$；

A 可对角化，则对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，齐次线性方程组 $(0\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$,

即 $\mathrm{A}x=0$ 的基础解系包含的向量个数为 $2=3-r(\mathrm{A})\Longrightarrow r(\mathrm{A})=1$，

从而 $a=0$.

二、选择题

1. 已知 A,B 均为 n 阶可逆方阵，k 为常数，则下列命题正确的是（ B ）.

A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $(A+B)^T=A^T+B^T$

C. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　D. $|kAB|=k|A||B|$

2. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（ D ）.

A. P_1P_2　B. $P_1^{-1}P_2$　C. P_2P_1　D. $P_2P_1^{-1}$

解：$P_1=E_{12}(1)$，$P_2=E_{23}$，$\mathrm{A}\xRightarrow{c_1+c_2}\mathrm{B}\xRightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\boldsymbol{I}$,

则有 $\boldsymbol{I}=E_{23}\mathrm{B}=E_{23}\mathrm{A}E_{12}(1)\Longrightarrow\mathrm{A}=E_{23}^{-1}\boldsymbol{I}E_{12}^{-1}(1)=E_{23}E_{12}^{-1}(1)=P_2P_1^{-1}$.

3. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的，则下列向量组中相关的是（ C ）.

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　B. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

C. $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3$　　D. $\alpha_1+2\alpha_3,3\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3$

4. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，则下列条件中，不能推出线性方程组 $(AB)x=0$ 有非零解的是（ B ）.

A. $m<p$　　B. 线性方程组 $Ay=0$ 有非零解

C. $n<p$　　D. 线性方程组 $Bx=0$ 有非零解

解：(1) AB 为 $m\times p$ 矩阵；$r(AB)\le r(A)\le\begin{cases}m\\n\end{cases}$；

若 $m<p$ 或 $n<p$，都有 $r(AB)<p$，则 $(AB)x=0$ 有非零解；

(2) 线性方程组 $Bx=0$ 有非零解，从而 $ABx=A0=0$

则 $(AB)x=0$ 有非零解.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B（ B ）.

A. 合同且相似　　B. 合同但不相似

C. 不合同，但相似　D. 既不合同，也不相似

解：A 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$，

则 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$；

因此，A 与 B 有相同的正惯性指数 2，相同的负惯性指数 0；

则 A 与 B 合同，但是不相似，因为相似矩阵的特征值相同.

6. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵，O 是 3 阶零矩阵；

若 $A^2+A-2E=O$，且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范型是（ C ）.

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$；B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$；C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$；D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

解：设 A 的特征值为 λ，则 $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}-2E$ 的特征值为 $\lambda^2+\lambda-2$，

因为 $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}-2E=O$，而零矩阵 O 的特征值均为 0，

于是有 $\lambda^2+\lambda-2=0 \Longrightarrow (\lambda+2)(\lambda-1)=0 \Longrightarrow \lambda=1$ 或 -2；

即 A 的特征值只能为 1 或 -2；

又因 $|A|=4$，则 A 的特征值为 1，-2，-2.

所以，A 的正惯性指数为 1，负惯性指数为 2；

则二次型的规范形中有 1 项正平方项，系数为 1；

2 项负平方项，系数为 -1.

三、计算题

1. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解：$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，$A_{ij}$表示元素 a_{ij}的代数余子式，

求 $A_{11}-A_{12}$.

解：$A_{11}-A_{12}=1\cdot A_{11}+(-1)\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}+0\cdot A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-3\\0&0&2&0\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&-1&0\\-2&1&1\\3&-2&-3\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2+c_1}{=\!=\!=}-2\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&-1&1\\3&1&-3\end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&-3\end{vmatrix}=-4.$$

3. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,1,2)^T$，$\alpha_2=(-1,2,0,0)^T$，$\alpha_3=(1,2,4,8)^T$，$\alpha_4=(-1,1,1,1)^T$，$\alpha_5=(2,-1,1,3)^T$；求此向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解：记矩阵 $\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&2\\-1&2&2&1&-1\\1&0&4&1&1\\2&0&8&1&3\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&4&0&2\\0&1&3&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

①秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}=3$；

②$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

③ $\alpha_3=4\alpha_1+3\alpha_2$，

$\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4$.

4. 已知 R^2的两组基为 $\mathbf{B_1}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$\mathbf{B_2}=\{\beta_1,\beta_2\}$，其中

$\alpha_1=(1,-1)^T$，$\alpha_2=(1,0)^T$；$\beta_1=(1,2)^T$，$\beta_2=(3,5)^T$；

（1）求从基 $\mathbf{B_1}$ 到基 $\mathbf{B_2}$ 的过渡矩阵；

（2）若向量 γ 在基 $\mathbf{B_1}$ 下的坐标为 $(-1,1)^T$，求 γ 在基 $\mathbf{B_2}$ 下的坐标.

解：

（1）记矩阵 $\mathrm{B}_1=(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$\mathrm{B}_2=(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$，

因为 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\mathrm{A}$，即 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}=\mathrm{B}_2$，解此矩阵方程

$$(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -5\\ 0 & 1 & 3 & 8\end{pmatrix}=(I,\mathrm{A})$$

则从基 α_1,α_2 到基 β_1，β_2 的过渡矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

（2）两种方法：已知 γ 在基 α_1,α_2 下的坐标为 $\gamma_{B_1}=(1,-1)^{\mathrm{T}}$，

设 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标为 γ_{B_2}，

方法 1：因为 $\gamma=\mathrm{B}_1\gamma_{B_1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$；

又有 $\gamma=\mathrm{B}_2\gamma_{B_2}$，则求解该方程组

$$(\mathrm{B}_2,\gamma)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -1\end{array}\right)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right),$$

则 γ 在基 B_2 下的坐标向量 $\gamma_{B_2}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$；

方法 2：因为 $\mathrm{A}\gamma_{B_2}=\gamma_{B_1}$，求解该非齐次线性方程组

$$(\mathrm{A},\gamma_{B_1})=\left(\begin{array}{cc|c}-2 & -5 & 1\\ 3 & 8 & -1\end{array}\right)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)=(I,\gamma_{B_2})$$

则 γ 在基 β_1,β_2 下的坐标为 $\gamma_{B_2}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$，$B$ 与 A 相似，

求 $|B|$，$|B^{-1}+E|$，其中 B^{-1}是 B 的逆矩阵，E 是 3 阶单位矩阵.

解：A 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -1\\ -3 & \lambda-1 & -1\\ -4 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-1)^2$,

则 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$；

B 与 A 相似，则 B 的特征值也是 $1,1,6$；

从而 $\begin{cases} B^{-1}\text{的特征值为 } 1,1,\dfrac{1}{6} \\ B^{-1}+E \text{ 的特征值为 } 1+1,1+1,\dfrac{1}{6}+1\text{，即 } 2,2,\dfrac{7}{6} \end{cases}$

于是 $\begin{cases} |B|=1\cdot 1\cdot 6=6 \\ |B^{-1}+E|=2\cdot 2\cdot\dfrac{7}{6}=\dfrac{14}{3} \end{cases}$

四、证明题

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 n 阶方阵 A 的 3 个特征向量，且它们对应的特征值互不相等，若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.

证：$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$\mathrm{A}\beta=\mathrm{A}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，

$\mathrm{A}^2\beta=\mathrm{AA}\beta=\mathrm{A}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3$；

于是 $(\beta,\mathrm{A}\beta,\mathrm{A}^2\beta)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathrm{C}$，

其中：矩阵 $\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}$，因为 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$，

则 $|\mathrm{C}|=\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0\Longrightarrow \mathrm{C}$ 可逆，

于是，秩$\{\beta,\mathrm{A}\beta,\mathrm{A}^2\beta\}=$秩$(\beta,\mathrm{A}\beta,\mathrm{A}^2\beta)=$秩$\big((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathrm{C}\big)$

$=$秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=3$

$\Longrightarrow \beta, \mathrm{A}\beta, \mathrm{A}^2\beta$ 线性无关.

五、解方程组

讨论 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + (a+1)x_3 + bx_4 = b-2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + (b-2)x_4 = b+3 \end{cases}$$

无解、有无穷多解、有唯一解, 并且在有无穷多解时写出方程组的一般解.

解：方程组的增广矩阵

$$(A,d) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & b & b-2 \\ 1 & 1 & 2 & b-2 & b+3 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & b & b-2 \\ 1 & 1 & 2 & b-2 & b+3 \end{array}\right) \xRightarrow[r_3 - r_2]{\substack{r_4 - r_1 \\ r_1 - r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & b+2 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b+2 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{r_3 - r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b+2 \end{array}\right) = (U_1, d')$$

$Ax = d$ 与 $U_1 x = d'$ 为同解方程组：

(1) 当 $|U_1| = (a-1)(b-1) \neq 0$，即 $a \neq 1$ 且 $b \neq 1$ 时，原方程组有唯一解；

(2) 当 $b = 1$ 时，增广矩阵 $(A,d) \xRightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

则原方程组无解；

(3) 当 $a = 1$ 且 $b \neq 1$ 时，增广矩阵

$$(A,d) \xRightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b+1 \end{array}\right)$$

①当 $2b+1\neq 0$，即 $b\neq -\dfrac{1}{2}$ 时，则原方程组无解；

②当 $2b+1=0$，即 $b=-\dfrac{1}{2}$ 时，增广矩阵

$$(A,d)\xRightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&3\\0&1&2&0&-3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)=(U_2,d'')$$

取 x_3 为自由未知量，

1) 令 $x_3=0$，代入 $U_2x=d''$，得原方程组的一个特解 $x_0=(3,-3,0,-1)^T$；

2) 令 $x_3=1$，代入 $U_2x=0$，得 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\xi=(0,-2,1,0)^T$；

则原方程组的通解为 $x=x_0+k\xi=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$k$ 任意；

综上，$\begin{cases}\text{当 } a\neq 1 \text{ 且 } b\neq 1 \text{ 时，方程组有唯一解；}\\ \text{当 } b=1 \text{ 或 } a=1 \text{ 且 } b\neq -\dfrac{1}{2} \text{ 时，方程组无解；}\\ \text{当 } a=1 \text{ 且 } b=-\dfrac{1}{2} \text{ 时，方程组有无穷多解.}\end{cases}$

六、化二次型为标准型

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_3$，

利用正交变换法，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交矩阵.

解：二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-3&-3\\-3&1&-3\\-3&-3&1\end{pmatrix}$

A 的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&3\\3&\lambda-1&3\\3&3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda+5)$

则 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=-5$；

①对于 $\lambda_1=\lambda_2=4$，由$(\lambda_1\boldsymbol{I}-\mathrm{A})x=0$，

即 $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$，得基础解系 $\begin{cases} \xi_1 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}} \\ \xi_2 = (-1,0,1)^{\mathrm{T}} \end{cases}$，

1) 正交化：取 $\beta_1 = \xi_1 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$$令\ \beta_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}},$$

2) 单位化：令 $\eta_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}}$；

$$\eta_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}};$$

②对于特征值 $\lambda_3 = -5$，由 $(\lambda_3 \boldsymbol{I} - \mathrm{A})x = 0$，

即 $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$，得基础解系为 $\xi_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

单位化得：$\eta_3 = \frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$；

③记矩阵 $\mathrm{Q} = (\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，则 Q 为正交阵，

且使得 $\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ} = \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$

④令 $x = (x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$y = (y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，做正交变换 $x = \mathrm{Q}y$，

原二次型就化成标准形 $x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x = y^{\mathrm{T}}(\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{AQ})y = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2$.