五、多元函数微分学

（一）内容概括

多元函数的概念，二元函数的几何意义，二元函数的极限和连续的概念，有界闭区域上多元连续函数的性质，多元函数偏导数和全微分，全微分存在的必要条件和充分条件，多元复合函数、隐函数的求导法，二阶偏导数，方向导数和梯度，空间曲线的切线和法平面，曲面的切平面和法线，二元函数的二阶泰勒公式，多元函数的极值和条件极值，拉格朗日乘数法，多元函数的最大值、最小值及其简单应用.

多元函数微分学是一元函数微分学的延续，在一元函数微分法的基础上，对多元函数的相应问题进行讨论. 考生在复习时应着重注意两者的区别与联系.

（二）考试要求

最新颁布的全国硕士研究生入学考试大纲（数学一）中对多元函数微分学的要求是：

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续性的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性.

4. 理解方向导数与梯度的概念，并掌握其计算方法.

5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

6. 会用隐函数的求导法则.

7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题.

（三）真题解析

例 1（2017 年）　函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为（　　）.

(A) 12　　　(B) 6　　　(C) 4　　　(D) 2

【考点分析】 本题考查方向导数的计算，利用公式进行计算便可得结果.

解　向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的三个方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

由 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2z.$$

在点(1,2,0)处有$\frac{\partial f}{\partial x}=4$,$\frac{\partial f}{\partial y}=1$,$\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

根据方向导数计算公式得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,0)} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,0)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,0)}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,0)}\cos\gamma \\ &= 4\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}+0\times\frac{2}{3}=2.\end{aligned}$$

故应选(D).

【方法点击】 (1)若函数 $f(x,y,z)$在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$处可微,则 $f(x,y,z)$在点 P_0 处沿任一方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数均存在,且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}\cdot\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

(2) 对于二元函数的方向导数有类似的结论.

【典型错误】 少数考生没有将已知向量 $\boldsymbol{n}$ 单位化,即错误地认为:$\cos\alpha=1,\cos\beta=2,\cos\gamma=2$,这样由方向导数公式得到的结果为6,因此错选(B).

例2(2017年) 设函数 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数,$y=f(e^x,\cos x)$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$,$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

【考点分析】 本题考查函数全导数的求法.利用复合函数求导法直接求导即可.

解 因为 $y=f(e^x,\cos x)$,所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}e^x-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\sin x,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}=&\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}e^x+\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2}e^x-\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}\sin x\right)e^x\\ &-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cos x-\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}e^x-\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\sin x\right)\sin x.\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,$u=e^0=1$,$v=\cos 0=1$,所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u}+\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial u^2}-\frac{\partial f(1,1)}{\partial v}.$$

【方法点击】 本题是较为简单的多元复合函数求全导数问题.首先应搞清楚函数的复合关系,本题中函数的复合关系图为:$\begin{array}{ccc} & u & \\ y & & x \\ & v & \end{array}$,其中 $y=f(u,v)$,$u=e^x$,$v=\cos x$;在求$\frac{d^2y}{dx^2}$时要特别注意$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot u'(x)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot v'(x)$中的一阶偏导数$\frac{\partial f}{\partial u}$及$\frac{\partial f}{\partial v}$与 u,v 的复合关系和 $f(u,v)$与 u,v 的复合关系一样.

【典型错误】 本题的出错点主要是:求$\frac{d^2y}{dx^2}$时,有的考生将

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{e}^x-\frac{\partial f}{\partial v}\sin x$$

中的一阶偏导数$\frac{\partial f}{\partial u}$只看作是 u 的函数，而将$\frac{\partial f}{\partial v}$只看作是 v 的函数，即没有搞清楚一阶偏导数的复合关系.

例 3(2012 年) 如果函数 $f(x,y)$在$(0,0)$处连续，那么下列命题正确的是( ).

(A) 若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在，则 $f(x,y)$在$(0,0)$处可微

(B) 若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则 $f(x,y)$在$(0,0)$处可微

(C) 若 $f(x,y)$在$(0,0)$处可微，则极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在

(D) 若 $f(x,y)$在$(0,0)$处可微，则极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在

【考点分析】 本题考查多元函数极限、连续、可微的概念及函数极限的性质；利用排除法或利用多元函数极限、连续、可微的定义.

解 解法一：令 $f(x,y)=|x|+|y|$，则函数 $f(x,y)$在$(0,0)$处连续，且极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}=1$存在，但 $f'_x(0,0)$不存在，从而 $f(x,y)$在$(0,0)$处不可微，所以(A)不正确.

又令 $f(x,y)=1$，则函数 $f(x,y)$在$(0,0)$处连续且可微，但极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$与$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$都不存在，故(C)，(D)选项不正确.

综上，故应选(B).

解法二：如果$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则必有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0,$$

由于 $f(x,y)$在$(0,0)$处连续，可知 $f(0,0)=0$. 不妨假设$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=k$，则

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,\text{即}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

所以 $f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，即

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

从而 $f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

故应选(B).

【方法点击】 在寻找反例时，考生应该寻找条件比较“苛刻”的函数，而初等函数都是无穷次可导的，因此，一般不从初等函数中找. 考生可以从以下函数中考虑：

① 分段函数：$y=|x|$，如本题 $y(x,y)=|x|+|y|$；再如 $y=\mathrm{sgn}x$ 等；

② 振荡函数：$y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

③ 狄利克雷函数或黎曼函数.

【典型错误】 本题出错的主要原因是考生未能举出恰当的反例来排除错误选项，而利用定义逐项证明运算量太大，而且对考生证明能力要求很高.

例 4(2010 年) 设函数 $z=z(x,y)$，由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F'_2\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(　　).

(A) x　　(B) z　　(C) $-x$　　(D) $-z$

【考点分析】 本题考查多元隐函数求偏导数；可利用求偏导公式直接计算或在方程两端同时求偏导数.

解 **解法一**：因为 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，则对 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$ 求偏导数得

$$F_x=F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right),F_y=F'_1\cdot\frac{1}{x},F_z=F'_2\cdot\frac{1}{x},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{F'_1\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F'_2\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{F'_2\cdot\dfrac{1}{x}}=\frac{yF'_1+zF'_2}{xF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{F'_1\dfrac{1}{x}}{F'_2\dfrac{1}{x}}=-\frac{F'_1}{F'_2},$$

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{yF'_1+zF'_2}{F'_2}-\dfrac{yF'_1}{F'_2}=z.$

故应选(B).

解法二：对方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边关于 x 求偏导有

$$-\frac{y}{x^2}F'_1+\frac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}F'_2=0,$$

整理得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{xF'_2}(yF'_1+zF'_2)$.

对方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边关于 y 求偏导有

$$\frac{1}{x}F'_1+\frac{1}{x}F'_2\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

整理得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_1}{F'_2}$. 以下同解法一.

【方法点击】 读者应该牢记

(1) 隐函数求偏导的公式：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

(2) 复合函数求偏导的思想方法.

【典型错误】 在对方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两端关于 x 求偏导时部分同学会犯如下错误

$$F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}\right)=0$$

从而导致整个结果错误.

错误的原因在于将公式法(解法一)与直接法(解法二)混淆了.请注意：在公式法中，求一个变量的偏导数时应将其他变量看作常数，比如求 F_x' 时将 y,z 看作常数.而在直接法中方程两边求偏导数时，由于 $z=z(x,y)$ 即 z 是关于 x,y 的函数，所以求关于 x 的偏导时必须对 z 也要求偏导，即正确作法为

$$F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\cdot\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}=0.$$

例 5(2003 年) 已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则( ).

(A) 点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点

【考点分析】 本题是考查学生能力的综合题，要用二元函数极值的定义考查(0,0)点是否为极值点(或用特殊例题借助于极值判别法)，为此需根据题设条件进行分析.

解 **解法一**：由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知，分子的极限为 0.又由已知，函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某个邻域内连续，则必有 $f(0,0)=0$，由二元函数的极限定义知，沿任何路径趋于(0,0)时，都有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$.

当沿 $y=-x$ 趋于(0,0)时，有 $\lim\limits_{y=-x\to 0}\frac{f(x,-x)+x^2}{4x^4}=1$，即 $(x,-x)\to(0,0)$ 时，$f(x,-x)\approx 4x^4-x^2<0=f(0,0)$（$x$ 充分小）；

而当沿 $y=0$ 趋于(0,0)时，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-0}{x^4}=1$，即当 $(x,0)\to(0,0)$ 时，$f(x,0)\approx x^4>0=f(0,0)$（$x$ 充分小）.

由以上可知，$f(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值.故正确答案为(A).

解法二：此题为选择题，因此

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，不妨设 $f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2$，则

$f_x=y+4x(x^2+y^2)$， $f_y=x+4y(x^2+y^2)$，

$A=f_{xx}(0,0)=(12x^2+4y^2)\big|_{(0,0)}=0$，$C=f_{yy}(0,0)=(4x^2+12y^2)\big|_{(0,0)}=0$，

$B=f_{xy}(0,0)=(1+8xy)\big|_{(0,0)}=1$，

$AC-B^2=-1<0$，即$(0,0)$不是极值点.

【方法点击】 ① 将极限表示式转化为极限值加无穷小量，是有关极限分析过程中常用的思想.另外，此类题型一般需要用到极值的定义而不是判别法.

② 本题题型比较新颖，有一定的难度.

【典型错误】 本题错选(B)、(C)、(D)的考生都有，表示考生对本题不知从何下手，原因是对二元函数的极限知之不多.

例6(2005年) 设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$，单位向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$________.

【考点分析】 本题考查方向导数的求法；利用方向导数计算公式即可得结果.

解 已知 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，而$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{6}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{9}$，由方向导数计算公式得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}\cdot\cos\gamma$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故应填$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【方法点击】 在利用方向导数公式时，若给出的方向向量不是单位向量，应先将其单位化，得到方向余弦，再利用公式.

【典型错误】 本题出错的原因是没有记住方向导数的计算公式.

例7(2004年) 设 $z=z(x,y)$是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$的极值点和极值.

【考点分析】 本题考查隐函数的极值问题，属重点题型；应先求出一阶偏导数，从而得到驻点即可能极值点，再利用极值判别法判断便可得结论.

解 因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，所以，等式两边分别对 x 和 y 求导得：

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad ①$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0. \qquad ②$$

令$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}$故$\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得

$$\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$$

由①、②两边同时分别对 x,y 求导得

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

所以

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3},$$

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$. 又 $A=\frac{1}{6}>0$,从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点,极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地,由

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$,又 $A=-\frac{1}{6}<0$,所以点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点,极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

【方法点击】 本题中二元函数是由方程确定的隐函数,故隐函数求一阶及二阶偏导数是解题的关键. 隐函数求导方法还有定义法、全微分法,大家可以使用这些方法练习一下. 另外求驻点时应利用原方程.

【典型错误】 求一阶、二阶偏导数时,涉及的计算比较复杂,有许多考生会求错,导致后半段不得分. 所以一定要细心.

例 8(2005 年)　设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有(　　).

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

【考点分析】 本题考查多元复合函数求偏导及变限积分求偏导. 由已知函数 $u(x,y)$ 的表达式利用复合函数求导法直接求偏导数即可.

解　设 $r=x+y,s=x-y$,则

$$u(x,y)=\varphi(r)+\varphi(s)+\int_s^r\psi(t)\mathrm{d}t=\varphi(r)+\varphi(s)+\int_0^r\psi(t)\mathrm{d}t-\int_0^s\psi(t)\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\varphi'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\varphi'(s)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\psi(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-\psi(s)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}\\&=\varphi'(r)+\varphi'(s)+\psi(r)-\psi(s),\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\varphi'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\varphi'(s)\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\psi(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}-\psi(s)\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\\&=\varphi'(r)-\varphi'(s)+\psi(r)+\psi(s),\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\varphi''(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\varphi''(s)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\psi'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-\psi'(s)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}\\&=\varphi''(r)+\varphi''(s)+\psi'(r)-\psi'(s),\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\varphi''(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\varphi''(s)\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\psi'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}-\psi'(s)\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\end{aligned}$$

$$= \varphi''(r) - \varphi''(s) + \psi'(r) + \psi'(s),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} - \varphi''(s) \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \psi'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \psi'(s) \cdot \frac{\partial s}{\partial y}$$

$$= \varphi''(r) + \varphi''(s) + \psi'(r) - \psi'(s).$$

经比较知：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，即(B)正确.

【方法点击】 本题是复合函数求导的试题，其中 $\varphi(r)$ 与 $\psi(r)$ 均为一元函数，而 $r=x+y$，$s=x-y$ 为二元函数，对这类函数求一阶、二阶偏导数是多元函数微分学试题中最常见的一类，分清中间变量与自变量的关系，利用复合函数求导法逐层求导即可.

【典型错误】 有的考生选择(D). 其原因是由 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(r) + \varphi'(s) + \psi(r) - \psi(s)$ 再对 y 求偏导数时求导不彻底$\left(\text{其中 } r=x+y, s=x-y, \text{因此} \frac{\partial r}{\partial y}=1, \frac{\partial s}{\partial y}=-1\right)$，从而错误地得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(r) + \varphi''(s) + \psi'(r) - \psi'(s) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，事实上，$\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 与 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 仍具有相同的复合结构.

例 9(2006 年) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y(x,y) \neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是(　　).

(A) 若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则 $f_y(x_0,y_0)=0$　(B) 若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则 $f_y(x_0,y_0) \neq 0$

(C) 若 $f_x(x_0,y_0) \neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0)=0$　(D) 若 $f_x(x_0,y_0) \neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0) \neq 0$

【考点分析】 本题考查多元函数条件极值问题；利用拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ 在 (x_0,y_0,λ_0)(λ_0 是对应 x_0，y_0 的参数 λ 的值)取得极值的必要条件即可.

解 作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$，并记对应 x_0，y_0 的参数 λ 的值为 λ_0. 令

$$\begin{cases} F_x(x_0,y_0,\lambda_0)=0, \\ F_y(x_0,y_0,\lambda_0)=0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

消去 λ_0，得

$$f_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0) - f_y(x_0,y_0)\varphi_x(x_0,y_0) = 0,$$

整理得 $f_x(x_0,y_0) = \frac{1}{\varphi_y(x_0,y_0)} f_y(x_0,y_0)\varphi_x(x_0,y_0)$(因为 $\varphi_y(x,y) \neq 0$).

由上式知，若 $f_x(x_0,y_0) \neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0) \neq 0$. 故选(D).

【方法点击】 本题考查了二元函数极值的必要条件和拉格朗日乘数法. 题型比较新颖，不是简单地求出极值，而是利用极值点巧妙地揭示出偏导数之间的关系，有一定难度.

【典型错误】 许多考生错误地使用了无条件极值的必要条件，认为"极值点一定为驻点"，则 (x_0,y_0) 是极值点，一定为(A).

例 10(2007 年) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

【考点分析】 本题考查二元复合函数求偏导数，属基本题型；直接利用复合函数求导公式即可.

解 利用复合函数的求导公式，可直接得出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot yx^{y-1}+f'_2\cdot y^x\ln y.$$

故应填 $f'_1yx^{y-1}+f'_2y^x\ln y$.

【方法点击】 二元复合函数求偏导时，最好先设出中间变量，然后再根据链式法则计算，要注意计算的正确性. 本题可以设 $u=x^y,v=y^x$，画出复合关系图为：

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & u \arrow[r, dash] \arrow[ddr, dash] & x \\ z \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & v \arrow[r, dash] \arrow[uur, dash] & y \end{tikzcd}$$

，公式为：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

【典型错误】 有的考生由于粗心或未记住基本求导公式而导致结果错误.

例 11(2005 年) 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程(　　).

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

【考点分析】 本题考查隐函数存在定理；利用该定理便可得结论.

解 将已知方程记为 $F(x,y,z)=0$，其中 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$. 显然 F 对 x，y,z 均具有连续偏导数，且 $F(0,1,1)=0$，

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,1,1)}=\left.(y+ze^{xz})\right|_{(0,1,1)}=2\neq 0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,1,1)}=\left.\left(x-\frac{z}{y}\right)\right|_{(0,1,1)}=-1\neq 0,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,1,1)}=\left.(-\ln y+xe^{xz})\right|_{(0,1,1)}=0.$$

由隐函数存在定理知，(D)正确.

【方法点击】 一般地对于三元方程 $F(x,y,z)=0$，其中 F 具有一阶连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，若 $F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则由 $F(x,y,z)=0$ 在点(x_0,y_0,z_0)的小邻域内可唯一确定具有连续偏导数的二元隐函数 $x=x(y,z)$. 同理若 $F_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则在点(x_0,y_0,z_0)的小邻域内可分别确定隐函数 $y=y(x,z)$ 及 $z=z(x,y)$.

【典型错误】 本题有的考生选择了(A)，其原因是没有真正理解隐函数存在定理，因此在平时复习时应加深对基本定理的理解，以提高应用能力.

例 12(2008 年) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点(0,1)处的梯度等于(　　).

(A) $\boldsymbol{i}$　　(B) $-\boldsymbol{i}$　　(C) $\boldsymbol{j}$　　(D) $-\boldsymbol{j}$

【考点分析】 本题考查梯度的计算；直接利用梯度计算公式即可.

解 $f_x=\dfrac{\dfrac{1}{y}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=\dfrac{\dfrac{1}{y}}{\dfrac{x^2+y^2}{y^2}}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$f_x(0,1)=\dfrac{1}{1}=1$；

$f_y=\dfrac{\dfrac{-x}{y^2}}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，$f_y(0,1)=0$.

所以 $\mathrm{grad} f(0,1)=1\times \boldsymbol{i}+0\times \boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$. 故应选(A).

【方法点击】 本题属于基本题型,首先应保证偏导数的计算正确,其次要将具体点代入.

【典型错误】 有的考生没有记住梯度的计算公式,还有的考生将偏导数算错.

例 13(2006 年) 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ) 若 $f(1)=0, f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

【考点分析】 本题考查多元复合函数偏导数的计算及微分方程的解法,属综合题型. 利用复合函数偏导数计算方法求出 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 即可得(Ⅰ). 由可降阶微分方程求解方法解(Ⅱ)即可.

解 (Ⅰ) 设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $z=f(u)$,从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=f''(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\\&=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

将 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

(Ⅱ) 令 $f'(u)=p$,则 $p'+\dfrac{p}{u}=0$,即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$,两边积分得

$$\ln p=-\ln u+\ln C_1, \text{即 } p=\frac{C_1}{u}, \text{亦即 } f'(u)=\frac{C_1}{u}.$$

由 $f'(1)=1$ 可得 $C_1=1$. 所以有 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$,两边积分得

$$f(u)=\ln u+C_2,$$

由 $f(1)=0$ 可得 $C_2=0$,故 $f(u)=\ln u$.

【方法点击】 本题为综合题型,将多元复合函数的偏导数的计算及可降阶微分方程的求解巧妙结合,且(Ⅰ)、(Ⅱ)相互独立,互不影响其解题过程.

【典型错误】 函数 $f(\sqrt{x^2+y^2})$ 的中间变量是 1 个,所以对中间变量求一阶导数、二阶导数的记号应是 f', f'',有的考生对二元函数 $f(\sqrt{x^2+y^2})$ 的复合情形不清晰,出现了 f_x, f_{xx}, f_{yy} 之类的错误记号.

例 14(2009 年) 设函数 $f(x,y)$具有二阶连续偏导数,$z=f(x,xy)$,则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

【考点分析】 多元复合函数高阶偏导数的求法,属基本题型,经常考查.要求二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,首先要求出一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$,再对$\frac{\partial z}{\partial x}$求关于 y 的偏导数,即将$\frac{\partial z}{\partial x}$中的 x 看作常数,对 y 求导,便可得到$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$,$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''x+f_2'+yf_{22}''x=xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$.

故应填 $xf_{12}''+f_2'+xyf_{22}''$.

【方法点击】 求二元复合函数 $z=f(u,v)$(u,v 仍为 x,y 的二元函数)的二阶偏导数时应注意:

(1) 一阶偏导数 f_u 与 f_v(即 $f_u=f_1'$,$f_v=f_2'$)中变量的复合情形和原来函数的复合情形相同;

(2) 当 $z=f(u,v)$具有二阶连续偏导数时,$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$,即 $f_{12}''=f_{21}''$.

【典型错误】 本题常见的错误是忽视了求导之后的函数仍具有复合性质.也就是说,f_1'和 f_2'同 f 一样,都是关于(x,xy)的函数,即 $f_1'=f_1'(x,xy)$,$f_2'=f_2'(x,xy)$.再次对 x,y 求偏导时,也必须运用复合函数求导法则运算.

例 15(2007 年) 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$上的最大值和最小值.

【考点分析】 本题求二元函数在闭区域上的最值.先求出函数在区域内的驻点,然后比较驻点的函数值和边界上的极值,则最大者为最大值,最小者为最小值.

解 **解法一**:令

$$\begin{cases} f_x=2x-2xy^2=0,\\ f_y=4y-2x^2y=0,\end{cases}$$

得 $f(x)$在 D 内驻点为$(\pm\sqrt{2},1)$,且 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$.

在边界 L_1:$y=0(-2\leqslant x\leqslant 2)$上,记

$$g(x)=f(x,0)=x^2,$$

显见在 L_1 上 $f(x,y)$的最大值为 4,最小值为 0.

在边界 L_2:$x^2+y^2=4(y\geqslant 0)$上,记

$$h(x)=f(x,\sqrt{4-x^2})=x^4-5x^2+8(-2\leqslant x\leqslant 2),$$

由 $h'(x)=4x^3-10x=0$ 得驻点

$$x_1=0,x_2=-\sqrt{\frac{5}{2}},x_3=\sqrt{\frac{5}{2}},$$

$$h(0)=f(0,2)=8,h\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}.$$

综上,$f(x,y)$在 D 上最大值为 8,最小值为 0.

解法二:在 D 内与边界 L_1 上同解法一.

在边界 L_2:$x^2+y^2=4(y\geqslant 0)$上,构造函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4).$$

令$\begin{cases}F_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0,\\F_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0,\\F_\lambda=x^2+y^2-4=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\\y=\sqrt{\dfrac{3}{2}},\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4},f(0,2)=8.$$

综上，$f(x,y)$在 D 上的最大值为 8，最小值为 0.

【方法点击】 多元函数的最值问题，一般都用拉格朗日乘数法解决. 利用拉格朗日乘数法确定目标函数的可能极值点后，不必一一检验它们是否为极值点，只要比较目标函数在这些点处的值，最大者为最大值，最小者为最小值. 但当只有唯一的可能极值点时，目标函数在这点处必取到最值，究竟是最大值还是最小值需根据问题的实际意义判定.

【典型错误】 本题的错误主要是有的考生不会求函数 $f(x,y)$在闭区域 D 边界上的最大、最小值.

例 16(2009 年) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

【考点分析】 本题考查多元函数极值的求法，是常考的基本题型；应先求出方程组 $\begin{cases}f_x(x,y)=0,\\f_y(x,y)=0\end{cases}$ 的解：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$；再利用极值判别法判断每个点$(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$是否为极值点，并在极值点处求出相应的极值.

解 由题设条件知函数 $f(x,y)$的定义域是：$-\infty<x<+\infty,y>0$，且 $f(x,y)$在其定义域内可导，因此解方程组

$$\begin{cases}f_x(x,y)=2x(2+y^2)=0,\\f_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0,\end{cases}$$

得 $f(x,y)$的唯一极值可疑点：$(x_1,y_1)=(0,e^{-1})$.

又 $A=f_{xx}(x,y)=2(2+y^2)$，$B=f_{xy}(x,y)=4xy$，$C=f_{yy}(x,y)=2x^2+\dfrac{1}{y}$，

在点$(0,e^{-1})$处，$A=2\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)>0$，$B=0$，$C=e$ 且 $B^2-AC=-2e\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)<0$，因此 $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$为极小值.

【方法点击】 若二元函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内具有二阶偏导数，则在 D 内求 $f(x,y)$极值的步骤为：

(1) 求极值可疑点. 即求方程组$\begin{cases}f_x(x,y)=0,\\f_y(x,y)=0\end{cases}$在 D 内的全部解：$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$

(2) 先求出 $A=f_{xx}(x,y)$，$B=f_{xy}(x,y)$，$C=f_{yy}(x,y)$；再按照下面的充分条件进行判断：在可疑点(x_i,y_i)处：

当 $B^2-AC<0$ 时，$f(x_i,y_i)$是极值，且 $A>0$ 时，$f(x_i,y_i)$是极小值，$A<0$ 时，$f(x_i,y_i)$

是极大值；

当 $B^2-AC>0$ 时，$f(x_i,y_i)$不是极值；

当 $B^2-AC=0$ 时，无法断定 $f(x_i,y_i)$是否为极值.

【典型错误】 本题的出错点是：有的考生没有记住极值判别法中的条件，即将 $A>0$ 时对应的函数为极小值误判为极大值.

例 17(2008 年)　已知曲线 C：$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

【考点分析】 本题考查多元函数条件极值的求法. 为了简化计算，可转化为求 C 到 xOy 面距离平方的最值. 其中，设(x,y,z)为曲线 C 上的任意一点，则(x,y,z)到 xOy 面的距离为$|z|$.

解　设曲线 C：$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5\end{cases}$ 上的任意一点为(x,y,z)，则(x,y,z)到 xOy 面的距离为$|z|$，等价于函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

设
$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$$
令
$$\begin{cases}F_x=2\lambda x+\mu=0,\\F_y=2\lambda y+\mu=0,\\F_z=2z-4\lambda z+3\mu=0,\\x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$$
解得 $x=y$，从而
$$\begin{cases}2x^2-2z^2=0,\\2x+3z=5,\end{cases}$$
解得
$$\begin{cases}x=-5,\\y=-5,\\z=5,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1.\end{cases}$$
根据几何意义，曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点，而 $H(-5,-5,5)=25$，$H(1,1,1)=1$. 故距离 xOy 平面最远的点为$(-5,-5,5)$，最近的点为$(1,1,1)$.

【方法点击】 本题运用拉格朗日乘数法求条件极值时，可以将条件合并加以简化，因(x,y,z)满足 C：$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$ 所以 $z=\dfrac{5-x-y}{3}$，则可由$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5\end{cases}$ 消去 z 得
$$x^2+y^2-2\left(\frac{5-x-y}{3}\right)^2=0.$$
令 $F(x,y,z)=(x^2+y^2)+\lambda\left[x^2+y^2-2\left(\dfrac{5-x-y}{3}\right)^2\right]$也可求得极值. 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-\lambda\left(2x-4\cdot\dfrac{x+y-5}{3}\right)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y-\lambda\left(2y-4\cdot\dfrac{x+y-5}{3}\right)=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2\left(\dfrac{5-x-y}{3}\right)^2=0.\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-5,\\ y=-5.\end{cases}$$

得$|z|_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(-5,-5)}=5$，$|z|_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,1)}=1$. 即距离 xOy 平面最远的点和最近的点分别为$(-5,-5,5)$和$(1,1,1)$.

【典型错误】 主要错误有 3 种：(1)不会写曲线 C 上的点到 xOy 面的距离；(2)写错函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)$；(3)不会判定(或没有判定)哪一点是距离 xOy 面最远的点；哪一点是距离 xOy 面最近的点.

例 18(2011 年) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ________.

【考点分析】 本题考查变上限积分定义的函数的高阶偏导数的求法.

解 因为 $F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，所以

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin(xy)}{1+(xy)^2}\cdot y=\frac{y\sin(xy)}{1+x^2y^2},$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y^2\cdot\frac{(1+x^2y^2)\cdot\cos(xy)-2xy\cdot\sin(xy)}{(1+x^2y^2)^2}$$

于是$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=4$，故应填 4.

【方法点击】 对于用变限积分定义的二元函数的偏导数有下列结论：

① 若函数 $f(x)$ 连续，$g(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $F(x,y)=\int_a^{g(x,y)}f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f[g(x,y)]\cdot\frac{\partial g}{\partial x},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=f[g(x,y)]\cdot\frac{\partial g}{\partial y};$$

② 若函数 $f(x)$ 连续，$g(x,y)$ 与 $h(x,y)$ 均具有一阶连续偏导数，且 $F(x,y)=\int_{h(x,y)}^{g(x,y)}f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f[g(x,y)]\cdot\frac{\partial g}{\partial x}-f[h(x,y)]\cdot\frac{\partial h}{\partial x},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=f[g(x,y)]\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-f[h(x,y)]\cdot\frac{\partial h}{\partial y}.$$

【典型错误】 该题考生出错的原因是不会求$\dfrac{\partial F}{\partial x}$，事实上，只要记住二元函数 $F(x,y)$在对 x 求偏导时将 y 视为常数即可.

例 19(2013 年) 求函数 $f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

【考点分析】 先用二元函数取极值的必要条件求出可疑点,再用充分条件求出极值.

解 令 $f_x=e^{x+y}\left(x^2+y+\frac{x^3}{3}\right)=0$, $f_y=e^{x+y}\left(1+y+\frac{x^3}{3}\right)=0$,解得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-\frac{4}{3}, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-1, \\ y=-\frac{2}{3}. \end{cases}$$

又因

$$f_{xx}=e^{x+y}\left(2x+2x^2+y+\frac{x^3}{3}\right), f_{xy}=e^{x+y}\left(1+x^2+y+\frac{x^3}{3}\right), f_{yy}=e^{x+y}\left(2+y+\frac{x^3}{3}\right),$$

且 $A=f_{xx}\Big|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=3e^{-\frac{1}{3}}$, $B=f_{xy}\Big|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=e^{-\frac{1}{3}}$, $C=f_{yy}\Big|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=e^{-\frac{1}{3}}$,

从而 $AC-B^2=3e^{-\frac{2}{3}}-e^{-\frac{2}{3}}=2e^{-\frac{2}{3}}>0$. 又 $A>0$,所以 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点,极小值为 $f\left(1,-\frac{4}{3}\right)=-e^{-\frac{1}{3}}$.

又因为 $A=f_{xx}\Big|_{\left(-1,-\frac{2}{3}\right)}=-e^{-\frac{5}{3}}$, $B=f_{xy}\Big|_{\left(-1,-\frac{2}{3}\right)}=e^{-\frac{5}{3}}$, $C=f_{yy}\Big|_{\left(-1,-\frac{2}{3}\right)}=e^{-\frac{5}{3}}$,从而 $AC-B^2<0$,所以点 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

【方法点击】 多元函数特别是二元函数,求极值是常规题型.

设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在一阶偏导数且 (x_0,y_0) 为极值点,则 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$,

若 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$,则 (x_0,y_0) 为极小值点;

若 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$,则 (x_0,y_0) 为极大值点;

若 $AC-B^2<0$,则 (x_0,y_0) 非极值点;

若 $AC=B^2$,则无法判别 (x_0,y_0) 是否为极值点.

【典型错误】 本题的出错点主要在于取极值的充分条件记错,从而误把 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 判别为极值点.

例 20(2014 年) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}.$$

若 $f(0)=0$, $f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

【考点分析】 本题考查偏导数的计算与微分方程求解;先求出二阶偏导数代入关系式,再解二阶线性微分方程即可.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$

所以$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$化为

$$f''(e^x\cos y)e^{2x}=[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y]e^{2x}.$$

从而函数 $f(u)$满足方程

$$f''(u)=4f(u)+u. \tag{$*$}$$

方程($*$)对应的齐次方程的通解为

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}.$$

方程($*$)的一个特解为$-\dfrac{u}{4}$,故方程($*$)的通解为

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}.$$

由 $f(0)=0,f'(0)=0$,得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ 2C_1-2C_2-\dfrac{1}{4}=0.\end{cases}$$

解得 $C_1=\dfrac{1}{16},C_2=-\dfrac{1}{16}$,故 $f(u)=\dfrac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u)$.

【方法点击】 ① 对复合函数求一阶、二阶偏导数是常考题型,需用链导法,其中复合关系一定要明确,本题的复合关系图为: $z \;\; u\begin{array}{l}\diagup x\\ \diagdown y\end{array}$, $f' - u\begin{array}{l}\diagup x\\ \diagdown y\end{array}$.

② 二阶常系数线性非齐次方程的通解 $y=Y+y^*$,其中 Y 是对应的齐次方程通解,y^*是原方程的一个特解.

【典型错误】 本题常见错误是二阶偏导数计算不准确.部分考生忽略了 $f'(e^x\cos y)$仍是复合函数,需要继续用链导法.

例 21(2011 年) 设函数 $f(x)$具有二阶连续导数,且 $f(x)>0,f'(0)=0$,则函数 $z=f(x)\ln f(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是( ).

(A) $f(0)>1,f''(0)>0$　　(B) $f(0)>1,f''(0)<0$

(C) $f(0)<1,f''(0)>0$　　(D) $f(0)<1,f''(0)<0$

【考点分析】 本题考查多元函数极值的求法;先求二元函数的一阶、二阶偏导数,再利用判别法便可.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)\ln f(y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)\ln f(y),\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)\dfrac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{f^2(y)}$.

若函数 $z=f(x)\ln f(y)$在$(0,0)$处取得极小值,并注意 $f(x)>0,f'(0)=0$,则

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)\ln f(0)=0,\\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)\cdot\dfrac{f'(0)}{f(0)}=0,\end{cases}$$

且
$$B^2-AC=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}$$
$$=\frac{[f'(0)]^4}{f^2(0)}-f''(0)\ln f(0)\cdot f(0)\frac{f(0)f''(0)-[f'(0)]^2}{f^2(0)} \qquad (*)$$
$$=-[f''(0)]^2\ln f(0)<0,$$
$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=f''(0)\ln f(0)>0, \qquad (**)$$
由(*)、(**)式得 $f(0)>1, f''(0)>0$. 故应选(A).

【方法点击】 若二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶偏导数,则在 D 内求 $f(x,y)$ 极值的步骤为:

① 求极值可疑点,即求方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ 在 D 内的全部解:$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$;

② 利用二元函数极值的判别法判断每个极值可疑点:$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$ 是否为极值点;若为极值点进一步求出其极值.

【典型错误】 个别考生选(B),其原因是将 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}$ 的符号与函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在(0,0)点处取得极大值与极小值的关系搞错了.

例 22(2014 年)　曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点(1,0,1)处的切平面方程为________.

【考点分析】 本题考查曲面的切平面方程的求法.先求曲面在点(1,0,1)处的法向量,再利用平面的点法式方程即可得结论.

解　$z_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x$,　$z_x(1,0)=2$.

$z_y=-x^2\cos y+2y(1-\sin x)$,　$z_y(1,0)=-1$.

所以曲面在(1,0,1)处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-1)$,则切平面方程为
$$2(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0, \text{即 } 2x-y-z=1.$$
故应填 $2x-y-z=1$.

【方法点击】 若曲面 Σ: $F(x,y,z)=0$,则在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为
$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$
若曲面 Σ: $z=f(x,y)$,则在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为
$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

【典型错误】 本题出错点主要是有的考生不会求法向量,因此没有写出切平面的方程.

例 23(2011 年)　设函数 $z=f[xy,yg(x)]$,其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

【考点分析】 本题考查多元复合函数求高阶偏导数值;先求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$,再由 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 对 y 求偏导数得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,最后将 $x=1,y=1$ 代入即可.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot f_1'+yg'(x)\cdot f_2'$,

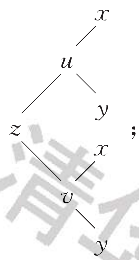
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + xyf_{11}'' + yf_{12}''[g(x) + xg'(x)] + g'(x) \cdot f_2' + y \cdot g(x) \cdot g'(x) \cdot f_{22}''.$$

由题设条件 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值，故得 $g'(1)=0$，而 $g(1)=1$. 将 $x=1, y=1$，$g'(1)=0$，$g(1)=1$ 代入上式得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1).$$

【方法点击】 对复合函数求一阶、二阶偏导数，是考试中的常考题型. 通常采用链式法则.

① 设出中间变量 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，使 $z=f(u,v)$；

② 画出复合路径图  ；

③ 根据公式 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$ 求得一阶偏导数. 再根据一阶偏导数求二阶偏导数. 求二阶偏导数时应注意不要漏项，即 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$ 仍是关于 x, y 的复合函数，仍然需采用链式法则.

【典型错误】 本题常见的错误是忽视了求偏导之后的函数仍是复合函数，也就是说，f_1' 与 f_2' 同 f 的复合关系一样，都是关于 $(xy, yg(x))$ 的函数，即 $f_1'=f_1'(xy, yg(x))$，$f_2'=f_2'(xy, yg(x))$，在对 x 或 y 求偏导数时，也必须运用复合函数的求导法则进行计算.

例 24（2015 年） 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$ ________.

【考点分析】 本题考查多元函数全微分与隐函数求导法；先求隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数，再求其全微分.

解　解法一： 令 $F(x,y,z)=e^z+xyz+x+\cos x-2$，则

$$F_x = yz+1-\sin x, \qquad F_y = xz, \qquad F_z = e^z + xy.$$

将 $x=0, y=1$ 代入已知方程得，$e^z=1 \Rightarrow z=0$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = -\left.\frac{F_x}{F_z}\right|_{(0,1,0)} = -\left.\frac{yz+1-\sin x}{xy+e^z}\right|_{(0,1,0)} = -1,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = -\left.\frac{F_y}{F_z}\right|_{(0,1,0)} = -\left.\frac{xz}{xy+e^z}\right|_{(0,1,0)} = 0,$$

于是由公式得

$$dz\,|_{(0,1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} dy = -dx.$$

解法二： 对方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 两端同时微分，得

$$e^z dz + yz dx + xz dy + xy dz + dx - \sin x dx = 0,$$

所以 $dz=-\frac{(yz+1-\sin x)dx+xzdy}{xy+e^z}$. 又当 $x=0, y=1$ 时，$z=0$，则

$$\mathrm{d}z\bigg|_{(0,1)}=-\frac{(yz+1-\sin x)\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y}{xy+\mathrm{e}^z}\bigg|_{(0,1,0)}=-\mathrm{d}x.$$

故应填$-\mathrm{d}x$.

【方法点击】 本题属于基本题，考查隐函数求导及多元函数求全微分，这两个知识点是考研的重点.

① 隐函数求导公式：设 $F(x,y,z)=0$ 且 $F_z\neq0$. 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

② 隐函数求导常用的方法为在已知方程两边分别对 x（或 y）求导（将 z 视为 x,y 的二元函数），再解出$\frac{\partial z}{\partial x}\left(或\frac{\partial z}{\partial y}\right)$；还可用全微分法（如本题解法二）.

③ 二元函数 $z=z(x,y)$ 的全微分计算公式为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

【典型错误】 本题主要出错点为：(1)不知道将 $x=0,y=1$ 代入已知方程求出对应的 z 值；(2)不会利用隐函数求导法求出$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}$及$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}$；(3)没有记住二元函数的全微分计算公式.

例 25(2016 年) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=$________.

【考点分析】 本题考查向量场旋度的公式及计算.

解 由旋度定义公式，得

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=0\cdot\boldsymbol{i}+1\cdot\boldsymbol{j}+(y-1)\cdot\boldsymbol{k}=(0,1,y-1).$$

故应填 $\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$.

【方法点击】 向量场的散度、旋度也是常考查的知识点.

设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则其散度为$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$；其旋度为

$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$，记作

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

或

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

【典型错误】 旋度的计算并不难，但不经常考，从而没有引起考生的重视，导致有的考

生不会计算旋度.

例 26(2015 年)　已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$,曲线 C: $x^2+y^2+xy=3$,求 $f(x,y)$在曲线 C 上的最大方向导数.

【考点分析】 本题考查方向导数、梯度与多元函数的条件极值.先求函数 $f(x,y)$在点(x,y)处的梯度 $\mathrm{grad}f(x,y)$,再求梯度的模$|\mathrm{grad}f(x,y)|$;最后求 $\mathrm{grad}f(x,y)$在约束条件 C: $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

解　由条件知 $f_x(x,y)=1+y$,$f_y(x,y)=1+x$,于是梯度为

$$\mathrm{grad}f(x,y)=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}=(1+y)\boldsymbol{i}+(1+x)\boldsymbol{j},$$

由梯度与方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x,y)}$的关系知

$$\max\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(x,y)}\right\}=|\mathrm{grad}f(x,y)|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2},$$

于是问题转化为求函数 $H(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$在约束条件 C: $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

为计算方便可将问题转化为求函数 $T(x,y)=H^2(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在条件 C: $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值,于是由拉格朗日乘数法,取

$$F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3).$$

令
$$\begin{cases}F_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0,\\ F_y=2(1+y)+\lambda(x+2y)=0,\\ F_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\ y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\ y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\ y=2.\end{cases}$$

于是得下列可疑点:$A_1(1,1)$,$A_2(-1,-1)$,$A_3(2,-1)$,$A_4(-1,2)$.所求最大值为

$$\max\{H(1,1),H(-1,-1),H(2,-1),H(-1,2)\}=\max\{\sqrt{8},0,3,3\}=3.$$

故 $f(x,y)$在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

【方法点击】 本题是一道综合题,有一定难度,且命题方式很新颖,考查了梯度、方向导数与条件极值等多个知识点.

解答本题的关键是利用方向导数与梯度的关系,即梯度方向的方向导数最大,且方向导数的最大值就是梯度的模,本题中为$|\mathrm{grad}f(x,y)|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$,于是问题就转化为在约束条件 C: $x^2+y^2+xy=3$ 下求函数 $H(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$的最大值.该题中为计算方便起见将求 $H(x,y)$的最大值转化为求 $H^2(x,y)$的最大值.

一般求函数 $z=f(x,y)$在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的最值这类问题是考研中的常考题型.这种题目有相对固定的解题步骤,即

① 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

② 解方程组
$$\begin{cases}F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0,\\ F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0,\\ F_\lambda=\varphi(x,y)=0,\end{cases}$$

得最值可疑点：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，这一步是解题的关键.

③ 函数 $f(x,y)$满足要求的最大值为

$$\max\{f(x_1,y_1),f(x_2,y_2),\cdots,f(x_m,y_m)\}.$$

【典型错误】 该题考生的主要问题是：不知道最大方向导数与梯度的关系；不会将所求最大方向导数转化为求在约束条件 C：$x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值，导致未能解答本题.