六、多元函数积分学

（一）内容概括

多元函数积分是一元函数积分的推广.这种推广包括二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分.从定义方式上看,这些积分与定积分是相似的,它们的计算也都要化为定积分.因此,定积分是基础,学习这部分内容的关键就是要掌握它们与定积分的关系,以及它们之间的相互关系.

（二）考试要求

最新颁布的全国硕士研究生入学考试大纲(数学一)中对多元函数积分学的要求是:

1. 理解二重积分、三重积分的概念,了解重积分的性质,了解二重积分的中值定理.
2. 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标),会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).
3. 理解两类曲线积分的概念,了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.
4. 掌握计算两类曲线积分的方法.
5. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件,会求二元函数全微分的原函数.
6. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系,掌握计算两类曲面积分的方法,会用高斯公式、斯托克斯公式计算曲面、曲线积分.
7. 了解散度与旋度的概念,并会计算.
8. 会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、转动惯量、引力、功及流量等).

（三）真题解析

例1(2017年)　若曲线积分$\int_L \frac{x\,\mathrm{d}x - ay\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$内与路径无关,则$a=$________.

【考点分析】　本题考查平面曲线积分与路径无关的条件,由$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$即可确定$a$的值.

解　由题设记:$P=\frac{x}{x^2+y^2-1}$,$Q=\frac{-ay}{x^2+y^2-1}$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2},\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}.$$

因为曲线积分$\int_L \frac{x\,\mathrm{d}x - ay\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$内与路径无关,所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,从而得$a=-1$.

故应填-1.

【方法点击】　设区域G是一个单连通区域,若函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$在G内具有一阶

连续偏导数，则曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$G$内与路径无关（或沿$G$内任一闭曲线的积分为零）的充要条件是$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$G$内恒成立.

【典型错误】 有的考生粗心将偏导数$\dfrac{\partial P}{\partial y}$或$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$求错；也有的考生没有记住平面曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路径无关的条件.

例 2（2017 年） 设薄片型物体S是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$割下的有限部分，其上任一点的密度为$\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.记圆锥面与柱面的交线为$C$.

（Ⅰ）求C在xOy平面上的投影曲线的方程；

（Ⅱ）求S的质量M.

【考点分析】 本题考查空间曲线在坐标面上的投影曲线及曲面片质量的求法；由圆锥面方程$z=\sqrt{x^2+y^2}$与柱面方程$z^2=2x$联立消去z，可得投影柱面方程；投影柱面与xOy面的交线即为所求投影曲线的方程；由密度函数利用第一类曲面积分便可得曲面片的质量.

解 （Ⅰ）圆锥面与柱面的交线C的方程为$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z^2=2x,\end{cases}$消去$z$得$C$到$xOy$平面的投影柱面为$x^2+y^2=2x$，故所求投影曲线的方程为$\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ z=0.\end{cases}$

（Ⅱ）因为S的密度为$\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所以$S$的质量为

$$M=\iint_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S.$$

又S在xOy面上的投影区域为$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$，所以

$$\begin{aligned}M&=9\iint_D\sqrt{2(x^2+y^2)}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=18\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot r\mathrm{d}r\\&=48\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=64.\end{aligned}$$

【方法点击】 本题是一道综合题，但不难.涉及下列知识点：

（1）空间曲线C在坐标面上投影曲线的求法.

设C：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$由该方程组消去$z$得曲线$C$关于$xOy$面投影柱面的方程：$H(x,y)=0$，则曲线$C$在$xOy$面上的投影曲线的方程为$\begin{cases}H(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$

类似地可得曲线C在其他两个坐标面上的投影曲线.

（2）变密度曲面片质量的求法.

面密度为连续函数 $\mu(x,y,z)$ 的光滑曲面 S 的质量 M 为

$$M=\iint_S \mu(x,y,z)\mathrm{d}S$$

【典型错误】 本题考生出现的主要错误是：①求空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线时，将投影柱面方程：$x^2+y^2=2x$ 当作投影曲线方程；②不会求曲面片 S 的质量.

例 3（2010 年） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）.

（A）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　（B）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　（D）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

【考点分析】 本题考查二重积分的定义. 首先应将和式变形：$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2}$，再由二重积分的定义即可得结论.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{n\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\cdot n^2\left(1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

故应选(D).

【方法点击】 二重积分的定义是由计算曲顶柱体的体积引入的，采用了“划分、取近似、求和、取极限”的经典四大步骤完成.

本题需利用二重积分的定义求和式极限，就是在理解二重积分构造步骤的基础上采用逆向思维. 仔细观察题目不难发现其实本题就是化为一个二次积分，与定积分求和式极限的方法完全一样，关键步骤是：

① 将极限的和式提取因子$\dfrac{1}{n}$，使之化为$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2}$的极限问题.

② 由变形后的和式联想二重积分定义，构造出二重积分来.

【典型错误】 有些考生会选(A)，其实(A)项的和式极限应为$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$，应仔细比对不同之处.

例 4（2014 年） 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x-1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

（B）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

【考点分析】 本题考查二次积分次序的交换.利用已知的积分限确定积分区域,然后交换积分次序.

解 积分区域如图 1-15 所示,换成极坐标则为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

故应选(D).

【方法点击】 关于交换二次积分次序这类问题其解题步骤为:

(1) 由已知二次积分画出积分区域的图形;

(2) 根据积分区域的形状写出另一种次序的二次积分.

【典型错误】 如果换成直角坐标系积分应为

$$\int_{-1}^{0}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy.$$

许多考生积分区域判断不准确,或者积分限观察不仔细,导致错误选择(A)或(B).

例 5(2004 年) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$,则 $F'(2)$ 等于( ).

(A) $2f(2)$ (B) $f(2)$ (C) $-f(2)$ (D) 0

【考点分析】 本题考查变上限积分的导数及二次积分交换积分次序.应先求导,再代入 $t=2$ 便可得$F'(2)$.关键是求导前应先交换积分次序,使得被积函数中不含有变量 t.

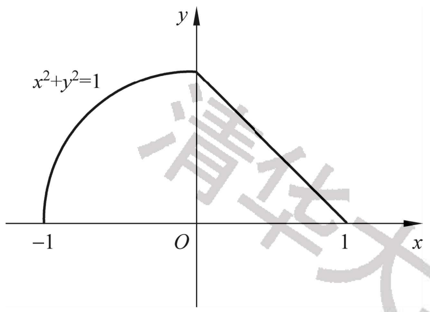

图 1-15

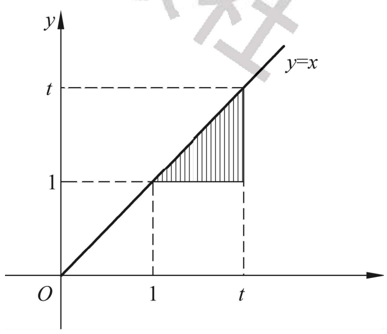

图 1-16

解 **解法一**:如图 1-16 所示,交换积分次序,得

$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t\left[\int_1^x f(x)dy\right]dx=\int_1^t f(x)(x-1)dx,$$

于是,$F'(t)=f(t)(t-1)$,从而有 $F'(2)=f(2)$,故应选(B).

解法二:转化为可用变限积分求导公式的情形.

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_1^t\left(\int_y^1 f(x)dx\right)dy+\int_1^t\left(\int_1^t f(x)dx\right)dy\\&=\int_1^t\left(\int_y^1 f(x)dx\right)dy+(t-1)\int_1^t f(x)dx,\end{aligned}$$

$$F'(t)=\int_t^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+(t-1)f(t)=(t-1)f(t),$$

则 $F'(2)=f(2)$. 故选(B).

【方法点击】 在应用变限的积分对变量 x 求导时,应注意被积函数中不能含有变量 x:

$$\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

否则,应先通过恒等变形、变量代换和交换积分次序等将被积函数中的变量 x 换到积分号外或积分限上.

【典型错误】 有的考生选(D),究其原因是他们只考虑 $\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$ 是 y 的函数,而没有考虑到它又是 t 的函数,因此没有交换积分次序就对 t 求导.

例 6(2009 年) 如图 1-17,正方形 $\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$, $I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=(\quad)$.

(A) I_1　　(B) I_2

(C) I_3　　(D) I_4

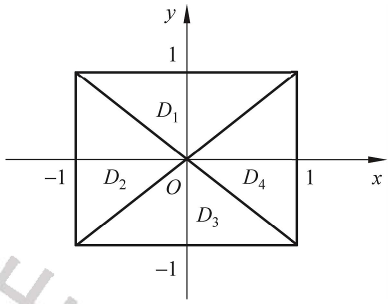

图 1-17

【考点分析】 本题考查利用对称性计算二重积分. 如图 1-17 所示,区域 $D_j(j=2,4)$关于 x 轴对称;而区域 $D_j(j=1,3)$关于 y 轴对称;被积函数关于 x 为偶函数,关于 y 为奇函数,因此利用二重积分对称性即可.

解 当$(x,y)\in D_k(k=2,4)$时,$f(x,-y)=-y\cos x=-f(x,y)$,且 $D_k(k=2,4)$关于 x 轴对称,由二重积分对称性知:$I_2=I_4=0$.

当$(x,y)\in D_j(j=1,3)$时,$f(-x,y)=y\cos(-x)=y\cos x=f(x,y)$,且 $D_j(j=1,3)$关于 y 轴对称,同理知

$$I_1=2\iint\limits_{\{(x,y)\mid y\geqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\}} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0(\text{因为 } y\cos x\geqslant 0),$$

$$I_3=2\iint\limits_{\{(x,y)\mid y\leqslant -x,0\leqslant x\leqslant 1\}} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0(\text{因为 } y\cos x\leqslant 0).$$

故应选(A).

【方法点击】 利用对称性来简化二重积分的计算是一种常用的有效方法. 在运用对称性时,必须兼顾被积函数和积分区域两个方面,两者的对称性要相匹配. 归纳起来有如下几种常见的情形(以下假设 $f(x,y)$ 在积分区域 D 上连续,并记 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$):

(1) 如果积分区域 D 关于 y 轴对称,那么:

① 当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时(此时称 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数),$I=0$;

② 当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 时(此时称 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数),$I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_1=\{(x,y)\in D\mid x\geqslant 0\}$.

(2) 如果积分区域 D 关于 x 轴对称，那么：

① 当 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时(此时称 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数)，$I=0$；

② 当 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时(此时称 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数)，$I=2\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_2=\{(x,y)\in D\mid y\geqslant 0\}$.

(3) 如果积分区域 D 关于原点对称，那么：

① 当 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 时，$I=0$；

② 当 $f(-x,-y)=f(x,y)$ 时，$I=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D_1,D_2 是 D 的对称于原点的两部分区域.

(4) 如果积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，那么 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}f(y,x)\mathrm{d}\sigma$.

(5) 如果积分区域 D_1,D_2 关于直线 $y=x$ 对称，那么 $\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_2}f(y,x)\mathrm{d}\sigma$.

【典型错误】 有的考生没有利用对称性，而是直接计算每个 $I_k(k=1,2,3,4)$ 的值，由于计算粗心导致选(B)或(C)或(D)的都有.

例 7(2006 年) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于(　　).

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$ 　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

【考点分析】 本题考查二重积分计算中坐标系的交换及二重积分化为二次积分的方法. 首先由题设画出积分区域的图形，然后在直角坐标系中将其化为二次积分.

解 由题设可知积分区域 D 如图 1-18 所示，显然是 Y 型域，则

$$原式=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

故应选(C).

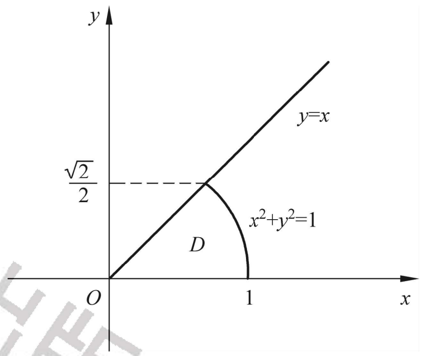

图 1-18

【方法点击】 利用直角坐标系计算二重积分是二重积分计算方法中非常重要的方法之一，也是历年来各类考试的重点内容. 使用这种方法的关键是要把二重积分正确地转化为二次积分进行计算，其步骤可分为以下几步：

(1) 画出积分区域 D 的草图.

(2) 根据积分区域 D 和被积函数的特点选择适当的积分次序. 选序的原则有三个：

① 积分区域 D 的划分块数应尽可能少；

② 第一次积分的上下限表达式要简单，并且容易根据第一次积分的结果作第二次积分；

③ 不管用哪种积分次序，必须能求出二次积分的被积函数的原函数.

(3) 确定二次积分的上下限，把二重积分化为二次积分计算，这也是计算二重积分的最关键的一步，定限的方法可归纳如下：

① 后积先定限(累次积分中后积分变量的上下限均为常数可以先确定)；

② 限内画条线(该直线要平行于坐标轴且与坐标轴同方向)；

③ 先交为下限(直线先穿过的曲线为下限)；

④ 后交为上限(直线后穿过的曲线为上限).

【典型错误】 本题出错点主要是：(1)由已知极坐标系中的二次积分没有正确画出积分区域 D；(2)在直角坐标系中将区域 D 视为 X 型域时没有对积分区域 D 进行划分.

例 8(2015 年) 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=($ $)$.

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

【考点分析】 本题考查在极坐标系中将二重积分化为二次积分的计算.

解 如图 1-19 所示，在极坐标系中积分区域 D 为

$$D=\left\{(r,\theta)\left|\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}\right.\right\},$$

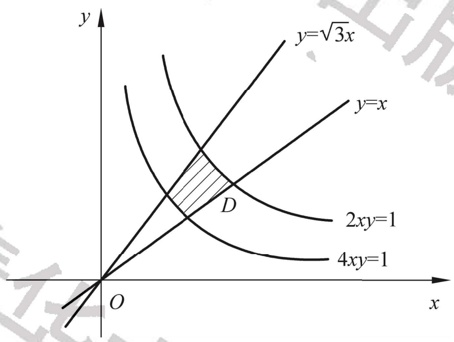

图 1-19

于是有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

故应选(B).

【方法点击】 二重积分的极坐标形式为

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

根据积分区域 D 与极点的关系分以下 3 种情况：

(1) 极点在区域 D 的边界曲线外，即 $D:\begin{cases}\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\end{cases}$ 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

(2) 极点在区域 D 的边界曲线上,即 D: $\begin{cases}\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta),\end{cases}$ 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

(3) 极点在区域 D 的边界曲线内,即 D: $\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta),\end{cases}$ 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

【典型错误】 有的考生选(D),原因是将极坐标中面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 中的 r 漏掉了.

例 9(2005 年) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\}$,$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数,计算二重积分 $\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【考点分析】 本题考查的知识点有函数概念、二重积分性质,以及二重积分在极坐标系下的计算方法.关键是如何处理$[1+x^2+y^2]$,一种方法是将二重积分转化成极坐标系下的二重积分,$[1+x^2+y^2]=[1+r^2]$,写出$[1+r^2]$在区间$[0,\sqrt[4]{2}]$上的具体解析式子,再积分,另一种方法是按$[1+x^2+y^2]$要求将 D 分成两个区域,从而二重积分成为两个二重积分之和并计算之.

解 **解法一**

$$\begin{aligned}\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3\sin\theta\cos\theta[1+r^2]\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3[1+r^2]\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3\mathrm{d}r\right)\\&=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

解法二 记

$$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,x\geqslant0,y\geqslant0\},$$
$$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\},$$

则有

$$[1+x^2+y^2]=1,(x,y)\in D_1,$$
$$[1+x^2+y^2]=2,(x,y)\in D_2.$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

【方法点击】 在计算重积分时，若被积函数含有绝对值号或含有取整函数符号“[]”，应先根据变量的取值范围将绝对值号或取整函数符号“[]”去掉，即将被积函数表示为分段函数，再利用分段函数积分法进行计算.

【典型错误】 (1)多数考生不太熟悉取整函数，因而不知如何处理$[1+x^2+y^2]$，表现在将二重积分转化为极坐标系下的二重积分后做不下去，或将被积函数错写成$[1+x^2+y^2]=2$；(2)粗心，误认为 $x^2+y^2=\sqrt{2}$的半径是$\sqrt{2}$.

例 10(2006 年)　设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

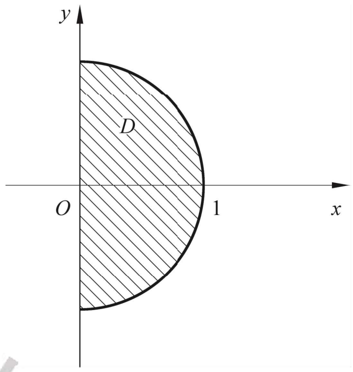

图 1-20

【考点分析】 本题考查二重积分的计算. 由于积分区域 D 关于 x 轴对称，故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分，又积分区域为圆域的一部分，则将其化为极坐标系下二次积分即可.

解　积分区域 D 如图 1-20 所示. D_1 是 D 的在 x 轴上方的部分. 因为区域 D 关于 x 轴对称，函数 $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$是变量 y 的偶函数，函数 $g(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$是变量 y 的奇函数，则

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi\ln 2}{2},$$

$$\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故$\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi\ln 2}{2}.$

【方法点击】 只要见到积分区域具有对称性的二重积分计算问题，就要想到被积函数或其代数和的每一部分是否具有奇偶性，以便简化计算.

【典型错误】 许多考生没有利用对称性简化计算，造成计算过程异常复杂，往往最终积分求错或求不出来.

例 11(2016 年)　已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【考点分析】 本题考查二重积分在极坐标系中的计算及奇、偶函数的积分性质.

解　区域 D 中$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，且 $2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta)$，故

$$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)} r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta[(1+\cos\theta)^3-1^3]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+3\cos^3\theta+3\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{32}{3}+5\pi.$$

【方法点击】 本题是较为简单的二重积分计算问题,涉及下列知识点:

(1) 计算二重积分时,极坐标和直角坐标的关系

$$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta;\end{cases}$$

(2) $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(-x)=-f(x),\\2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(-x)=f(x);\end{cases}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2k(k>0),\\\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n=2k+1(k>0).\end{cases}$

【典型错误】 本题不难,少数考生是由于粗心而导致结果不正确.

例 12(2011 年) 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0,f(x,1)=0$,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【考点分析】 本题考查二重积分在直角坐标系中的计算.

解 由题设条件知积分区域 D 可表示为 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,于是有

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\left[yf'_x(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\left[f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,1)-\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=xf(x,1)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y)$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y)\quad(\text{因为 } f(x,1)=0)$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\left[xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\int_0^1\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x \quad (\text{因为 } f(1,y)=0)$$

$$= \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a.$$

故 $I = \iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a.$

【方法点击】 计算二重积分主要有下面几种方法.

(1) 在直角坐标系中计算二重积分，一般适用于积分区域 D 由直线、抛物线、双曲线所围成的情形，如本题.

(2) 利用对称性来简化二重积分的计算是一种常用的有效方法. 在运用对称性时，必须兼顾被积函数和积分区域两个方面，两者的对称性要相匹配，对称性定理中最常见的两种形式如下：

① 如果 D 关于 x 轴对称，那么

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数}, \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 是偶函数}, \end{cases}$$

其中 $D_1 = \{(x,y) \in D \mid y \geqslant 0\}$.

② 如果 D 关于 y 轴对称，那么

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数}, \\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数}, \end{cases}$$

其中 $D_2 = \{(x,y) \in D \mid x \geqslant 0\}$.

(3) 极坐标适宜描述圆、部分圆、圆环或扇形区域，某些规范图形(如矩形、三角形)有时也可用极坐标描述.

(4) 二重积分化为累次积分的最基本原则是：第一次积分的原函数必须存在(这里指写出初等表达式)，并且为下一次积分做好准备. 一般地，凡遇如下形式的积分：

$$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \int \sin x^2 \mathrm{d}x, \int \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x, \int \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \mathrm{d}x \text{ 或} \int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x,$$

由于其原函数不能用初等函数表示出来，故一定要后积.

而对于二重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，在直角坐标系下，无论先对 x 积分还是先对 y 积分时，原函数均不能由初等函数表示，故 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 必须在极坐标系下化为二次积分.

【典型错误】 就高等数学而言，本题是 2011 年数学一中较难的一道题，有些考生没有做出结果，究其原因是不会根据二元函数的偏导数用积分的方法求二元函数.

例 13(2009 年) 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$，则 $\iiint_\Omega z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ ________.

【考点分析】 本题考查三重积分的计算.

解 解法一 利用球面坐标计算. 在球面坐标系下，

Ω：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant 1$，则

$$\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=2\pi\left(-\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\cos\varphi\right)\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{4}{15}\pi.$$

解法二 利用轮换对称性及球面坐标计算

由于$\iiint_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}v$，所以

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}v&=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega} r^2\,\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{3}\cdot 2\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{1}{5}r^5\Big|_0^1=\frac{4}{15}\pi.\end{aligned}$$

解法三 由于积分区域Ω是球体，被积函数$f(x,y,z)=z^2$只与z有关且为x,y,z的偶函数；垂直于z轴的平面与Ω相交所得截面区域$D(z)$：$x^2+y^2\leqslant 1-z^2$为一圆域，因此可采用以下简单方法计算，即利用“先二后一”法(或称截面法)：

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}v&=\int_{-1}^1\mathrm{d}z\iint_{D(z):x^2+y^2\leqslant 1-z^2} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D(z):x^2+y^2\leqslant 1-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1 z^2\pi(1-z^2)\,\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 z^2(1-z^2)\,\mathrm{d}z\\&=2\pi\left(\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5\right)\Big|_0^1=\frac{4}{15}\pi.\end{aligned}$$

故应填$\frac{4}{15}\pi$.

【方法点击】 三重积分计算是高等数学的一个难点，其一般方法是化三重积分为三次(或累次)积分.

(1) 当积分区域Ω与球体或锥体有关时，经常采用球面坐标；

(2) 当积分区域由抛物面及平面围成时，利用直角坐标最简单；

(3) 当积分区域为柱体或其部分时，常采用柱面坐标；

(4) 若被积函数只含一个变量(如本题只含z)也可采用“先二后一”法计算；

(5) 与定积分类似也可利用被积函数的奇、偶性及积分区域的对称性简化三重积分计算.

【典型错误】 将三重积分正确转化到球面坐标系下来计算是解题的关键. 常见错误是没有正确记住以下关系

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\y=r\sin\varphi\sin\theta,\\z=r\cos\varphi,\end{cases}$$

球面坐标系中三重积分体积元素$\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

例 14(2010 年) 设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，则$\Omega$的形心竖坐标$\bar{z}=$________.

【考点分析】 本题考查三重积分的物理应用及其计算. 根据物体形心坐标的公式直接计算三重积分即可.

解　由题设所求坐标为 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V}$，

其中积分区域 Ω 如图 1-21 所示，用平面 $z=z(0\leqslant z\leqslant 1)$ 截积分区域 Ω 得截面 $D(z)$，且 $D(z)$ 是一圆域：$x^2+y^2\leqslant z$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z\cdot\pi z\,\mathrm{d}z=\pi\int_0^1 z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}z^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}z^2\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},$$

即 $\bar{z}=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{2}{3}$，故应填$\dfrac{2}{3}$.

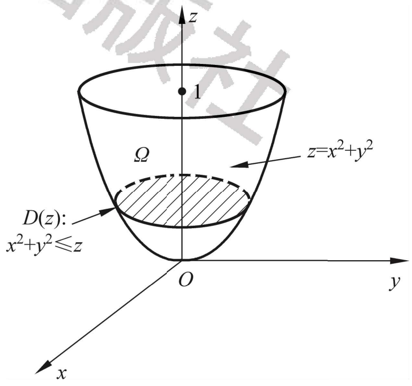

图　1-21

【方法点击】　① 考生在复习时应注意积分的应用(包括几何应用，物理应用)；

② 三重积分计算是高等数学的难点之一，其一般方法是将三重积分化为三次(或累次)积分，根据积分区域的形状及被积函数的特点可采用柱面坐标或球面坐标或直角坐标. 若被积函数只含一个变量$\left(\text{如本题中三重积分}\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V\text{ 只含 }z\right)$且该变量对应的平面(在本题解法中，平面是 $z=z$)与积分区域Ω的截面(如$D(z)$)是直接可求面积的(在本题中 $D(z)$ 的面积为 πz)，此时用"先二后一"法计算三重积分比较简便.

【典型错误】　本题有的考生因没有记住形心坐标的计算公式而失分；更多的考生是由于不会计算三重积分而丢分.

例 15(2015 年)　设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________.

【考点分析】　本题考查三重积分的计算. 在直角坐标系中将三重积分化为三次积分进行计算便可得结果.

解　**解法一**　利用轮换对称性知：$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y=3\int_0^1(x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$=3\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{4}.$$

解法二　直接计算.

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+2y+3z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(\frac{3}{2}-2x+\frac{1}{2}x^2-y-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(\frac{5}{6}-2x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{5}{6}x-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{1}{12}x^4\right)\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{4}.$$

故应填$\frac{1}{4}$.

【方法点击】 三重积分的计算是高等数学的难点之一，也是基本题；一般是根据积分区域的形状和被积函数的特点，采用直角坐标或柱面坐标或球面坐标，无论采用哪种坐标计算都是将三重积分化为三次(或累次)积分. 本题解法一比较简便，但要求考生能由被积函数的特性及积分区域的形状，熟练运用三重积分的轮换对称性. 大多数考生是利用解法二，但该方法计算量较大.

【典型错误】 计算三重积分时，有的考生在将三重积分化为累次积分时积分限出现错误，导致结果不正确.

例 16(2003 年) 设函数 $f(x)$连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t}f(x^2)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性.

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

【考点分析】 本题考查重积分的计算及变上限定积分求导. 在第(1)题中应先分别在球面坐标下计算分子的三重积分和在极坐标下计算分母的二重积分，再根据 $F'(t)$的符号确定单调性. 对于第(2)问应将待证的不等式恒等变形后构造辅助函数，再利用单调性进行证明.

(1) **解** 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r},$$

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2},$$

所以在$(0,+\infty)$上 $F'(t)>0$，故 $F(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加.

(2) **证明一** 因为

$$G(t)=\frac{2\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r},$$

要证明 $t>0$ 时 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，只需证明 $t>0$ 时，$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$，即证

$$\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0.$$

令
$$g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2,$$

则
$$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\mathrm{d}r>0,$$

故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 因为 $g(t)$ 在 $t=0$ 处连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)=0$，因此，当 $t>0$ 时，

$$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t).$$

证明二 同证明一，只需证明 $\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0$，

$$\begin{aligned}\Delta&=\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2\\&=\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(u^2)\mathrm{d}u-\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(u^2)\cdot u\mathrm{d}u\\&=\iint_D f(r^2)\cdot r^2\cdot f(u^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}u-\iint_D f(r^2)f(u^2)\cdot ru\mathrm{d}r\mathrm{d}u\\&=\iint_D rf(r^2)f(u^2)(r-u)\mathrm{d}r\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中 $D=\{(r,u)\,|\,0\leqslant r\leqslant t,0\leqslant u\leqslant t\}$，由轮换对称性得

$$\Delta=\iint_D uf(u^2)f(r^2)(u-r)\mathrm{d}r\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\iint_D f(r^2)f(u^2)(r-u)^2\mathrm{d}r\mathrm{d}u,$$

由于 $f(r^2)>0,f(u^2)>0,(r-u)^2>0$，故 $\Delta>0$，即 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

【方法点击】 本题是一道微积分的综合题，涉及的知识点有在球面坐标系下三重积分的计算，在极坐标系下二重积分计算，对称区间上偶函数积分的性质，变上限定积分函数及函数的单调性等.

从答题情况看，考生综合运用所学知识的能力较弱，希望大家今后加强训练.

【典型错误】 (1) 不会用球面坐标与极坐标化简 $F(t)$ 与 $G(t)$，或者化错，当然无法做下去；

(2) 变上限积分求导计算错或者最后化不到上面所写的 $F'(t)$ 的分子形状；

(3) 不去讨论 $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)$ 的分子，而令

$$g(t)=F(t)-\frac{2}{\pi}G(t),$$

试图求 $g'(t)$，用单调性讨论 $g(t)>0$，这是做不到的. 因为不但求 $g'(t)$ 麻烦，并且讨论 $\lim\limits_{t\to0^+}g(t)$

也麻烦.这种取分子讨论的技巧应留意.

例 17(2013 年) 设 $L_1: x^2+y^2=1, L_2: x^2+y^2=2, L_3: x^2+2y^2=2, L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线.记

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\,(i=1,2,3,4),$$

则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=($ $)$.

(A) I_1 (B) I_2 (C) I_3 (D) I_4

【考点分析】 本题考查平面第二类曲线积分的计算.利用格林公式逐一计算其值并比较大小即可.

解 记 $P=y+\dfrac{y^3}{6}, Q=2x-\dfrac{x^3}{3}$,则$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2-x^2-1-\dfrac{y^2}{2}=1-\left(x^2+\dfrac{y^2}{2}\right)$,用 D_i 表示 L_i 所围区域,则有

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=\iint_{D_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_i}\left[1-\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而得 $I_1=\dfrac{5}{8}\pi, I_2=\dfrac{1}{2}\pi, I_3=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}, I_4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi, I_4>I_1>I_3>I_2$.

故应选(D).

【方法点击】 研究生入学考试中对平面第二类曲线积分的考查通常有两种情形:参数法和格林公式法,而格林公式的应用必须满足以下几个条件:

(1) 平面有界闭区域 D 由分段光滑闭曲线 L 围成;

(2) $P(x,y), Q(x,y)$在 D 上连续且有一阶连续偏导数;

(3) L 取正向.

【典型错误】 本题不难,但有的考生因为没有记住格林公式而导致出错.

例 18(2012 年) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$,则$\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=$ ________.

【考点分析】 本题考查对面积的曲面积分的计算.将第一类曲面积分化为二重积分计算即可.

解 Σ 的方程为 $z=1-x-y$,Σ 在 xOy 平面上的投影区域为

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}.$$

面积元素为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,所以

$$\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}s=\iint_{D_{xy}}y^2\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^2\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

故应填$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

【方法点击】 若曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y)$,则

$$\iint_{\Sigma}M(x,y)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}M(x,y)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_{xy} 为 Σ 在 xOy 平面上的投影区域.

【典型错误】 本题的出错点主要在于方程 Σ 在 xOy 平面上的投影区域写错.

例 19(2010 年) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|$,$x\in[-1,1]$,起点是$(-1,0)$,终点是$(1,0)$,则曲线积分$\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=$ ________.

【考点分析】 本题考查对坐标的曲线积分的性质及其计算.

该题对坐标的平面曲线积分有两种计算方法:一是利用格林公式将曲线积分转化为二重积分;二是参数法,即将平面曲线方程用参数方程表示,再将曲线积分转化为定积分进行计算.

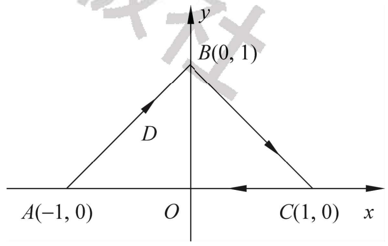

图 1-22

解 解法一 利用格林公式. 如图 1-22 所示,由题设条件知

$$L=\overline{AB}+\overline{BC}.$$

记 $L_1=\overline{CA}$,则 $L+L_1$ 为闭曲线且所围区域记为 D,

此时,$P(x,y)=xy$,$Q(x,y)=x^2$,且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$,$\dfrac{\partial P}{\partial y}=x$. 由格林公式知

$$\oint_{-(L+L_1)} xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\text{(由对称性)},$$

则

$$\begin{aligned}\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y&=-\int_{-L}xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y\\&=-\oint_{-(L+L_1)}xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y+\int_{-L_1}xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-L_1}xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}(x\cdot 0+x^2\cdot 0)\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

故应填 0.

解法二 参数法 如图 1-22 所示 $L=\overline{AB}+\overline{BC}$.

线段$\overline{AB}$的方程:$y=1-|x|=1+x$,起点对应参数 $x=-1$;终点对应参数 $x=0$;

线段$\overline{BC}$的方程:$y=1-|x|=1-x$,起点对应参数 $x=0$;终点对应参数 $x=1$.

于是
$$\begin{aligned}\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y&=\int_{\overline{AB}}xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y+\int_{\overline{BC}}xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{0}[x(1+x)+x^2]\,\mathrm{d}x+\int_0^1[x(1-x)+x^2\cdot(-1)]\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=0.\end{aligned}$$

故应填 0.

【方法点击】 (1) 用格林公式$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 将对坐标的曲线积分转化为二重积分时,应注意公式成立的条件;特别要记住闭区域 D 的边界线 L 取的是正向.

(2) 用参数法将对坐标的曲线积分转化为定积分时,其积分下限是积分路径起点对应

的参数值，积分上限是终点对应的参数值，且下限未必小于上限.

【典型错误】 本题的典型错误是在解法一中利用格林公式时，二重积分符号前漏掉负号，其原因是没有记住格林公式成立的条件.

例 20（2009 年） 已知曲线 L：$y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，则$\int_L x\,\mathrm{d}s=$ ________.

【考点分析】 本题考查平面上对弧长的曲线积分的计算. 直接将第一类曲线积分化为定积分计算便可得结果.

解 因为 L 的方程为 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，所以 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$，由公式得$\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{12}(27-1)=\frac{13}{6}$.

故应填$\frac{13}{6}$.

【方法点击】 对弧长的平面曲线积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$的计算方法是将其化为定积分；由于其积分值与曲线 L 的方向无关，因此化为定积分时，定积分的下限小、上限大. 另外还应注意 $\mathrm{d}s$ 的几种形式：

① L：$y=f(x)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$；

② L：$x=g(y)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[g'(y)]^2}\mathrm{d}y$；

③ L：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$；

④ L：$r=r(\theta)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$.

【典型错误】（1）少数考生没有记住弧微分 $\mathrm{d}s$ 的表达式.

（2）有的学生将曲线积分$\int_L x\,\mathrm{d}s$ 化为定积分$\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$ 后计算出现错误.

例 21（2008 年） 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则$\iint_\Sigma xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

________.

【考点分析】 本题考查对坐标的曲面积分的计算. 由于积分曲面 Σ 不是封闭曲面，应先将其补为封闭曲面，再利用高斯公式即可.

解 添加辅助面 Σ_1：$z=0$，$x^2+y^2\leqslant 4$，法向量朝下. 由 Σ_1 与 Σ 围成的区域记为 Ω，边界取外法向，记 Σ_1 在 xOy 平面上的区域为 D：$x^2+y^2\leqslant 4$.

$$
\begin{aligned}
&\iint_\Sigma xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial y}(x)+\frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right]\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=0+\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2 r\mathrm{d}r=4\pi.
\end{aligned}
$$

故应填 4π.

【方法点击】 本题中重积分的计算尽量利用对称性. 比如, $\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ 是因为被积函数关于 y 是奇函数, Ω 关于 zOx 面对称.

需要注意的是,利用高斯公式解决第二类曲面积分时,必须保证曲面的封闭,本题先增加辅助平面使之封闭,然后将辅助面上的积分减去,即可得到所需的积分.

【典型错误】 许多考生运用高斯公式时忽略了封闭曲面的外侧方向,辅助面的方向出错. 还有部分考生在计算辅助面上的曲面积分时,符号出错.

例 22(2007 年) 设曲面 Σ: $|x|+|y|+|z|=1$, 则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$ ________.

【考点分析】 本题考查对面积的曲面积分的计算,属基本题型. 直接利用公式计算比较烦琐,利用对称性可简化计算.

解 由积分区域与被积函数的对称性有

$$\oiint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=0,\ \oiint\limits_{\Sigma}|x|\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|y|\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\Sigma}|z|\,\mathrm{d}S,$$

所以 $\oiint\limits_{\Sigma}|y|\,\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$. 故

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

故应填 $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

【方法点击】 对面积的曲面积分在计算时,首先应考虑能否利用积分区域的对称性及被积函数的奇偶性来简化计算.

【典型错误】 个别考生没有利用对称性,因为该曲面分块时较为琐碎,造成计算量加大,稍有粗心大意便会求出错误结果.

例 23(2006 年) 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【考点分析】 本题考查对坐标的曲面积分的计算. 若利用高斯公式则由于本题 Σ 不是封闭曲面,首先想到加一曲面 Σ_1: $\begin{cases}z=1,\\x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$ 取上侧,使 $\Sigma+\Sigma_1$ 构成封闭曲面,然后利用高斯公式转化为三重积分,再用柱面(或球面)坐标进行计算即可.

解 设 Σ_1: $z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$, 取上侧, 则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}6\mathrm{d}v=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1\mathrm{d}z=2\pi.$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 所以

$$\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$$

故应填 2π.

【方法点击】 本题属基本题型，在计算三重积分时不论是用球面坐标还是用柱面坐标进行计算，均应特别注意计算的准确性，主要考查基本的计算能力. 利用高斯公式计算第二类曲面积分是考研数学热门题型.

【典型错误】 该题型常见错误：①运用高斯公式时忽略曲面的方向；②部分考生将曲面积分化为二重积分计算，因曲面分块较多造成计算量较大，导致出错.

例 24(2005 年) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【考点分析】 本题考查对坐标的曲面积分的计算. 利用高斯公式即可.

解 因为 Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，由高斯公式得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\\&=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v\xlongequal{\text{用球面坐标}}3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=(2-\sqrt{2})\pi R^3.\end{aligned}$$

故应填 $(2-\sqrt{2})\pi R^3$.

【方法点击】 本题是一道简单的综合题，考查的知识点有高斯公式、三重积分在球面坐标系中的计算.

【典型错误】 对于该题有些考生不能正确写出空间区域 Ω 的球面坐标表示，也有的考生是由于没有记住三重积分在球面坐标系下的计算公式，从而导致失分.

例 25(2007 年) 设曲线 L：$f(x,y)=1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是(　　).

(A) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x$

(B) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}s$

(D) $\int_{\Gamma} f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$

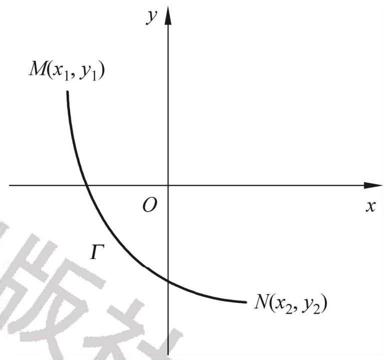

图 1-23

【考点分析】 本题考查对弧长的曲线积分和对坐标的曲线积分的计算.

解 设 M,N 点的坐标分别为 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则由题设可知 $x_1<x_2$，$y_1>y_2$(如图 1-23).

因为

$$\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{\Gamma}\mathrm{d}x=x_2-x_1>0;\qquad \int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\Gamma}\mathrm{d}y=y_2-y_1<0;$$

$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\Gamma \mathrm{d}s=\Gamma$ 的弧长 >0；

$\int_\Gamma f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y=\int_\Gamma 0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y=0.$

故应选(B).

【方法点击】 本题是线积分的基本题，根据线积分的概念及其计算方法便可得到结果，大多数考生都能得出正确结论.

【典型错误】 少数考生在求对坐标的曲线积分时没有考虑曲线弧的方向.

例 26(2004 年) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为________.

【考点分析】 本题考查第二类曲线积分的计算. 可将曲线用参数方程表示，相应的曲线积分可化为定积分进行计算，也可以利用格林公式.

解　解法一 正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，可表示为

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}\quad \theta:0\to\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

解法二 添加曲线 L_1：从点 $(0,0)$ 到点 $(\sqrt{2},0)$ 的直线段，L_2 从点 $(0,\sqrt{2})$ 到点 $(0,0)$ 的直线段，使 $L+L_1+L_2$ 形成一条封闭曲线. 则

$$\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\int_{L+L_1+L_2}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x-\int_{L_1}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x-\int_{L_2}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x.$$

由格林公式得

$$\int_{L+L_1+L_2}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\iint_D 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2},$$

其中 D 是由 L,L_1,L_2 围成的区域.

又在 L_1 上，$y=0,\mathrm{d}y=0$，则 $\int_{L_1}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=0$；在 L_2 上：$x=0,\mathrm{d}x=0$，则 $\int_{L_2}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=0$.

所以 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{2}$. 故应填 $\frac{3}{2}\pi$.

【方法点击】 计算第二类曲线积分常用的方法有：

(1) 参数化法. 将曲线用参数方程表示. 要注意曲线的方向确定了积分的上下限.

(2) 利用格林公式求解. 要注意格林公式的使用前提是曲线封闭，如果曲线不封闭可以添加曲线使之封闭.

【典型错误】 本题出错的地方是将曲线方程化为参数方程用定积分计算时，积分上下限的确定出错. 正确作法是上限对应于始点参数，下限对应于终点参数，始点和终点的确定依赖于曲线的方向.

例 27（2014 年）　设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$ ________.

【考点分析】　本题考查对坐标的曲线积分的计算. 先用斯托克斯公式将曲线积分化为曲面积分，再将曲面积分化成二重积分进行计算.

解　由斯托克斯公式

$$\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & y\end{vmatrix}=\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,$$

其中 Σ：$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1,\\ y+z=0,\end{cases}$ 取上侧，$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

故应填 π.

【方法点击】　计算空间闭曲线上的第二类曲线积分常用方法：

（1）利用斯托克斯公式.

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

要注意公式成立的条件.

（2）利用曲线参数方程将第二类曲线积分化成定积分.

本题中 L：$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\quad t:0\longrightarrow 2\pi,\\ z=-\sin t,\end{cases}$ 则

$$\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}[-\sin t(-\sin t)+\sin t(-\cos t)]\mathrm{d}t=\pi.$$

【典型错误】　有的考生填 $-\pi$，错误的原因是将闭曲线 L 的正向与 L 所围曲面 Σ 的侧搞错了，事实上两者应符合右手规则.

例 28（2016 年）　设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

【考点分析】　本题考查由偏导数求多元函数的方法及一元函数最值的求法. 先根据偏导数及初值求解出二元函数，再求另一个偏导数，或直接利用全微分的结论去求曲线积分，最后利用最值的判定方法求解函数的最小值.

解　因为 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，所以

$$f(x,y)=\int(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{2x-y}+c(y).$$

将 $f(0,y)=y+1$ 代入，得 $c(y)=y+1$，所以 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$. 从而

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=f(1,t)-f(0,0)=\mathrm{e}^{2-t}+t.$$

$I'(t)=-\mathrm{e}^{2-t}+1$，令 $I'(t)=0$，得 $t=2$.

当 $t<2$ 时，$I'(t)<0$，$I(t)$ 单调减少；当 $t>2$ 时，$I'(t)>0$，$I(t)$ 单调增加，所以 $I(2)=3$ 是 $I(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值.

【方法点击】 本题是一道综合题，考查了已知偏导数求原函数，被积表达式为全微分时的曲线积分和一元函数最值三个知识点. 题目运算量较大，需要仔细、耐心，但都是基础知识点，因此难度不大. 涉及下列知识点：

(1) $f(x,y)=\int\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+c(y)$；

(2) $\int_L\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=\int_L\mathrm{d}f=f\,|_{终点}-f\,|_{起点}$；

(3) 极值的第二充分条件：若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 为极小值.

【典型错误】 本题出错点主要是：

(1) 由二元函数的偏导数 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 求函数 $f(x,y)$ 时没有加上一元函数 $c(y)$；

(2) 由全微分 $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 不知道利用曲线积分求函数 $f(x,y)$；

(3) 不会求一元函数 $I(t)$ 的最小值.

例 29(2005 年) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有

$$\oint_C\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0；$$

(Ⅱ) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

【考点分析】 本题考查曲线积分与路径无关的条件及一阶微分方程的解法.

解 (Ⅰ) 在右半平面 $x>0$ 上任取两点 A,B，以 A 为始点 B 为终点作任意光滑曲线 L_1,L_2. 再以 B 为始点，A 为终点作围绕原点的光滑曲线 L_3(如图 1-24). 由题设知

$$\oint_{L_1+L_3}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\oint_{L_2+L_3}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

所以 $\int_{L_1}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\int_{L_2}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$，

故 $\int_C\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$.

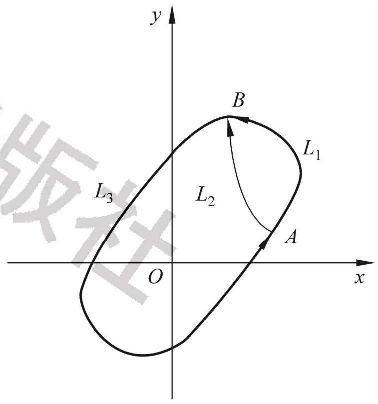

图 1-24

(Ⅱ) 因为对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有

$$\int_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0,$$

所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则得$\frac{2y^5-4x^2y}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4y^3\varphi(y)}{(2x^2+y^4)^2}$，所以

$$2y^5-4x^2y=2\varphi'(y)x^2+y^4\varphi'(y)-4y^3\varphi(y),$$

比较两边 x^2 及 x^0(即只含 y 的项)前的系数，得

$$\begin{cases}\varphi'(y)=-2y,\\ 2y^2=y\varphi'(y)-4\varphi(y).\end{cases}$$

由第一式解得 $\varphi(y)=-y^2+C$. 代入第二式，解得 $C=0$，所以 $\varphi(y)=-y^2$.

【方法点击】 本题是一道综合题，涉及的知识点有第二类曲线积分的性质，线积分与路径无关的充要条件，二元函数的求导法及简单微分方程的解法，主要是考查灵活运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

【典型错误】 (1) 许多考生第(Ⅰ)问的证明为：因为在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分$\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数，所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，从而

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\iint_{D_C}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

这显然用错了结论.

(2) 许多考生第(Ⅱ)问的错误主要体现在不能正确地求出$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}$，从而得不到正确的方程，计算能力不过关是考生试卷中反映出来的一个普遍问题，无论是数值计算还是文字运算，考生试卷中都出现了一些本不应该发生的错误.

例 30(2006 年) 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$内，函数 $f(x,y)$具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

【考点分析】 本题是一道将平面上对坐标的曲线积分和二元函数偏导数相结合的证明题，涉及的知识点有平面上对坐标曲线积分与路径无关的条件，齐次函数的性质及微分法. 由齐次函数的特点，在方程两端对 t 求导，并令 $t=1$，或令 $t=\frac{1}{y}$代入所给等式后再分别对 x,y 求偏导，即得曲线积分与路径无关的条件.

证明 证法一 由格林公式知，对 D 内的任意有向简单闭曲线 L，$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的充分必要条件是：对任意$(x,y)\in D$，有

$$0=\frac{\partial}{\partial y}(yf(x,y))+\frac{\partial}{\partial x}(xf(x,y))=2f(x,y)+yf'_2(x,y)+xf'_1(x,y).$$

由于对任意的$(x,y)\in D$ 及 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 两边对 t 求导，得

$$xf'_1(tx,ty)+yf'_2(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y).$$

令 $t=1$，得

$$2f(x,y)+xf'_1(x,y)+yf'_2(x,y)=0,\quad 即\frac{\partial}{\partial y}(yf(x,y))+\frac{\partial}{\partial x}(xf(x,y))=0,$$

所以
$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

证法二 同证法一 首先需证明的充分条件为

$$2f(x,y)+yf_y(x,y)+xf_x(x,y)=0.$$

在 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 中令 $t=\dfrac{1}{y}$，得

$$f\left(\frac{x}{y},1\right)=y^2f(x,y),即\ f(x,y)=y^{-2}f\left(\frac{x}{y},1\right).$$

上式分别对 x,y 求偏导，得

$$f_x(x,y)=y^{-2}f'_1\left(\frac{x}{y},1\right)\cdot\frac{1}{y}=y^{-3}f'_1\left(\frac{x}{y},1\right),$$

$$f_y(x,y)=-2y^{-3}f\left(\frac{x}{y},1\right)-xy^{-4}f'_1\left(\frac{x}{y},1\right),$$

故
$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=-2y^{-2}f\left(\frac{x}{y},1\right),$$

即
$$2f(x,y)+xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0.$$

【方法点击】 因为被积函数为抽象函数，故本题的证明有一定难度，固定方法是：利用题目的已知条件（$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$）推出积分与路径无关的条件 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

【典型错误】 (1) 一部分考生对齐次函数比较陌生，不理解"对任意 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$"意味着这是 t 的恒等式，因而两端对 x 求导.

(2) 知道对两端求偏导数，但偏导数符号混淆，分不清是对哪一个变量求导.

(3) 求偏导数后不知道令 $t=1$.

总之考生对证明题有畏难情绪，反映学习中基础不扎实.

例 31（2008 年） 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

【考点分析】 本题考查第二类曲线积分的计算. 可利用曲线积分的基本公式，将路径表达式代入化成定积分进行计算，也可以利用格林公式进行计算.

解 **解法一**

$$\begin{aligned}\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y&=\int_0^\pi \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)\sin x\cos x\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi \sin 2x\mathrm{d}x+\int_0^\pi x^2\sin 2x\mathrm{d}x-\int_0^\pi \sin 2x\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi x^2\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}\cos 2x\\&=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi 2x\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

解法二（利用格林公式） 在格林公式 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中，要保证 L 的封闭与方向，故本题需要先增加辅助线使之封闭，取 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,0)$ 的

一段，D 是由 L 与 L_1 围成的区域.

$$\begin{aligned}&\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y\\&=\int_{L+L_1}\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y-\int_{L_1}\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y\\&=\iint_D 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\pi^0\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

【方法点击】 对于第二类曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的求解可以从以下角度考虑：

(1) 代入路径表达式化为定积分，要注意积分上、下限与曲线方向有关.

(2) 利用格林公式计算，这是一个非常重要的方法. 要注意格林公式使用的前提是曲线封闭.

① 若曲线封闭，直接用格林公式把曲线积分化为易于计算的二重积分.

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

② 若曲线不封闭，则需添加辅助线 L_1 使之构成封闭曲线，然后再用格林公式，把曲线积分转化为易求的二重积分及辅助线上的曲线积分(解法二).

$$\begin{aligned}\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_{L+L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

③ 若区域内有奇点，则采用挖洞法(去奇点法)，作一条环绕该奇点的特殊定向闭曲线 C，在 L 与 C 所围的区域内使用格林公式.

注意，在②、③情形下，添加的辅助线或环绕奇点的闭曲线的选取应有利于计算.

【典型错误】 本题的错误主要是：

(1) 直接将第二类曲线积分化为定积分时上、下限定错，显然是没有注意曲线弧的方向.

(2) 本题的积分路径不是封闭曲线就直接利用格林公式，这是因为没有记住该公式成立的条件.

例 32(2003 年) 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界. 试证：

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

【考点分析】 本题考查的知识点包括第二类曲线积分的计算法、格林公式、二重积分性质以及轮换对称性等. 本题可利用第二类曲线积分计算法将曲线积分化为定积分进行比较证明，也可以用格林公式将曲线积分化为二重积分利用轮换对称性证明. 但无论何种证法，在(2)的证明中均用到不等式 $\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}\geqslant 2$.

证明 证法一 (1) 左边 $=\int_0^\pi\pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0\pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$，

右边 $=\int_0^\pi\pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0\pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$，

所以 $$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

(2) 由于 $\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x} \geqslant 2$，故由(1)得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^2.$$

证法二 (1)根据格林公式，得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D(\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

$$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

因为 D 关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma = \iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

故 $$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

(2) 由(1)知

$$\begin{aligned}\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x &= \iint_D(\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_D(\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint_D 2\mathrm{d}\sigma = 2\pi^2.\end{aligned}$$

【方法点击】 本题两种方法中的定积分与二重积分是很难直接求出的，因此期望通过计算结果去证明结论是困难的. 另外，题目由两部分构成时，第一部分往往起桥梁作用.

【典型错误】 (1) 写成 $\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}\sigma\iint_D \mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}\sigma$.

(2) 写成 $\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma \geqslant 2\iint_D \sqrt{\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{e}^{-\sin x}}\mathrm{d}\sigma \geqslant 2\pi^2$，真是乱来一通.

(3) 写成"因为 $\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x} = \mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin y}$，所以

$$\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin y})\mathrm{d}y,"$$

其实，后一式子是对的，而前一式子是不正确的.

(4) 与(3)类似，写成

$$\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x} = \mathrm{e}^{-\sin x} + \mathrm{e}^{\sin y},$$

这也是不正确的.

由以上(2)，(3)，(4)可见，考生都想去证某一等式，但是不知用轮换对称性，甚至不知道去用"定积分的值与积分变量无关"这一简单结论.

例 33(2015 年) 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分 $I = \int_L (y+z)\mathrm{d}x + (z^2-x^2+y)\mathrm{d}y + x^2y^2\mathrm{d}z$.

【考点分析】 本题考查第二类曲线积分的计算及斯托克斯公式的应用. 可采用两种方法计算曲线积分：一种方法是直接将曲线积分化为定积分；另一种方法是利用斯托克斯公

式将曲线积分转化为曲面积分进行计算.

解　解法一（参数法）　由 L 的方程$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$知若以 θ 为参数，则 L 的方程可表示为

$$L:\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \quad \theta \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } -\frac{\pi}{2}, \\ z=\cos\theta, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+(x^2y^2)\mathrm{d}z \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} [-(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\cdot\sin\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta-2\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{2}\sin^2\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta+2\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta]\mathrm{d}\theta \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta+0=2\sqrt{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \end{aligned}$$

解法二　设 L_1 是从点 B 到点 A 的直线段，Σ 为平面 $z=x$ 上由 L 与 L_1 围成的半圆面取下侧，其法向量的方向余弦为$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 由斯托克斯公式，有

$$\begin{aligned} &\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z \\ &= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z^2-x^2+y & x^2y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma(2x^2y+1)\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

由于曲面 Σ 关于 xOz 平面对称，被积函数关于 y 为奇函数，所以$\iint\limits_\Sigma 2x^2y\mathrm{d}S=0$，即

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

又 L_1 的参数方程为 $x=0,y=y,z=0$（y 从$-\sqrt{2}$到$\sqrt{2}$），所以

$$\int_{L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}y\mathrm{d}y=0,$$

故 $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-0=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

【方法点击】　计算空间第二类曲线积分常用的方法是：

(1) 参数法. 首先要写出积分路径的参数表达式，特别要注意的是参数的起点对应曲线的起点，将对坐标的曲线积分化为定积分时，定积分的下限对应参数的起点，上限对应参数的终点，下限不一定小于上限，因为对坐标的曲线积分与曲线的方向有关. 如果曲线

方程是用直角坐标(或极坐标)表示时,可先将其化为参数方程然后再计算. 如本题中解法一.

(2) 利用斯托克斯公式. 斯托克斯公式建立了曲面积分与以此曲面的边界为曲线的对坐标的曲线积分之间的联系. 利用该公式关键是根据给出的空间曲线适当地选取以此曲线为边界的曲面,以达到使计算简单的目的. 大多数情况下可选取空间的平面的一部分,如本题解法二中的 Σ. 另外,在利用斯托克斯公式时应注意公式成立的条件,当条件不满足时,不能直接利用公式,而应创造条件使其满足公式的要求后再利用公式.

【典型错误】 (1) 一些考生对空间第二类曲线积分采用参数法做题时,参数方程写不正确.

(2) 将曲线积分化为定积分时上、下限定错.

(3) 对非封闭空间曲线上的积分直接利用斯托克斯公式.

(4) 计算错误.

例 34(2007 年) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

【考点分析】 本题考查第二类曲面积分的计算,属重点题型,其中积分曲面 Σ 不是封闭曲面,若直接将曲面积分化为二重积分进行计算则较烦琐;可作辅助面 Σ_1:$\begin{cases}z=0,\\ x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1,\end{cases}$ 取下侧,使 $\Sigma+\Sigma_1$ 构成封闭曲面,然后利用高斯公式将其转化为三重积分进行计算.

解 取 Σ_1 为 xOy 平面上被椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 所围部分的下侧,记 Ω 为由 Σ 和 Σ_1 围成的空间闭区域. 根据高斯公式

$$I_1=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(z+2z+0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 3z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 6\pi z(1-z)\,\mathrm{d}z=\pi.$$

又 $$I_2=\iint\limits_{\Sigma_1} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

所以 $I=I_1-I_2=\pi$.

【方法点击】 本题主要是应用高斯公式来简化计算,在运用高斯公式时应注意以下情况:

(1) 若曲面封闭,直接用高斯公式把曲面积分化为三重积分计算.

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v.$$

(2) 若曲面不封闭,需要引入辅助曲面 Σ_1,使 $\Sigma+\Sigma_1$ 成为封闭曲面,进而采用高斯公式. 注意辅助曲面 Σ_1 的选取应尽量简单,易于计算.

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 若曲面内存在使 P,Q,R 无定义的点(奇点),则应采用挖洞法,作一个包含该奇点的曲面 Σ_ε 位于 Ω 内,在 Σ 与 Σ_ε 所围的区域 Ω_1 上应用高斯公式.曲面 Σ_ε 的选取也应尽量简单,利于计算.

【典型错误】 高斯公式的运用是考试中出错率较高的题型,常见错误:一是忽略了曲面的封闭性,没有添加辅助面;二是忽略了高斯公式的应用条件之一是 Σ 的取向为闭曲面的外侧,导致辅助面的所取侧向错误.

例 35(2016 年) 设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成,Σ 为 Ω 整个表面的外侧,计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【考点分析】 本题考查第二类曲面积分的计算,直接利用高斯公式即可.

解 因为被积函数和积分区域满足高斯公式的条件,所以利用高斯公式运算.

由高斯公式,得 $I=\iiint_{\Omega}(2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\Omega$:$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant 2(1-x),\\ 0\leqslant z\leqslant 1-x-\dfrac{y}{2},\end{cases}$

因为

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}\mathrm{d}z\\&=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\left(1-x-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

所以,原积分 $I=2\times\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

【方法点击】 只要第二类曲面积分满足高斯公式的条件,就可以使用高斯公式将曲面积分转化为三重积分.高斯定理如下:

若 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在封闭曲面 Σ 及其围成的空间立体 Ω 上具有连续的一阶偏导数,且取 Σ 的外侧,则

$$\oiint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

计算三重积分时，可选择直角坐标、柱面坐标、球面坐标，本题空间区域是锥体，采用直角坐标计算.

【典型错误】 (1) 利用高斯公式将曲面积分转化为三重积分后，在将三重积分化为累次积分时上、下限出错.

(2) 计算错误比比皆是.

例 36(2014 年) 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【考点分析】 本题考查对坐标的曲面积分. 可先增加辅助面转化成闭曲面上的第二类曲面积分，再利用高斯公式将曲面积分化为三重积分计算.

解 设 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=1\end{cases}$ 所围部分的下侧，Σ_1 与 Σ 所围成的空间区域记为 Ω，则

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

由于

$$\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\iiint_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\text{(利用对称性)}$$

所以 $I=-\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 又因为

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(3r^2+7)r\,\mathrm{d}z\\ &=2\pi\int_0^1 r(1-r^2)(3r^2+7)\,\mathrm{d}r\\ &=4\pi,\end{aligned}$$

于是 $I=-4\pi$.

【方法点击】 本题可以利用直接法将曲面积分转化成二重积分计算，但是相对而言，用高斯公式更加简便.

【典型错误】 常见错误为忽略了高斯公式的使用条件，例如：忘记加辅助面变封闭曲面；搞错曲面的方向，导致结果的符号不正确.

例 37(2009 年) 计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}\dfrac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

【考点分析】 本题考查闭曲面内有奇点的曲面积分的计算，其中，

$$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$，则 $P=\frac{x}{r^3},Q=\frac{y}{r^3},R=\frac{z}{r^3}$，且当 $r\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{r^5},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5}.$$

本题若直接化曲面积分为二重积分计算较复杂，而由 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$，想到利用高斯公式计算，而椭球面 $\Sigma\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2=1\right)$ 围成的区域记为 Ω，Ω 含有原点 $(0,0,0)$，而 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial R}{\partial z}$ 在原点无定义，因而不能在 Ω 上直接利用高斯公式，我们采用挖点的方法将奇点（即原点）挖去后再利用高斯公式.

解 作以原点为心，以 $\varepsilon>0$ 为半径的小球面 Σ_ε（取 $\varepsilon>0$ 充分小，使 Σ_ε 在椭球面 Σ：$2x^2+2y^2+z^2=4$ 之内），由曲面 Σ_ε 与 Σ 所围的区域记为 Ω_1，小球面 Σ_ε 围成的球体记为 Ω_ε，则

$$\begin{aligned}I&=\oiint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma-\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&\quad+\oiint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 在 Ω_1 上连续，且 $\Sigma-\Sigma_\varepsilon$ 取外侧，根据高斯公式有

$$\oiint_{\Sigma-\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_{\Omega_1}0\mathrm{d}v=0.$$

又

$$\oiint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega_\varepsilon}3\mathrm{d}v=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi,$$

故 $I=0+4\pi=4\pi$.

【方法点击】 读者应注意使用高斯公式的条件：①封闭曲面取外侧；②被积函数 P,Q,R 及其一阶偏导数在封闭曲面所围闭区域上连续.

若积分曲面不是封闭曲面，则应添加曲面（为使得所添加曲面上的积分易于计算，常常用与坐标面平行的平面作为添加面）使其与积分曲面能围成空间区域 Ω，然后再利用高斯公式；若被积函数或其一阶偏导数在闭曲面所围区域 Ω 内有奇点，则可用一小球面将奇点挖去后再使用高斯公式，如本题.

【典型错误】 本题的常见错误是没有意识到 $(0,0,0)$ 为奇点，而直接在曲面 Σ 上应用高斯公式，得到 $I=\oiint_{\Sigma}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

例 38（2010 年） 设 P 为椭球面 S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

【考点分析】 本题考查偏导数的几何应用；隐函数求偏导；对面积的曲面积分的计算. 该题是一道综合题：首先求出动点 C 的轨迹方程；再由题设条件将被积函数中的绝对值符

号去掉，并根据对面积的曲面积分的计算方法将被积表达式进行化简，最后计算二重积分.

解 ① 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，则 $F(x,y,z)=0$ 为椭球面 S 的方程. 设点 P 的坐标为 (x,y,z)，由题设条件知曲面 S 在点 P 处的切平面法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y-z,2z-y).$$

又 xOy 平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，由于点 P 处的切平面垂直于 xOy 平面，于是 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，即 $y=2z$.

又因为点 P 在曲面 S 上，所以点 P 的坐标 (x,y,z) 满足曲面 S 的方程：$x^2+y^2+z^2-yz=1$，从而知动点 P 的轨迹 C 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ y=2z.\end{cases}$$

② 根据题设条件知，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$ 中积分曲面 Σ 是椭球面 S 位于平面 $y=2z$ 上方的部分，因此在 Σ 上，$y\leqslant 2z$，于是 $|y-2z|=2z-y$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S.$$

在曲面 Σ 的方程 $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 两端分别对 x,y 求偏导数(此时，$z=z(x,y)$)得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,\text{即}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z},$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\text{即}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-z}{y-2z}.$$

将曲面 Σ 向 xOy 面投影，得投影区域为：D_{xy}：$x^2+\dfrac{3}{4}y^2\leqslant 1$.

$$\text{又因为 }\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2-yz)+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(\text{因 }x^2+y^2+z^2-yz=1),$$

$$\text{所以 }I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\sqrt{3}\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

【方法点击】 (1) 空间曲线的方程有两种表达式：一种是参数方程形式；另一种是一般式，即将空间曲线视为两曲面的交线. 本题中动点 P 的轨迹 C 的方程用后者表示较容易.

(2) 对面积的曲面积分的计算方法有两种：一是将曲面积分化为二重积分；二是利用高斯公式将曲面积分转化为三重积分(此时积分曲面为闭曲面). 本题应利用第一种方法将曲面积分转化为二重积分进行计算，其关键是应将被积表达式化为最简形式后才能计算出二重积分的值. 本题的综合性很强，有一定难度.

【典型错误】 本题的典型错误是不能正确地化简曲面积分的被积表达式，从而得出错误结论，其原因是分析问题及综合运用知识的能力较差，应加强这方面的训练.