# 八、常微分方程

（一）内容概括

常微分方程是指只有一个自变量的微分方程，它的研究对象就是常微分方程的性质与求解.主要有两个问题：一是根据实际问题和所给条件建立微分方程和确定初始条件；二是求解方程.有关微分方程的应用题，首先是建立方程，这要根据题意，结合其他相关知识，通过逻辑推理等综合手段，使问题得到解决；其次是解方程，主要考查考生应用一元函数微积分学的知识综合解题的能力，是考试的重点内容.

（二）考试要求

最新颁布的全国硕士研究生入学考试大纲（数学一）中对常微分方程的要求是：

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法.
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换解某些微分方程.
4. 会用降阶法解下列微分方程：$y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$和$y''=f(y,y')$.
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构.
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
8. 会解欧拉方程.
9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

（三）真题解析

**例1**（2005年）　微分方程$xy'+2y=x\ln x$满足$y(1)=-\frac{1}{9}$的解为________.

**【考点分析】**　本题考查一阶线性微分方程求特解；先将原方程变形知其为一阶线性微分方程，利用公式得通解，再由定解（初始）条件：$y(1)=-\frac{1}{9}$得特解.

**解**　由方程中含有$\ln x$可知：$x>0$；对方程两边同除以$x$得

$$y'+\frac{2}{x}y=\ln x.$$

这是一阶线性非齐次微分方程，且$P(x)=\frac{2}{x}$，$Q(x)=\ln x$，所以方程的通解为

$$\begin{aligned} y&=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\ &=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[\int \ln x\,\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C\right).$$

由定解条件 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 可得 $C=0$，所以 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$ 为所求特解.

故应填 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

**【方法点击】** ① 解一阶微分方程时首先要判断其所属类型，然后再用相应的方法求解. 另外判断是否是线性方程时，不仅要看 $y$ 作为 $x$ 的函数时是否是线性方程，也要看 $x$ 作为 $y$ 的函数时是否是线性方程. 如方程 $(x\cos y+\sin 2y)y'=1$ 关于 $y$ 与 $y'$ 不是线性方程，但写成 $x\cos y+\sin 2y=x'$ 即：$x'-x\cos y=\sin 2y$ 关于 $x$ 与 $x'$ 是线性方程.

② 初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x}Q(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + y_0\right).$$

在本题中 $x_0=1$，$y(x_0)=-\frac{1}{9}$，$P(x)=\frac{2}{x}$，$Q(x)=\ln x$.

**【典型错误】** 本题考生出错原因有两点：其一是不知道将已知方程化为标准的一阶线性非齐次微分方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)\cdot y=Q(x)$ 的形式；其二是没有记住求一阶线性微分方程通解的公式 $y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$.

**例 2**（2006 年） 微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

**【考点分析】** 本题考查一阶微分方程求通解；已知方程是可分离变量型的，先分离变量，然后在方程两端同时积分即可.

**解** 原方程等价为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x,$$

两边积分得 $\ln y=\ln x-x+C_1$，整理得

$$y = Cx\mathrm{e}^{-x}\ (C\text{ 为任意常数}),$$

特解 $y=0$ 包含在通解之中.

故应填 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$（$C$ 为任意常数）.

**【方法点击】** 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$ 的方程称为可分离变量方程，其基本解法为分离变量法：由 $\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$ 得到通解. 由于将 $g(y)$ 作为分母，故若 $g(y)=0$ 有解 $y_1$，$y_2$，…，$y_m$，则变量可分离方程还有特解 $y=y_i(i=1,2,\cdots,m)$. 故在变量分离的同时，要注意在最后补上这些解.

本题较简单，解题过程中：①无须讨论 $y=0$，$y\neq 0$ 两种情形；②无须写成 $\ln|y|$. 事实上，最后的“$C$”已包含这两点.

**【典型错误】** 有的考生不会判断微分方程所属类型而导致出错.

**例 3**(2016 年) 若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$的两个解，则 $q(x)=($ $)$.

(A) $3x(1+x^2)$ (B) $-3x(1+x^2)$ (C) $\dfrac{x}{1+x^2}$ (D) $-\dfrac{x}{1+x^2}$

**【考点分析】** 本题考查一阶线性微分方程解的结构及由特解求方程中待定函数的方法. 已知方程的解确定方程中的函数，可利用线性非齐次方程与其对应的齐次方程的解的关系来计算，也可将已知解代入原方程直接求解未知函数.

**解** 因为 $y_1(x)=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$和 $y_2(x)=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$为 $y'+p(x)y=q(x)$的两个解，所以，$y_2(x)-y_1(x)=2\sqrt{1+x^2}$为 $y'+p(x)y=0$ 的解. 代入该齐次方程，得

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+p(x)\cdot 2\sqrt{1+x^2}=0,\quad 故\ p(x)=-\frac{x}{1+x^2}.$$

再将 $y_2(x)=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$代入原方程，可得

$$4x(1+x^2)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+x^2}\left[(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}\right]=q(x),$$

解得 $q(x)=3x(1+x^2)$. 故应选(A).

**【方法点击】** 本题是常见题型，类似于已知方程的解反求方程. 对于二阶微分方程 $y''+py'+qy=0$，常见反求 $p,q$. 一阶微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$，则可反求 $p(x),q(x)$.

一阶线性非齐次方程与其对应的齐次方程的解的关系：

设 $y_1(x),y_2(x)$为 $y'+p(x)y=q(x)$的两个解，则 $y_2-y_1$ 或 $y_1-y_2$ 为其对应的齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的解.

**【典型错误】** 有少数考生对一阶线性非齐次微分方程与其对应的齐次微分方程解之间的关系不清楚，因此没有得到正确答案.

**例 4**(2008 年) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________.

**【考点分析】** 本题考查一阶微分方程特解的求法；该题为变量可分离的微分方程.

**解** 由$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y}{x}$，分离变量得$\dfrac{dy}{-y}=\dfrac{dx}{x}$，积分得$-\ln|y|=\ln|x|+C_1$，所以$\dfrac{e^{-C_1}}{|y|}=|x|$，即 $y=\dfrac{C}{x}$，$C\in\mathbb{R}$.

又 $y(1)=1$，所以 $C=1$，即 $y=\dfrac{1}{x}$，故应填$\dfrac{1}{x}$.

**【方法点击】** 一阶微分方程的基本类型分为三类：变量可分离的微分方程，齐次微分方程与一阶线性微分方程. 读者应熟练辨析微分方程的类型，并根据不同的类型掌握其相应解法.

(1) 变量可分离的微分方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$，解法是 $\displaystyle\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$.

(2) 齐次微分方程 $y'=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，令$\dfrac{y}{x}=u(x)$，可化为可分离变量型.

(3) 一阶线性微分方程：

(齐次)$y'+p(x)y=0$，通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$；

(非齐次)$y'+P(x)y=Q(x)$，通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$.

**【典型错误】** 有的考生粗心大意，只求通解未求特解.

**例 5**(2014 年) 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的特解为 $y=$________.

**【考点分析】** 本题考查一阶微分方程求特解，该题可视为齐次方程；先求其通解，再利用定解条件即可得特解.

**解** 方程变形为 $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，属于齐次方程. 设 $u=\frac{y}{x}$，则 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

$$\ln|\ln u-1|=\ln x+C_1,$$

即 $\ln u-1=Cx$. 故 $\ln\frac{y}{x}-1=Cx$，代入 $y(1)=e^3$，可得 $C=2$，所以 $y=xe^{2x+1}$. 故应填 $xe^{2x+1}$.

**【方法点击】** 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程为齐次方程，经换元 $u=\frac{y}{x}$ 可化为可分离变量方程.

**【典型错误】** 少数考生没有得到结果，其主要原因是不知道微分方程是齐次方程；还有的考生是由于积分错误，从而导致方程通解不正确.

**例 6**(2004 年) 欧拉方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为________.

**【考点分析】** 本题考查欧拉方程通解的求解.

**解** 令 $x=e^t$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

代入原方程，整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0,$$

解此方程，得通解为 $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$($C_1$，$C_2$ 为任意常数).

故应填 $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}$.

**【方法点击】** 本题属基础题型，也可直接套用公式，令 $x=e^t$，则欧拉方程

$$ax^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+bx\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=f(x),$$

可化为 $a\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(e^t)$.

**【典型错误】** 有些考生没有将解出的通解转变回以 $x$ 为变量的形式，导致错误.

**例 7**(2008 年) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos2x+C_3\sin2x$($C_1$，$C_2$，$C_3$ 为任意常数)为通解的是(  ).

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

**【考点分析】** 本题考查由已知微分方程的通解，反求微分方程的方法.

**解**　由 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 可知其特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm 2i$，故对应的特征方程为

$$(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4,$$

所以所求微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$，故选(D).

**【方法点击】** 本题考查微分方程解的结构. 因为常系数齐次线性微分方程与其特征方程一一对应，所以本题的关键是要能够从所给的解中分析出特征方程的根.

给定常系数线性微分方程 $y'''+py''+qy'+\delta y=0$，其对应的特征方程为 $\lambda^3+p\lambda^2+q\lambda+\delta=0$，设其根为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 则有

$$y'''+py''+qy'+\delta y=0\Leftrightarrow\lambda^3+p\lambda^2+q\lambda+\delta=0\Leftrightarrow(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0.$$

**【典型错误】** (1) 不知道线性齐次微分方程通解的结构.

(2) 有的考生将已知通解分别代入每个方程进行验证，这种作法本身没有问题；但是由于过程烦琐导致计算出错.

**例 8**(2009 年)　若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$. 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $y=$________.

**【考点分析】** 本题考查二阶常系数线性微分方程解的结构及求解方法. 由二阶常系数线性齐次微分方程的通解可得其特征值是：$\lambda_1=\lambda_2=1$，构造出特征方程可得 $a,b$ 的值，然后解二阶常系数非齐次线性方程.

**解**　由 $y=(C_1+C_2x)e^x$ 知特征方程：$\lambda^2+a\lambda+b=(\lambda-1)^2=\lambda^2-2\lambda+1$，所以 $a=-2$，$b=1$.

求解微分方程 $y''-2y'+y=x$，由题设条件设特解 $y^*=cx+d$ 代入方程 $y''-2y'+y=x$，得 $c=1,d=2$，即 $y^*=x+2$.

所以通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$，由初始条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 得，$C_1=0,C_2=-1$，所求解为 $y=-xe^x+x+2=x(1-e^x)+2$.

故应填 $x(1-e^x)+2$.

**【方法点击】** 求二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y''+py'+qy=f(x)$$

通解的步骤为

(1) 求齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 $Y$(借助于特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根).

(2) 求非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$的一个特解 $y^*$.

(3) 写出原方程 $y''+py'+qy=f(x)$的通解 $y$，且 $y=Y+y^*$.

另外，一阶及所有高阶常系数线性微分方程解的结构有类似于二阶常系数线性微分方程的结论.

**【典型错误】** 本题主要出错点是：在求得 $a=-2,b=1$ 后由微分方程 $y''-2y'+y=x$ 将其特解设为 $y^*=Cx$；出现这种错误的原因是考生对二阶常系数非齐次线性微分方程特解的结构不清楚.

**例 9**(2010 年)　求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

【考点分析】 本题考查二阶常系数非齐次线性微分方程的求解方法.先求出原方程对应的齐次方程的通解;再求出原方程的一个特解;最后得到通解.

**解** 由题设知,齐次方程对应的特征方程为 $r^2-3r+2=0$,解得特征根为:$r_1=1$,$r_2=2$.

于是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x},\quad C_1,C_2\text{ 是任意常数}.$$

由条件知原方程的一个特解可设为:$y_1=x(ax+b)\mathrm{e}^x$(其中 $a,b$ 为待定系数).则

$y_1'=[ax^2+(2a+b)\cdot x+b]\mathrm{e}^x$,$y_1''=[ax^2+(4a+b)x+2a+2b]\mathrm{e}^x$.

将 $y_1,y_1',y_1''$ 代入原方程并整理得

$$y_1''-3y_1'+2y_1=(2a-b-2ax)\mathrm{e}^x=2x\mathrm{e}^x.$$

比较等式两端 $x$ 同次幂的系数得

$$\begin{cases}-2a=2,\\2a-b=0,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$$

于是特解 $y_1=-x(x+2)\mathrm{e}^x$.故原方程通解为

$$y=Y+y_1=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-x(x+2)\mathrm{e}^x\quad(\text{其中 }C_1,C_2\text{ 是任意常数}).$$

【方法点击】 本题的关键一步是根据右端的自由项设出特解形式,设 $y''+py'+qy=f(x)$.

① 若 $f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$,则特解 $y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$,其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式,

$$k=\begin{cases}0,&\lambda\text{ 不是特征方程的根},\\1,&\lambda\text{ 是特征方程的单根},\\2,&\lambda\text{ 是特征方程的重根}.\end{cases}$$

② 若 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$,则设特解为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$,$R_m^{(2)}(x)$ 是 $m$ 次多项式,$m=\max\{l,n\}$,

$$k=\begin{cases}0,&\lambda+\mathrm{i}\omega\text{ 不是特征方程的根},\\1,&\lambda+\mathrm{i}\omega\text{ 是特征方程的根}.\end{cases}$$

【典型错误】 本题考生常犯的典型错误是将特解设为:$y_1=(ax+b)\mathrm{e}^x$,出现这种错误的原因是没有搞清楚特解的形式与特征根及原方程右端非齐次项之间的关系.

**例 10**(2012 年) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$,则 $f(x)=$________.

【考点分析】 本题考查二阶常系数线性微分方程求解;可先由方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 求出其通解 $f(x)$;再将 $f(x)$ 代入方程 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 中确定通解中的常数即可.

**解** 方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$,解得 $\lambda_1=-2$,$\lambda_2=1$,所以 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$,其中 $C_1$,$C_2$ 为任意常数.将 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$ 代入方程 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 得 $5C_1\mathrm{e}^{-2x}+2C_2\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x$,所以 $C_1=0$,$C_2=1$,故 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

故应填 $\mathrm{e}^x$.

【方法点击】 求解二阶常系数齐次线性微分方程的一般步骤为:

(1) 写出方程 $y''+py'+qy=0$ 对应的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$；

(2) 求出特征方程的两个根 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$；

(3) 写出通解

① 当 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 是两个相异实数时，通解为：$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$；

② 当 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 是两个相等实数时，通解为：$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$；

③ 当 $\lambda_1$ 与 $\lambda_2$ 是一对共轭复数时，即 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，通解为：$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

**【典型错误】** (1) 由特征方程的根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$ 没有写出通解的正确表达式.

(2) 将题意搞错了或是审题不细致，结果对两个方程分别求解.

**例 11**(2013 年) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$________.

**【考点分析】** 本题考查二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构.

**解** 由 $y_1-y_2=e^{3x}-e^x$，$y_2-y_3=e^x$，可得对应齐次微分方程的通解 $y=C_1(e^{3x}-e^x)+C_2e^x$，所以，非齐次微分方程的通解 $y=C_1(e^{3x}-e^x)+C_2e^x-xe^{2x}$.

故应填 $C_1(e^{3x}-e^x)+C_2e^x-xe^{2x}$($C_1,C_2$ 是任意常数).

**【方法点击】** 根据解的结构，二阶线性微分方程的求解，分为两点：

(1) 对应齐次方程的通解；

(2) 非齐次方程的一个特解.

**【典型错误】** 有的考生将通解错误地写成：

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y_3=C_1e^{3x}-(C_1+C_2+1)xe^{2x}.$$

出现这种错误的原因是对二阶常系数线性微分方程解的结构不清楚.

**例 12**(2007 年) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

**【考点分析】** 本题考查二阶常系数非齐次线性微分方程通解的求法；先求出对应齐次方程的通解 $Y$，然后求出非齐次微分方程的一个特解 $y^*$，则其通解为 $y=Y+y^*$.

**解** 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$，则对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{3x},\quad \text{其中 } C_1,C_2 \text{ 为任意常数.}$$

设原方程的特解为 $y^*=Ae^{2x}$，代入原方程可得

$$4Ae^{2x}-8Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}\Rightarrow A=-2,$$

所以原方程的特解为 $y^*=-2e^{2x}$，故原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x},\quad \text{其中 } C_1,C_2 \text{ 为任意常数.}$$

故应填 $C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$.

**【方法点击】** 对于常系数的线性方程的求解，首先由相应的齐次方程求出齐次方程的通解，本题的关键也是难点在于特解的形式要构造好，先分析自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$，由于 $P_n(x)$ 为常数且 $\lambda=2$ 并非特征根，故设特解为 $y^*=Ae^{2x}$. 考生应掌握由自由项构造特解的方法.

**【典型错误】** 本题的主要错误是非齐次方程特解的构造，有的考生设特解 $y^*=Bxe^{2x}$，也有的设 $y^*=2e^{2x}$等；原因是对特解 $y^*$ 的构成没搞清楚.

**例 13**(2015 年)　设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解,则(　　).

(A) $a=-3,b=2,c=-1$　　(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$　　(D) $a=3,b=2,c=1$

**【考点分析】** 本题考查二阶常系数线性微分方程解的性质与结构.本题可用不同方法解答:解法一利用二阶常系数线性微分方程解的结构与性质,求得 $a,b,c$;解法二由解的定义将已知解代入所给微分方程,从而得一个关于 $a,b,c$ 的三元一次线性方程组,解方程组得 $a,b,c$ 的值.

**解**　**解法一**　由题设条件知,$y_1=\frac{1}{2}e^{2x}$,$y_2=-\frac{1}{3}e^{x}$ 是已知二阶常系数非齐次线性微分方程所对应的齐次微分方程的两个特解,由此知 $r_1=2,r_2=1$ 是特征方程 $r^2+ar+b=0$ 的两个根.

由一元二次方程根与系数的关系,得

$$a=-(2+1)=-3,\quad b=2,$$

于是原方程化为 $y''-3y'+2y=ce^{x}$.

由二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构知:$y_3=xe^{x}$ 是原方程的一个特解,将 $y_3=xe^{x}$ 代入 $y''-3y'+2y=ce^{x}$ 中,得 $c=-1$,即 $a=-3,b=2,c=-1$. 故应选(A).

**解法二**　将已知解 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 代入微分方程 $y''-ay'+by=ce^{x}$ 中,得

$$\left(2+a+\frac{b}{2}\right)e^{2x}+\left[(1+a+b)x+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{b}{3}\right]\cdot e^{x}=ce^{x}.$$

对比上式两端同类项系数得

$$\begin{cases}2+a+\frac{b}{2}=0,\\ 1+a+b=0,\\ \frac{5}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{b}{3}=c,\end{cases}\Rightarrow a=-3,b=2,c=-1.$$

故应选(A).

**【方法点击】** 本题考查的是二阶常系数非齐次线性微分方程的反向问题(即已知微分方程的解,确定微分方程中待定系数),这类问题一般可采用以上两种解法. 显然,解法一利用了二阶线性微分方程解的结构与性质,这种方法计算量小,但要求考生对二阶线性微分方程解的结构非常熟悉. 第二种解法易于理解,但计算量较大.

**【典型错误】** 考生由于粗心在选择解法二时由于 $a,b,c$ 的值没有全求对,因此选(B),(C),(D)的均有.

**例 14**(2003 年)　设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y'\neq 0$,$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

**【考点分析】** 本题考查二阶常系数非齐次线性微分方程求解及反函数求导法则.

**解** (1) 由反函数导数公式知 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$,即 $y'\frac{dx}{dy}=1$.

上式两端关于 $x$ 求导,得

$$y''\frac{dx}{dy}+\frac{d^2x}{dy^2}(y')^2=0.$$

所以 $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\frac{dx}{dy}y''}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$. 代入原微分方程得

$$y''-y=\sin x. \qquad ①$$

(2) 方程①所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

设方程①的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x.$$

代入方程①求得 $A=0, B=-\frac{1}{2}$,故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$,从而 $y''-y=\sin x$ 的通解是

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$,得 $C_1=1, C_2=-1$,故所求初值问题的解为

$$y(x)=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

**【方法点击】** 非齐次线性方程的通解等于对应齐次方程通解加上本身的特解,其中特解形式最为重要.

反函数的求导法是一元函数的三个基本微分法之一,二阶线性常系数非齐次微分方程则是微分方程的重要内容. 本题将两部分内容有机结合在一起,考查考生综合运用知识的能力.

**【典型错误】** 本题出现的主要错误是:求不正确反函数的二阶导数:如 $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^2}$ 和 $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{y''}{(y')^3}$;特征根计算出错如 $\lambda=\pm i$ 和 $\lambda_1=0, \lambda_2=1$;待定系数计算出错等.

**例 15**(2016 年) 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$,其中 $0<k<1$.

(Ⅰ) 证明:反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛;

(Ⅱ) 若 $y(0)=1, y'(0)=1$,求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值.

**【考点分析】** 本题考查二阶常系数齐次线性微分方程求解及反常积分问题;第(Ⅰ)小题利用二阶线性常系数齐次微分方程解的公式求出通解,再去计算反常积分. 第(Ⅱ)小题则先由初始条件确定出特解,后计算反常积分.

**解** (Ⅰ)**证明** 微分方程 $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为 $r^2+2r+k=0$,解得特征根

$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}$. 因为 $0<k<1$，所以 $r_{1,2}<0$. 因此，原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}\quad(C_1,C_2\text{ 为任意实数}).$$

故 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=C_1\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{r_1x}\mathrm{d}x+C_2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{r_2x}\mathrm{d}x=-\dfrac{C_1}{r_1}-\dfrac{C_2}{r_2}$，收敛.

（Ⅱ）**方法一** 将 $y(0)=1,y'(0)=1$ 代入 $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$，得 $\begin{cases}C_1+C_2=1,\\C_1r_1+C_2r_2=1.\end{cases}$ 又 $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}$，解得 $\begin{cases}C_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-k}},\\C_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-k}},\end{cases}$ 因此，

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\left(\frac{C_1}{r_1}+\frac{C_2}{r_2}\right)=-\left[\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-k}}}{-1+\sqrt{1-k}}+\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-k}}}{-1-\sqrt{1-k}}\right]=\frac{3}{k}.$$

**方法二**

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}(C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x})=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\lim_{x\to\infty}(C_1r_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2r_2\mathrm{e}^{r_2x})=0.$$

又 $y(0)=1,y'(0)=1$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{k}(y''+2y')\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{k}[y'(x)+2y(x)]_0^{+\infty}=\frac{3}{k}.\end{aligned}$$

**【方法点击】** 本题把二阶线性常系数齐次微分方程的解和反常积分结合起来，题目新颖，也比较经典. 在解(Ⅱ)时，方法一运算量较大，方法传统；方法二运算量较小，方法灵活.

**【典型错误】** 在第(Ⅱ)题中多数考生采用的是方法一，由于本方法计算量较大，有的考生在运算过程中不细致导致结果不正确.

**例 16**(2004 年) 某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h，经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？(注 kg 表示千克，km/h 表示千米/小时.)

**【考点分析】** 本题考查导数的物理意义(速度)，运动学中的牛顿第二定律及简单微分方程求解.

**解** 由题设，飞机的质量 $m=9000$kg，着陆时的水平速度 $v_0=700$km/h. 从飞机接触跑道开始计时，设 $t$ 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$.

**解法一** 根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv.$$

又 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，由以上二式得

$$\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\mathrm{d}v,$$

积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C$. 由于 $v(0)=v_0$, $x(0)=0$, 故得 $C=\frac{m}{k}v_0$, 从而

$$x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t)).$$

当 $v(t)\to 0$ 时,

$$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times 700}{6.0\times 10^6}=1.05(\mathrm{km}).$$

所以,飞机滑行的最长距离为 1.05km.

**解法二**　根据牛顿第二定律,得 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$, 所以 $\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$.

两端积分得通解 $v=C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$, 代入初始条件 $v\big|_{t=0}=v_0$ 解得 $C=v_0$, 故 $v(t)=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$.

飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t=-\frac{mv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(\mathrm{km}).$$

**解法三**　根据牛顿第二定律,得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,$$

其特征方程为 $\lambda^2+\frac{k}{m}\lambda=0$, 解之得 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\frac{k}{m}$, 故 $x=C_1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$.

由 $x\big|_{t=0}=0$, $v\big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-\frac{kC_2}{m}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0}=v_0$, 得 $C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k}$, 于是 $x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$.

当 $t\to+\infty$ 时, $x(t)\to\frac{mv_0}{k}=1.05(\mathrm{km})$.

所以,飞机滑行的最长距离为 1.05km.

**【方法点击】**　将速度及加速度与导数联系起来建立正确的关系式是此类应用题的关键. 另外本题求飞机滑行的最长距离,可理解为 $t\to+\infty$ 或 $v(t)\to 0$ 的极限值.

**【典型错误】**　主要问题是有的考生不能正确地建立数学模型.

**例 17**(2012 年)　已知曲线 $L$: $\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}$ $\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数,且 $f(0)=0$, $f'(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 $L$ 的切线与 $x$ 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式,并求以曲线 $L$ 及 $x$ 轴和 $y$ 轴为边界的区域的面积.

**【考点分析】**　本题考查导数的几何意义、微分方程求解及定积分的几何应用;该题是一道综合题. 应先求出切线方程,再由题设条件求出 $f(t)$ 的表达式,最后根据定积分的几何意义求出面积 $S$.

**解** 设切点 $A$ 的坐标为 $(f(t),\cos t)$，则由题意知切线的斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}$，所以切线方程 $L_1$：$y-\cos t=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}[x-f(t)]$.

令 $y=0$，解得 $x=f'(t)\cot t+f(t)$，所以 $L_1$ 与 $x$ 轴的交点 $B$ 为 $(f'(t)\cot t+f(t),0)$，所以

$|AB|^2=[f'(t)\cot t+f(t)-f(t)]^2+(\cos t-0)^2=1^2$，即 $[f'(t)]^2=\dfrac{\sin^2 t}{\cot^2 t}$.

因为 $f'(t)>0$ 且 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}=\sec t-\cos t$，从而

$$f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t+C.$$

因为 $f(0)=0$，所以 $C=0$，所以 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$.

由于 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}f(t)=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}[\ln(\sec t+\tan t)-\sin t]=+\infty$，所以以曲线 $L$ 及 $x$ 轴和 $y$ 轴为边界的区域的面积

$$S=\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=f(t)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

**【方法点击】** (1) 两点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 间的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. 由此可见，求两点的距离关键在于求两点的坐标. 本题根据基本概念、基本定义可求出两点的坐标.

(2) 这里用到了反常积分的运算法则.

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ 有连续的导数且单调，$\varphi(\alpha)=a$，$\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\varphi(t)}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ ($\beta$ 既可是有限的，也可是无限的).

(3) 微分方程的应用问题是考查应用能力的一个重要方面. 几何方面的应用常与切线斜率、曲率以及弧长、面积等有关；运动问题常用牛顿第二定律，写出数学式子就是微分方程. 解决应用问题的一般程序是：列方程、解方程、讨论结果. 通常关键是方程的建立，这主要是要将问题所涉及的各个量用数学式子表示出来，微分方程自然就列出来了.

**【典型错误】** 本题的主要错误是：

(1) 有的考生切线斜率求错，即参数方程求导数不正确，从而导致函数 $f(t)$ 的表达式错误.

(2) 也有的学生不会利用反常积分求面积，或不会计算反常积分等.