大气二班

2019~2020 秋季学年

期末复习资料

整理：蒋斌

前言

本复习资料为我利用空余时间为整理，供大家期末复习使用。

在整理的过程中，敲数学符号确实是一件很麻烦的事，我也曾近乎崩溃，但最终还是坚持了下来，因为我知道，自己的身上有一份责任。本复习资料没有任何人审核，因此难免会存在错误之处，还请大家指出。

同时由于时间关系，我没能过将次此复习资料整理成完全具有体系的形式，比如没有空间几何的资料整理。在这里向大家说一声抱歉。也正是因为时间不足，我直接将不定积分、定积分、定积分的应用三大章节合为一章，但这样的“合体”是有一定道理的。不定积分和定积分有可比性，并且不定积分、定积分、定积分的应用这三节又存在极强的联系性，所以将三者放在一起。

最后，祝大家在期末考试中取得满意的成绩，也提前祝大家新年快乐！

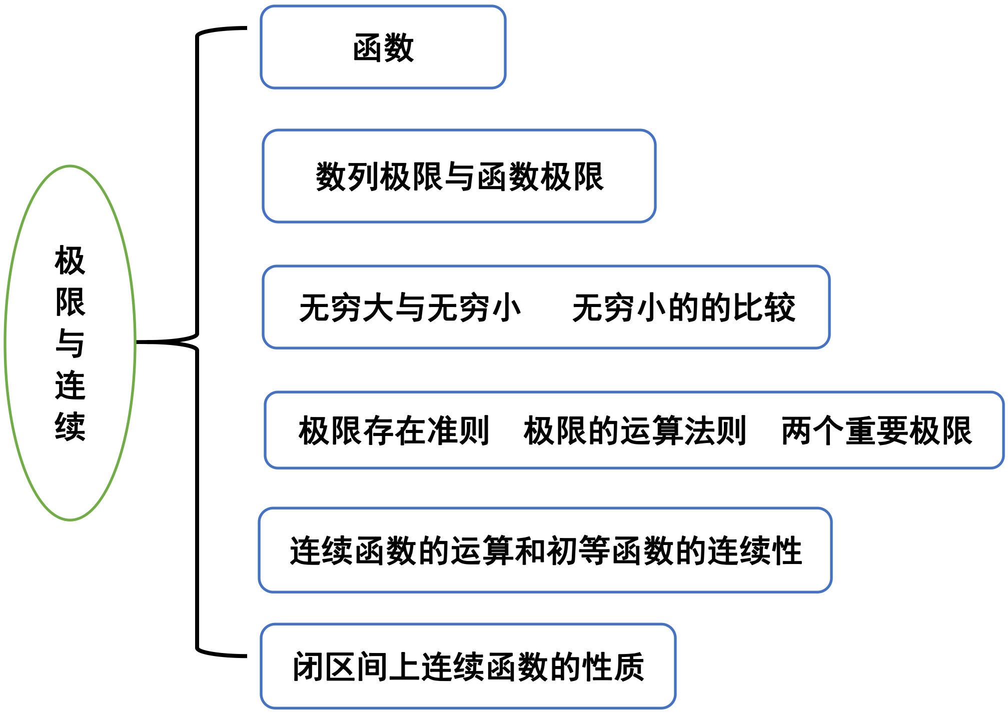
2020 年 1 月 1 日　　星期三

再版说明

本人在寒假期间对本资料做了审核，并补充了有关空间向量的复习板块。毕竟是个人审核，难免会存在审核不周之处，如在使用过程中发现问题或有疑问之处，可以发邮件至 1592512561@qq.com 进行询问、讨论，抑或克咨询自己的高数老师。希望此资料会对你有帮助！

2020 年 2 月 28 日　　星期五

第一章　极限与连续



重要考点题型通关

考点一：考察函数的基本性质

函数的定义域、值域、对应法则，以及函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性。

1．设 $\mathrm{f}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3\mathrm{f}(\mathrm{x})-2\mathrm{x}$，求 $\mathrm{f}(\mathrm{x})$.

解： $\frac{x+1}{x-1}=t$,则 $\mathrm{x}=\frac{t+1}{t-1}$，于是 $\mathrm{f}(\mathrm{t})=3\mathrm{f}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-\frac{2t+2}{t-1}=3[3f(t)-2t]-\frac{2t+2}{t-1}$

整理得 $8\mathrm{f}(\mathrm{t})=6\mathrm{t}+\frac{2t+2}{t-1}$，所以 $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x-1}(\mathrm{x}\neq 1)$

2.设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$_______.

A.$\begin{cases}2+x^2, x<0\\ 2-x, x\ge 0\end{cases}$　　B.$\begin{cases}2-x^2, x<0\\ 2+x^2, x\ge 0\end{cases}$

C.$\begin{cases}2-x^2, x<0\\ 2-x, x\ge 0\end{cases}$　　D.$\begin{cases}2+x^2, x<0\\ 2+x, x\ge 0\end{cases}$

解： $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), f(x)\le 0\\ f(x)+2, f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, x\ge 0\\ 2+x^2, x<0\end{cases}$,故选(D).

3.设 f(x)为奇函数，g(x)为偶函数，且它们可以构成复合函数 f[f(x)]，g[f(x)]，f[g(x)]，g[g(x)]，则其中为奇函数的是_____.

解：由已知条件，$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$.设 F(x)=f[f(x)]，则 $F(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$.所以 f[f(x)]为奇函数.

4.函数 $y=\sin\frac{\pi x}{2(1+x^2)}$的值域是______.

解： 因为 $1+x^2\ge 2|x|$，所以$-\frac{1}{2}\le\frac{x}{1+x^2}\le\frac{1}{2}$，因此$-\frac{\pi}{4}\le\frac{x}{1+x^2}\le\frac{\pi}{4}$，从而$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\frac{\pi x}{2(1+x^2)}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

考点二：数列极限和函数极限的定义和存在性判定

数列与函数的四大特性：唯一性、有界性、保号性和保序性。

判断数列极限不存在，只需找到其两个子列极限存在且不同。

函数在某点极限存在充要条件为左极限等于右极限(也可写成 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$)。

5．设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有________.

A. $a_n < b_n$对任意 n 成立　　　　　　　　B. $b_n < c_n$对任意 n 成立

C.极限$\lim_{n\to\infty} a_n c_n$不存在　　　　　　　　D.极限$\lim_{n\to\infty} b_n c_n$不存在

解：取$a_n = \frac{2}{n}$,$b_n = 1$,$c_n = \frac{n}{2}$（n=1,2,3,…）,则 A,B,C 都可以排除。对于 D 选项，假设$\lim_{n\to\infty} b_n c_n$存在，则$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n c_n \times \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n c_n \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}$也存与题意不符，故正确。

6．设$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$，证明数列$\{a_n\}$没有极限.

解：设 n 为正整数，取 n=4k,则$a_{4k} = \left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin 2k\pi = 0$

取 n=4k+1,则$\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}) = 1+\frac{1}{4k+1} \to 1(k\to+\infty)$

因此$\{a_n\}$没有极限.

考点三：无穷大与无穷小的定义

无穷小量与无穷大量不是一个函数,而是一个变量,即不断趋于 0 或∞的过程。

无界不一定是无穷大，无穷大一定无界。

7.当 $x\to 0$ 时，变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是______.

A.无穷小　B.无穷大　C.有界的，但不是无穷小量　D.无界的，但不是无穷大

解：取$x_k = \frac{1}{2k\pi}$,则 $f(x_k) = (2k\pi)^2\sin 2k\pi = 0$,故 $x\to 0$ 时，f(x)不是无穷大。显然，$x\to 0$ 时，f(x)不是无穷小。取$x_k = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，则 $f(x_k) = (2k\pi+\frac{\pi}{2})^2\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}) = (2k\pi+\frac{\pi}{2})^2 \to \infty$，所以$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$，不是有界的。综上，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是无界的，但不是无穷大量。选 D。

8.设数列x_n与y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是________.

A.若x_n发散，则y_n必发散　　B.若x_n无界，则y_n必有界

C.若x_n有界，则y_n必为无穷小　　D.若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小

解： A 项，取$x_n = n, y_n = 0$，可知 A 项错误。B 项，取$x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$，可知 B 项错误。C 项，如果$x_n$有界且在 $n \to \infty$时为无穷小($\mathrm{y} = \operatorname{arccot} x$),那么$y_n$只要为一常数也可以。D 项，若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n \times \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，所以$y_n$必为无穷小。选 D。

考点四：无穷小的比较以及利用等价无穷小求极限

\#　熟记等价无穷小的几个比较

\#　常见的等价无穷小($\mathrm{x} \to 0$ 时)

$$\mathrm{x} \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arcsin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \sim \sec x - 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \mathrm{x}$$

\#　f(x)极限为 A 的充要条件为：f(x)=A+α,其中α为无穷小

\#　等价无穷小替换注意事项

9.设当 $\mathrm{x} \to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $\mathrm{x}\sin x^n$高阶的无穷小，而 $\mathrm{x}\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小，则正整数 n=_____.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{\mathrm{x}\sin x^n} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2 x^2}{x^{n+1}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-3}} = 0$，从而可知 $\mathrm{n} < 3$。

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{x} \sin x^n}{e^{x^2}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{n+1}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-1} = 0$，可知 $\mathrm{n} > 1$,综上，n=2,选 B。

10.求极限$\lim\limits_{x \to 0} x^{-3}[(\frac{2+\cos x}{3})^x - 1]$.

解： 原式=$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\mathrm{x} \ln \frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \frac{2+\cos x}{3}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x-1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$

点评：幂指函数求极限常用对数法，即$\lim\limits_{x \to 0} f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \lim\limits_{x \to 0} f(x)}$.

11.设$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1} = A(\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1$，求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

解： 因为$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1} = A$，所以$\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1} = A + \alpha$，其中$\alpha$为无穷小。又因为 $x \to 0$ 时$a^x - 1 \sim \mathrm{x} \ln a$,所以$\ln(1 + \frac{f(x)}{\sin x}) = A \,\mathrm{x} \ln a + \alpha \,\mathrm{x} \ln a$从而有 $1 + \frac{f(x)}{\sin x} \sim a^{(A+\alpha)x}$,即 $\mathrm{f(x)} \sim [a^{(A+\alpha)x} - 1] \sin x \sim (A+\alpha) x \ln a \sin x$,所以$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(A+\alpha) x \ln a \sin x}{x^2} =$

$A \ln a$.

考点五：极限存在准则

夹逼准则和单调有界数列必有极限

12.求极限$\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{n}{n^2+\pi} + \frac{n}{n^2+2\pi} + \dots + \frac{n}{n^2+n\pi})$.

解： $\frac{n^2}{n^2+n\pi} \leq \frac{n}{n^2+\pi} + \frac{n}{n^2+2\pi} + \dots + \frac{n}{n^2+n\pi} \leq \frac{n^2}{n^2+\pi}$

而$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+n\pi} = 1$，$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+\pi} = 1$

由夹逼准则知$\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{n}{n^2+\pi} + \frac{n}{n^2+2\pi} + \dots + \frac{n}{n^2+n\pi}) = 1$

13.设$a_0 = 0, a_{n+1} = 1 + \sin(a_n - 1)\ (n \geq 0)$，求$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

解: 由题可知，$a_1 = 1 - \sin 1$,$a_2 = 1 - \sin(\sin 1)$, $a_n = 1 - \ \sin(\sin \ldots (\sin 1))$(n个 sin 符号)，于是有 $0 \le a_n \le 2$，即数列$\{a_n\}$有界。

当 0< x < $\frac{\pi}{2}$时，$\sin x < x$,即$\sin(\sin \ldots (\sin 1))\,(\mathrm{n}+1\text{ 个}) <$

$\sin(\sin \ldots (\sin 1))\,(n\text{ 个})$，所以$a_{n+1} - a_n = \sin(\sin \ldots (\sin 1))\left(\mathrm{n}+1\text{ 个}\right) -$

$\sin(\sin \ldots (\sin 1))\,(n\text{ 个}) \ge \sin(\sin \ldots (\sin 1))\left(\mathrm{n}\text{ 个}\right) -$

$\sin(\sin \ldots (\sin 1))\,(n\text{ 个}) \ge 0$，即数列$\{a_n\}$单调增加，根据单调有界数列必有极限可知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，设其为 A,则对$a_{n+1} = 1 + \sin(a_n - 1)$两边用极限得，A=1+$\sin(A-1)$,即 A-1=0,解得 A=1,故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

考点六：极限的运算及两个重要极限

利用分子或分母有理化求极限

先求积或和，再求极限

利用等价无穷小求极限

利用两个重要极限的变形求极限($\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$)

利用极限与无穷小的关系求极限(例题 11)

先利用三角函数化简再用等价无穷小求极限

14.$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+3+\ldots n} - \sqrt{1+2+3+\ldots+(n-1)}\right] =$________.

解: 原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2+3+\ldots n}+\sqrt{1+2+3+\ldots+(n-1)}} == \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

15.设$x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1}$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解: $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$,所以

$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$,故$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$

16.求极限$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2n})$， $|x|<1$.

解：原式$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2n})}{1-x}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^4)(1+x^4)\dots(1+x^{2n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(x^{2n})^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$

17. $\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

解：原式$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}\right]=\frac{3}{2}$.

18.设$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=8$,则 a=________.

解：(法一)左边$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}\cdot3a+a}=\left[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3a}{x-a})^a=e^{3a}=8$,从而 $a=\ln2$.（法二）$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=e^{x\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+2a}{x-a}}=e^{x\lim_{x\to\infty}\ln(1+\frac{3a}{x-a})}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3xa}{x-a}}=e^{3a}=8$,解得 $a=\ln2$.

18.n 为正整数, a 为某实数, $a\neq0$, 且$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1999}}{x^n-(x-1)^n}=\frac{1}{a}$,则 n=____,并且 a=_____.

解：由$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1999}}{x^n-(x-1)^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1999}}{nx^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}+\dots+(-1)^{n+1}}$存在可知$x^{1999}$与$x^{n-1}$同阶,

从而 n=2000,并求出 a=2000.

19. (1)$\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}}{x^2}\right]$

(2) $\lim_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

解：(1)原式$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}\right)}{x^2}\right]$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} + \frac{\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(\cos 2x-1)+1}}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{(\cos 3x-1)+1}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2} = \frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} = 3$$

(2)原式$=2\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\cos\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2}\sin\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2}$

$$= 2\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\ln\frac{x+3}{x+1}}{2} = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} x\frac{2}{x+1} = 2$$

考点七：判断函数的间断点以及利用分段函数在某点连续求参数

\# 函数的间断点种类

- **第一类间断点**
  - **可去间断点（左右极限存在且相等）**
  - **跳跃间断点（左右极限存在但不相等）**
- **第二类间断点** → **无穷间断点和振荡间断点**

\# 函数在某点处连续的要条件为：函数在该点左右极限存在且相等。

\# 函数在x_0处连续的三种等价命题：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \Leftrightarrow \forall\delta > 0$,当$|x - x_0| < \delta$时，都有$|f(x) - f(x_0)| < \delta$成立。

\# 初等函数在其定义域内连续。(复合函数、反函数的连续性？)

20.设 f(x)在 x = 2 处连续，且$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}$存在，则 f(2) = ________.

解： 由$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}$存在可知，$\lim\limits_{x\to2}(f(x)-3)=0$ 从而$\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$,另一方面, $f(x)$在 $\mathrm{x}=2$ 处连续，由连续定义得$\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$,所以 $f(2)=3$.

21.设函数

$\mathrm{f(x)}=\begin{cases}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}, & x<0\\ b, & x=0\\ \frac{\ln(1+2x)}{x}+a, & x>0\end{cases}$,在实数集上连续，那么 a=______,b=______.

解： $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+2x)}{x}+a\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2x}{x}+a\right)=2+a$,由 f(x)在实数集上连续知，b=0.a=-2.

22.已知 $\mathrm{f(x)}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}$,(x>0).

(1)求 f(x); (2)函数 f(x)在定义域内是否连续.

解： (1)当 $\mathrm{x}<\mathrm{e}$ 时，$\mathrm{f(x)}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\ln e^n+\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}\right)^n\right]}{n}=1+\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{e}\right)^n}{n}=1$.

当 $\mathrm{x}>\mathrm{e}$ 时, $\mathrm{f(x)}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\ln x^n+\ln\left[1+\left(\frac{e}{x}\right)^n\right]}{n}=\ln x+\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\left(\frac{e}{x}\right)^n}{n}=\ln x$.

当 $\mathrm{x}=\mathrm{e}$ 时,$\mathrm{f(e)}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\mathrm{n}+\ln2}{\mathrm{n}}=1$.

所以 $\mathrm{f(x)}=\begin{cases}1, 0<x\le e\\ \ln x, x>e\end{cases}$.

(2)由于$\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=f(e)$,所以 f(x)在 x=e 处连续; 又当 $0<\mathrm{x}<\mathrm{e}$ 时, f(x)=1 连续；当 $x>e$ 时 $\mathrm{f(x)}=\ln x$也连续，所以 f(x)在$(0,+\infty)$内连续.

23.设 $\mathrm{f(x)}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 f(x)的间断点为______.

解： $\mathrm{f(x)}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\mathrm{f(x)}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)x}{x^2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{x}$,所以 f(x)的间断点为 $\mathrm{x}=0$.

考点八：闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的性质：最值性定理、有界性定理、零点定理、介值定理.

一般以证明题型为主.

区分函数在闭区间内的连续与一致连续（能理解）

24.设函数 $f(x)$在$(a,b]$上连续，且 $x \to a^+$时函数 $f(x)$极限存在，则函数 $f(x)$在$(a,b]$上有界.

解：设 $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$，由极限定义，$\forall \epsilon = 1$，存在正数δ，使当 $a < x < a + \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$，也即 $A - 1 < f(x) < A + 1$.

对于$[a + \delta,b]$，由 $f(x)$的连续性，必存在常数 M，使$\forall x \in [a + \delta,b]$，有$|f(x)| \le M$，

取 $M = \max\{M,|A-1|,|A+1|\}$，则对任意 $x \in (a,b]$有$|f(x)| \le M$.

即 f(x)在$(a,b]$上有界.

25.证明：奇次多项式 $p(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n+!}$至少存在一个零点.

证明：不妨设$a_0 > 0$，因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right) =+ \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right) =- \infty$$

所以存在 $X > 0$，使 $p(X) > 0,p(-X) < 0$,又因为 P(x)在$[-X,X]$上连续，由零点定理知在$[-X,X]$上必存在一点ξ使 $p\left(\xi\right) = 0$，即奇次多项式至少存在一个零点.

第二章 导数与微分

- **导数与微分**
  - 导数的定义
  - 导数的基本公式和运算法则
  - 高阶导数 隐函数及参数方程求导
  - 微分

重要考点题型通关

导数的定义；导数的几何意义；左导数与右导数.

可导一定连续，连续不一定可导.

函数在某点可导的充要条件是：f(x)在该点的左导数与右导数存在且相等.

考点一：导数的定义

1．设函数 f(x)在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在区间$[0,2]$上，$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}(x^2-4)$,若对任意的 x 都满足 $\mathrm{f(x)}=\mathrm{kf(x+2)}$,其中 k 为常数.

(1) 写出 f(x)在$[-2,0)$上的表达式.

(2) 问 k 为何值时，函数 f(x)在 x=0 处可导.

解：(1)当$-2\le \mathrm{x}<0$ 时，即 $0\le \mathrm{x}+2<2$ 时，$\mathrm{f(x)}=\mathrm{kf(x+2)}=\mathrm{k(x+2)}[(x+2)^2-4]=\mathrm{kx(x+2)(x+4)}$.

(3)由题设知：$\mathrm{f}(0)=0$.

$$\mathrm{f}_+'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4$$

$$\mathrm{f}_-'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8\mathrm{k}$$

由题知，函数 f(x)在 $x=0$ 处可导，所以 8k=-4，解得 k=$-\frac{1}{2}$.

2.设 f(x)可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 F(x)在 $x=0$ 处可导的

________条件.

解： $F_+^{'}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}=f^{'}(0)+f(0)$

$F_-^{'}(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}=f^{'}(0)-f(0)$

要使 F(x)在 $x=0$ 处可导，则 $F_+^{'}(x)=F_-^{'}(x)$，从而有 $f(0)=0$ 故填充要条件.

3.设函数 f(x)在点x_0处的导数 $f'(x_0)$存在，α,β是常数，求极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}$.

解：函数 f(x)在点x_0处的导数 $f'(x_0)$存在，由导数定义及极限运算法则得，

$\mathrm{Lim}_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{[f(x_0+\alpha h)-f(x_0)]-[f(x_0)-f(x_0-\beta h)]}{h}=$

$\alpha\,\mathrm{Lim}_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}+\beta\,\mathrm{Lim}_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{\beta h}=\alpha f^{'}(x_0)+\beta f^{'}(x_0)$.

特别地，当α,β中至少有一个为零时上述结果显然成立。

4.设$f^{'}(0)=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3\sin x)-f(2\arctan x)}{x}=$________.

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 4

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3\sin x)-f(0)}{3\sin x}\cdot\frac{3\sin x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2\arctan x)-f(0)}{2\arctan x}\cdot\frac{2\arctan x}{x}=3f^{'}(0)-$

$2f^{'}(0)=f^{'}(0)=2$.选 B 项.

5.设函数 f(x)在$(-\infty,+\infty)$上有定义，对任意 x,y∈$(-\infty,+\infty)$有 $f(x+y)=$

$f(x)+f(y)+2xy$，且 $f'(0)$存在，求 f(x).

解：对 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，令 $y=0$，得 $f(0)=0$

$f^{'}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+f(\Delta x)}{\Delta x}=f^{'}(0)+2x$.

所以 $f(x)=f'(0)x+x^2+c$,由于 $f(0)=0$，得 c=0,所以 $f(x)=f'(0)x+x^2$.

6.设函数 $f(x)$又连续的导函数，$f(0)=0$ 且$f'(0)=b$，若函数 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$在 x=0 处连续，则常数 A=______.

解： 因为$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{a\sin x}{x}\right]=f'(0)+a=b+a$

又因为 F(x)在 x=0 处连续，所以 A=a+b.(直接用洛必达法则也可以)

考点二：导数的运算

\# 熟记基本初等函数的导数公式.

\# 导数的四则运算法则.

\# 复合函数的求导法则：链式法则.

\# 反函数的求导法则：反函数的导数等于原函数导数的倒数，即$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$($\varphi(y)$在 y 处可导，且$\varphi(y)\neq 0$).

7.设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,则$\frac{dy}{dx}|_{x=1}=$ ________.

解： $y=\arctan e^x-\frac{1}{2}\ln e^{2x}+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)=\arctan e^x-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$,

从而$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$,所以$\frac{dy}{dx}|_{x=1}=\frac{e-1}{e^2+1}$.

解题锦囊：对于复杂的函数求导，可以先化简，再求导。

8.已知 $y=f(\frac{3x-2}{3x+2})$，$f'(x)=\arctan x^2$，则$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=$ ______.

解：令 $u=\frac{3x-2}{3x+2}$，则 $y=f[u(x)]$，由连式法则，$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\arctan u^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$

从而$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=\frac{3\pi}{4}$.

9.设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足 $2f(1+x)+f(1-x)=e^x$，求 $f'(x)$.

解：先求 $f(x)$表达式，在等式 $2f(1+x)+f(1-x)=e^x$中令自变量为-x，

则有 $2f(1-x)+f(1+x)=e^{-x}$,从而解得 $3f(1+x)=2e^x-e^{-x}$,

从而有 $f(x)=\frac{2e^{x-1}-e^{1-x}}{3}$,所以$f'(x)=\frac{2e^{x-1}+e^{1-x}}{3}$.

9.试确定常数 a,b 的值，使函数$\begin{cases}1+\ln(1-2x), & x\le 0\\ a+be^x, & x>0\end{cases}$在 x=0 处可导，并求此时的的$f'(x)$.

解：因为 $f(x)$在 x=0 处可导，所以 $f(x)$在 $x=0$ 处也必然连续，即 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1$.得 a+b=1.由导数定义，

$f_-'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[1+\ln(1-2x)]-1}{x}=-2$,

$f_+'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a+be^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{b(e^x-1)}{x}=b$,

由 $f(x)$在 x=0 处可导，知 b=-2,从而 a=3.

10.设 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其导函数在 x=0 处连续，则$\alpha$的取值范围是_____.

解：当$\alpha>1$ 时，有$f'(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,由于$=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$,所以要$\begin{cases}\alpha-1>0\\ \alpha-2>0\end{cases}$，所以$\alpha>2$.

考点三：高阶导数、隐函数求导以及参数方程的求导

\# 熟记莱布尼茨 n 阶导数公式　$[uv]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^k$.

\# 隐函数的求导要求得彻底求导过程要认真细心，这类题主要考察计算能力.

参数方程的一阶导数可以先分别对 x,y 求导后再合并求一阶导, 二阶导数在一阶导求完后再除以 x 的导数.

11.设 $\mathrm{y}=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$，则$y''|_{x=0}=$______.

解： $\mathrm{y}=\frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{x})-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.所以$y'=-\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{1+x^2})$, $y''=-\frac{1}{2}[\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$,从而$y''|_{x=0}=-\frac{3}{2}$.

点评：关于含对数的求导，若含有乘除运算，记得运用对数的运算性质先化简再求导.

12.设函数 $\mathrm{x}=\mathrm{f(y)}$的反函数 $\mathrm{y}=f^{-1}(x)$及$f'[f^{-1}(x)]$,$f''[f^{-1}(x)]$均存在，且 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$，则$\frac{d^2f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2}$=________.

A.$-\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$ B.$\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}$ C.$-\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$ D.$\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$

解： 因为 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$，由反函数的导数公式有：

$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{f'(\mathrm{y})}=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$, $\frac{d^2f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}\right)=\frac{-f''[f^{-1}(x)]\cdot[f^{-1}(x)]'}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}=-\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$.选 C.

13.设 $\mathrm{y}=sin^3x+\sin x\cos x$,求$y^{(n)}$.

解： $\mathrm{y}=sin^3x+\sin x\cos x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin 2x$,

所以$y^{(n)}=\frac{3}{4}\sin(x+\frac{\pi}{2}n)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}n\right)+2^{n-1}\sin(2x+\frac{\pi}{2}n)$.

解题锦囊：三倍角公式：$\sin 3x=3\sin x-4sin^3x$.

14.设 $\mathrm{f(x)}=(\mathrm{x}-\mathrm{a})^n\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$在点 a 的一个邻域内有(n-1)阶连续导数，则$f^n(a)=$___________.

解： 根据题设条件，由莱布尼茨公式，有：

$$f^{(n-1)}(x)=[(\mathrm{x}-\mathrm{a})^n\varphi(x)]^{(n)}$$
$$=(\mathrm{x}-\mathrm{a})^n\varphi(x)^{(n-1)}+C_{n-1}^1\mathrm{n}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{n-1}\varphi(x)^{(n-2)}+\ldots+n!(x-a)\varphi(x).$$

从而$f^{(n-1)}(\mathrm{a})=0$,又由导数定义得,

$$f^n(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(\mathrm{a})}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^n\varphi(x)^{(n-1)}+C_{n-1}^1\mathrm{n}(\mathrm{x}-1)^{n-1}\varphi(x)^{(n-2)}+\ldots+n!(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$
$$=\ n!\varphi(a).$$

15.设 $\mathrm{y}=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}$，求 y'.

解：等式两边分别取对数得：$\ln y=\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{8}\ln\sin x$.两边求导得,

$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{\cos x}{8\sin x}$,从而$\mathrm{y}'=\frac{1}{8}(\frac{2}{x}\text{-}\frac{4}{x^2}+\cot x)\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}$.

16.设$\begin{cases}x=f(t)-\pi\\y=f(e^{3t}-1)\end{cases}$，其中 f 可导，且 $\mathrm{f}'(0)\neq 0$，则$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}|_{x=0}=$______.

解: 这是一道参数方程所确定的函数的求导问题,其中 y 又是关于 t 的复合函数,

我们令 $\mathrm{u}=e^{3u}-1$，则$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}}{\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}}=\frac{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}}{\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}}=3\frac{[f'(u)]e^{3t}}{f_t'(t)}$.当 $\mathrm{t}=0$ 时，u=0,

所以$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}|_{t=0}=3\frac{f'(0)e^0}{f'(0)}=3.$

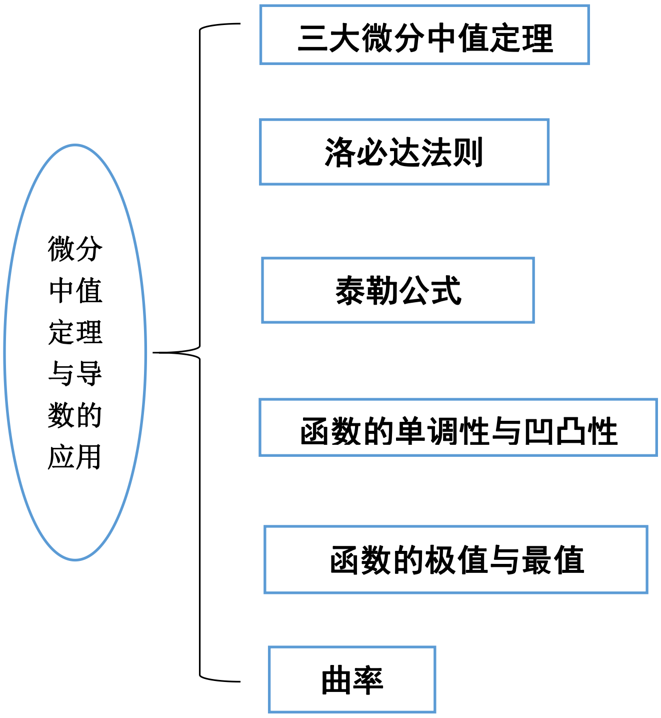
考点六：微分(简单)

熟记微分的表达形式：$\mathrm{dy}=\mathrm{f}'(x_0)\mathrm{dx}$.

能明白微分的几何意义（数形结合），从而可知$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|dy-\Delta y|}{\Delta x}=0$.

知道微分近似运算公式：$\mathrm{f(x)}\approx\mathrm{f}(x_0)+f'(x)(x-x_0)$,用于理解第一章中某些等价无穷小的“来历”.

第三章 微分中值定理与导数的应用



重要考点题型通关

考点一　与三大微分中值定理相关的证明题

熟记三大微分中值定理的成立条件;

学会构造辅助函数并结合中值定理完成有关证明;

在应用微分中值定理时，要学会寻找“对应区间”.

1．设函数在区间$[0,1]$上连续，在内(0,1)可导，且 $f(0)=f(1)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证明：

(1)存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f\left(\eta\right)=\eta$;

(2)对任意实数λ,必存在$\xi\in(0,\eta)$，使得$f'\left(\xi\right)-\lambda\left[f\left(\xi\right)-\xi\right]=1.$

证：(1)令$\Phi(x)=f(x)-x$，则$\Phi(x)$在$[0,1]$上连续.

又$\Phi(1)-1<0,\Phi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$.

故由闭区间上连续函数的介值定理知，存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得$\Phi\left(\eta\right)=f\left(\eta\right)-\quad\eta=0$,即 f(η)=η。

(2)设 $F(x)=e^{\lambda x}\Phi(x)=e^{\lambda x}[f(x)-x]$, 则 $F(x)$在$[0,\eta]$上连续, 在$(0,\eta)$内可导,

且 $F(0)=0,F\left(\eta\right)=e^{\lambda\eta}\Phi\left(\eta\right)=0$

即在上满足罗尔定理的条件，故存在$\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\eta)=0$,即

$e^{\lambda\eta}\{f'\left(\xi\right)-\lambda\left[f\left(\xi\right)-\xi\right]-1\}=0$ 从而$f'\left(\xi\right)-\lambda\left[f\left(\xi\right)-\xi\right]=1$.

2．设抛物线 $y=-x^2+Bx+C$ 与 x 轴有两个交点 x=a，x=b.又 $f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，若曲线 $y=f(x)$与抛物线在(a,b)内有一个交点.证明：在(a,b)内存在一点，使$f''\left(\xi\right)+2=0$.

证明：设 $y=f(x)$与抛物线在(a,b)内的交点为$(c,f(c))(a<c<b)$,

构造辅助函数$\varphi(x)=f(x)-(-x^2+Bx+C)$.

由题设条件知$\varphi(x)$在$[a,b]$上也有二阶导数，且$\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$.

由罗尔定理知，存在$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$,使

$\varphi'(\xi_1)=f'(\xi_1)+2\xi_1-B=0,\varphi'(\xi_2)=f'(\xi_2)+2\xi_2=0$.

将函数$\varphi'(x)$在$[\xi_1,,\xi_2]$上再次应用罗尔定理，知存在$\xi\in(\xi_1,,\xi_2)$,

$\varphi''\left(\xi\right)=f''\left(\xi\right)+2=0$,即$f''\left(\xi\right)+2=0$.

3.设函数 $y=f(x)$具有二阶导数, 且 $f'(x)>0,f''(x)>0$，Δx 为自变量在点x_0处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$在点x_0处相应的增量与微分，若$\Delta x>0$，则______.

A.$0 < dy < \Delta y$　　B.0 $< \Delta y < dy$　　C. $\Delta y < dy < 0$　　D.dy $< \Delta y < 0$

解：当$\Delta x > 0$时，$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'\left(\xi\right)\Delta x$,其中$x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$，由于$f'(x) > 0, f''(x) > 0$，得$0 < f'(x_0) < f'(\xi)$,从而有得$0 < dy = f'(x_0)\Delta x < \Delta y = f'(\xi)\Delta x$,所以选 A 项.(此题也可以画出简单的函数图像直接判断：$f'(x) > 0$说明$f(x)$单调递增，$f''(x) > 0$说明函数为下凸函数)

4.设 $f(x)$处处可导，则________.

A.当$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,必有$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$

B.当 $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$，必有$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

C.当 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$，必有$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

D.当 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$，必有$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

解;由$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$，知存在 $x > X$,当 $x > X$ 时，$f'(x) > M$（M 为任意大正整数)，在区间$[X,x]$上运用拉格朗日中值定理，即存在$\xi \in (X,x)$,使 $f(x) - f(X) = f'(\xi)(x - X)$成立, 又$f'\left(\xi\right)(x - X) > M(x - X) \to +\infty$, $f(X)$为确定值, 从而 $f(x) \to +\infty$，选 D.

(题设越简单，越需要我们用敏锐的目光去发掘其中隐含的条件)

5.以下四个命题，正确的是______.

A.若 $f'(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

B.若 $f(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f'(x)$在$(0,1)$内有界.

C.若 $f'(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

D．若 $f(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f'(x)$在$(0,1)$内有界.

解： 设 $f(x)=\frac{1}{x}$，则$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$均在（0，1）内连续，当两函数在(0,1)内均无界，由此排除 A 和 B 项；又 $f(x)=\sqrt{x}$在(0,1)内有界，当$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$在(0,1)内无界，排除 D.对 C 项，由于 $f'(x)$在(0,1)内有界，则存在正数 M，使$|f'(x)|\le M$ 成立，取区间$(\frac{1}{2},x)\in(0,1)$,由拉格朗日定理，有 $f(x)-f(\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi)(x-\frac{1}{2})$

其中$\xi\in(\frac{1}{2},x)$，从而有 $f(x)=f'\left(\xi\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$，故$|f(x)|\le\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+|f'\left(\xi\right)|\cdot|\left(x-\frac{1}{2}\right)|\le\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\frac{1}{2}M$，这表明函数 f(x)是有界的.

6.设函数 f(x)在[a,b]上满足罗尔定理的条件，且 f(x)不恒等于常数。证明：在(a,b)内至少存在一点ξ，使 $f'(\xi)>0$.

证： 因为 f(x)在[a,b]上满足罗尔定理的条件，且不恒等于常数，所以至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)\ne f(a)\ne f(b)$.

若 $f(x_0)>f(a)$，则在$[a,x_0]$上应用拉格朗日中值定理，至少存在一点$\xi_1\in(a,x_0)$，使$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{,x_0-a}>0$.

若 $f(x_0)<f(b)$，则在$[x_0,b]$上应用拉格朗日中值定理，至少存在一点$\xi_2\in[x_0,b]$，使$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x_0)}{,b-x_0}>0$.

综合（1）和（2），可知在(a,b)内至少存在一点ξ，使 $f'(\xi)>0$.

7.已知 f(x)在$(-\infty,+\infty)$内可导，且$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e,\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=[f(x)-f(x-1)]$，求 c 的值.

解： 由条件易知，c≠0，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\cdot]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$.

由拉格朗日定理，有$[f(x)-f(x-1)]=f'(\xi)\cdot 1$，其中ξ介于 x-1 到 x 之间，

从而有$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e$,即$e^{2c}=e$，解得 c=$\frac{1}{2}$.

8.设$x_1x_2>0$，证明$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$，其中ξ在$x_1$和$x_2$之间.

证： 令 $f(x)=\frac{e^x}{x}$,$g(x)=\frac{1}{x}$，则 f(x) ,$g(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，且 $g'(x)\neq 0$, 由柯西中值定理知存在$\xi\in(x_1,x_2)$, 使$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$,即$\frac{\frac{e^{x_1}}{x_1}-\frac{e^{x_2}}{x_2}}{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}=(1-\xi)e^{\xi}$,也即$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$.

考点二：洛必达法则

\# x → 0 或 x → ∞时的两种未定式形式—— “$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$” .

\# 其他未定式如$1^{\infty},0^0,0^{\infty},\infty^0,0\cdot\infty,\infty-\infty$，均可转化为$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$的形式.

\# 幂指函数形式$f(x)^{g(x)}$常转化为$e^{g(x)\ln f(x)}$来求极限.

\# 洛必达法则与等价无穷小常常在求极限过程中结合使用.

(这个知识点不太难，所以不再一一举例，只选取一些有技巧性的题目给大家)

9.求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{a}{x}+k\sin\frac{a}{x}\right)^x (a,k\neq 0)$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\cos\frac{a}{x}+k\sin\frac{a}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=t}{\Longleftrightarrow}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(\cos at+k\sin at)}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{-a\sin at+ka\cos at}{\cos at+k\sin at}=ka$，从而原式$=e^{ka}$.

10.求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\dots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$,其中$a_1,a_2,\dots,a_n>0$.

解： 令 $y=\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\dots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$,$\ln y=nx[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\dots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n]$.

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\left\{nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\dots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]\right\}=$$

$$n\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\dots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n}{\frac{1}{x}}$$

$$=n\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\dots+a_n^{\frac{1}{x}}}}{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1\left(-\frac{1}{x^2}\right)+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\dots\right.$$

$$\left.+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=\mathrm{n}\lim_{x\to\infty}\frac{a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\dots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\dots+a_n^{\frac{1}{x}}}=\mathrm{n}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\dots+\ln a_n}{n}$$

$$=\ln(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n)$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}y=e^{\ln(a_1a_2\dots a_n)}=a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n$

11.试确定常数 A、B、C 的值，使得$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是当 $\mathrm{x}\to 0$ 时比x^3高阶的无穷小.

解：根据题设和洛必达法则，由于 $0=\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}=\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2+B+2Cx)-A}{3x^2}=\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\frac{e^x[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2)]}{6x}=\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\frac{B+4C+2Cx}{6}$.

从而$\begin{cases}1+B-A=0\\2B+2C+1=0\\B+4C=0\end{cases}$,解得 $\mathrm{A}=\frac{1}{3}$，$\mathrm{B}=-\frac{2}{3}$，$\mathrm{C}=\frac{1}{6}$

（提示：本题也可以对e^x采用泰勒公式展开进行求解）

考点三：泰勒公式

\# 记牢泰勒公式和麦克劳林公式（x=0 处）

在 $\mathrm{x}=x_0$处，$\mathrm{f(x)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\mathrm{x}-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\mathrm{x}-x_0)^{n+1}$

当$x_0=0$时，$\mathrm{f(x)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\mathrm{x}^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\mathrm{x}^{n+1}$（ξ介于 0 到 x 之间）

牢记常用的六个泰勒展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+\mathrm{x}+x^2+\dots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^m=1+\mathrm{mx}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\cdot\dots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

当涉及二阶以上的导数时，考虑用泰勒公式求解.

泰勒公式求极限时如何展开？（相关内容已发送到班群里面）

与泰勒公式有关的证明题（难度一般在中等偏上）

12.求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解：原式=$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})]=\lim\limits_{x\to\infty}[\mathrm{x}-\mathrm{x}+\frac{1}{2}+\frac{o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}]=\frac{1}{2}$

13. 试证明：若 $\mathrm{f(x)}$在$[\mathrm{a,b}]$上具有二阶导数，且$\mathrm{f}'(\mathrm{a})=\mathrm{f}'(\mathrm{b})=0$，则存在$\xi\in(\mathrm{a,b})$，使$|\mathrm{f}''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证明：将 $\mathrm{f}(\frac{a+b}{2})$分别在 a 和 b 点展开，得

$$\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{a+b}}{2}\right)=\mathrm{f(a)}+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{\mathrm{b-a}}{2})^2,\xi_1\in(\mathrm{a},\frac{\mathrm{a+b}}{2})$$

$$\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{a+b}}{2}\right)=\mathrm{f(b)}+\frac{\mathrm{f}''(\xi_2)}{2}(\frac{\mathrm{b-a}}{2})^2,\xi_2\in(\frac{\mathrm{a+b}}{2},\mathrm{b})$$

令$\left|\mathrm{f}''\left(\xi\right)\right|=\max\{\left|f''(\xi_1)\right|,|\mathrm{f}''(\xi_2)|\}$,则

$|f(b)-f(a)|=|\frac{f''(\xi_2)}{2}-\frac{f''(\xi_1)}{2}|\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\le\left|f''\left(\xi\right)\right|\frac{(b-a)^2}{4}$.

即存在$\xi\in(a,b)$，使$|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.证毕

考点四：函数的单调性、凹凸性、极值和最大值

利用和函数的单调性（构造函数）和凹凸性（利用定义）进行证明

掌握一阶导数和二阶导数为零的点的意义以及它们在零点左右的正负与凹凸性、极值、最大值的关系

1) 若x_0为函数 f(x)的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$；若x_0为函数 f(x)的拐点，则必有 $f''(x_0)=0$(但这两个结论反过来讲不成立)
2) 函数凹凸性的判定：$f''(x_0)\ge0$，函数下凸，$f''(x_0)\le0$，函数下凸
3) 函数极值的第二判定法：f(x)有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，若 $f''(x_0)>0$，则x_0为函数 f(x)的极小值点；$f''(x_0)<0$，则x_0为函数 f(x)的极大值点

掌握判断极值的一个快捷方法：

设函数 f(x)在x_0处具有 n 阶导数，且$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{n}(x_0)\ne0$,当 n 为奇数时，函数 f(x)在$x_0$处不取得极值；当 n 为偶数时，$f^{n}(x_0)<0$，函数 $f(x_0)$为极大值；$f^{n}(x_0)>0$，函数 $f(x_0)$为极小值

（用泰勒公式证明即可）

14.设 f(x)在$(-\infty,+\infty)$上可导,且对任意x_1,x_2,当$x_1>x_2$时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则______.

A.对任意 x，$f'(x)>0$　　　　B.对任意 x, $f'(-x)\le0$

C.函数 $f(-x)$单调增加　　　　D.函数$-f(-x)$单调增加

解：当$x_1 > x_2$时，$-x_1 < -x_2$，则 $f(-x_1) > f(-x_2)$，从而$-f(-x_1) < -f(-x_2)$，即$-f(-x)$单调增加。(本题易误选 A 项，由题意我们不能得出 f(x)严格单调，所以 $f'(x) \geq 0$)

15.设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，$f''(x)$在$[a,+\infty)$上存在且大于零，记 $F(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x > a)$，证明:$F(x)$在$[a,+\infty)$内单调递增.

证明： 只需证明 $F'(x) > 0$ 即可。

$F'(x) = \frac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a}[f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}]$,由拉格朗日中值定理，存在**ξ**$\in(a,x)$,使 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$,于是有$\frac{1}{x-a}[f'(x) - f'(\xi)]$,又因为 $f''(x) > 0$，知$f'(x)$在$[a,+\infty)$上单调递增，于是$f'(x) > f'(\xi)$，从而 $F'(x) > 0$，即 $F(x)$在$[a,+\infty)$内单调递增.

16.设$f''(x) < 0$,$f(0) = 0$,证明对任何$x_1 > 0$,$x_2 > 0$,有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

证明: 令 $F(x) = f(x + x_2) - f(x)$,则 $F'(x) = f'(x + x_2) - f'(x) = x_2 f''(x + \theta x_2) < 0$,所以 $F(x)$单调减少,故 $F(x_1) < F(0)$,即 $f(x_1 + x_2) - f(x_1) < f(0 + x_2) - f(0)$,由 $f(0) = 0$，即得 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

17.证明：当 $0 < x < \pi$时，有$\sin\frac{\pi}{2} > \frac{x}{\pi}$.

证明：设 $f(x) = \sin\frac{\pi}{2} - \frac{x}{\pi}$,有$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}$,$f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} < 0$.故函数对应的曲线在$(0,\pi)$内为上凸的.又 $f(0) = f(\pi) = 0$,故在$(0,\pi)$内 $f(x) > 0$,即$\sin\frac{\pi}{2} > \frac{x}{\pi}$.

18.假设函数 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数，并且$g''(x) \neq 0$,$f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$，试证：

(1)在开区间（a,b）内 $g(x) \neq 0$；

(2)在开区间（a,b）内至少存在一点ξ，使$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

证明：（1）用反证法。若存在点 c$\in$ (a,b),使 $g(c) = 0$,则对 $g(x)$分别在[a,c]、[c,b]上分别运用罗尔定理，知存在$\xi_1 \in (a,c)$，和$\xi_2 \in (c,b)$，使$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$,再对 $g'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理，存在$\xi_3 \in (\xi_1,\xi_2)$，使$g''(\xi_3) = 0$，这与题设相矛盾，故在开区间（a,b）内 $g(x) \neq 0$.

(2)令$\varphi(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$，易知$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.对$\varphi(x)$在[a,b]上应用罗尔定理存在$\xi\in (a,b)$，使$\varphi'\left(\xi\right) = 0$，即 $f\left(\xi\right)g''\left(\xi\right) - f''\left(\xi\right)g\left(\xi\right) = 0$.因$g(\xi) \neq 0,g''(x) \neq 0$，故得$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

19.设 $f(x)$在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)\cdot f(b) > 0,f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$，试证至少有一点$\xi \in (a,b)$，使$f'\left(\xi\right) = f(\xi)$.

证明：设 $F(x) = f(a)e^{-x}f(x)$，则 $F(a) = f^2(a)e^{-a} > 0,F\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)e^{-\frac{a+b}{2}} < 0,F(b) = f(a)f(b)e^{-b} > 0$，

由零点定理得存在$\xi_1 \in (a,\frac{a+b}{2})$，和$\xi_2 \in (\frac{a+b}{2},b)$，使$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$，在再区$[\xi_1,\xi_2]$间上使用罗尔定理便得结果.

考点五：曲率的计算

\# 掌握曲率的计算公式：$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

\# 曲率与曲率半径的关系$\rho = \frac{1}{K}$

第四章　不定积分、定积分、定积分的应用

- 不定积分、定积分的概念与性质
- 不定积分、定积分的换元积分法和分部积分法
- 有理函数的积分

微积分基本公式

广义积分

定积分在几何和物理上的应用

重要考点题型通关

考点一：不定积分的计算

\# <u>算完不定积分后，一定要记得加常数 C!!!</u>

\# 计算不定积分的几种方法

1)第一类换元法（凑微分法）

2)第二类换元法（引入新的函数）

3)三角代换（利用的三角关系有：$sin^{2}x+cos^{2}=1;1+tan^{2}x=sec^{2}x;1+cot^{2}x=csc^{2}x$）

4)万能代换法(令$u=\tan\frac{x}{2}$,则$x=2\arctan x$,$dx=\frac{2du}{1+u^{2}},\sin x=\frac{2u}{1+u^{2}},\cos x=\frac{1-u^{2}}{1+u^{2}}$)

5)利用半角公式降幂（$\cos 2x=1-2\,sin^{2}x=2\,cos^{2}x-1$）

6)倒代换（化去分式）

7)分部积分法（找准 v 和 u 很关键，被积函数为***幂函数×指数函数***或***幂函数×三角函数，***那么可以写成 ***d（指数函数）***或 ***d（三角函数）***形式；若被积函数为***幂函数×对数函数***或***幂函数×反三角函数，***那么可以写成 ***d（幂函数）***形式）

8)积分递推公式（$I_n=\int sin^{n}x=\int cos^{n}x, I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$）

1．求下列不定积分

(1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$　(2)$\int\frac{dx}{sin^2x+5cos^2x}$　(3) $\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$　(4) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}$

(5) $\int e^{2x}(1+\tan x)^2$ (6) $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}$ (7) $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

解：（1）解法一：原式=$\int\frac{1-\sin x}{cos^2x}dx=\tan x-\frac{1}{\cos x}+\mathrm{C}$

解法二：原式=$\int\frac{dx}{(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})^2}=\int\frac{sec^2\frac{x}{2}dx}{(1+\tan\frac{x}{2})^2}=2\int\frac{d(1+\tan\frac{x}{2})}{(1+\tan\frac{x}{2})^2}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$

（2）原式=$\int\frac{dx}{cos^2x(5+tan^2x)}=\int\frac{sec^2xdx}{5+tan^2x}=\int\frac{d(\tan x)}{(\sqrt{5})^2+tan^2x}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{5}}+\mathrm{C}$

（3）设 $\mathrm{x}=\tan u$,则 $\mathrm{dx}=sec^2udu$,原式=$\int\frac{du}{\cos x\,(2tan^2x+1)}=\int\frac{\cos udu}{2sin^2x+cos^2x}=$

$\int\frac{d(sin)}{1+sin^2x}=\arctan(\sin u)+C=\arctan(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+C$

（4）设 $\mathrm{x}=\frac{1}{t}$，那么 $\mathrm{dx}=-\frac{1}{t^2}dt$，于是原式=$\int\frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)=-\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}|t|\,\mathrm{dt}$,当 $\mathrm{x}>0$ 时，有 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}=-\frac{1}{2a^2}(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}d(a^2t^2-1)\ -\frac{(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$,当 $\mathrm{x}<0$ 时，结果相同，故无论何种情形，都有$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$

（5）原式=$\int e^{2x}sec^2\mathrm{x}\mathrm{dx}+2\int e^{2x}\tan x=\int e^{2x}d\tan x+2\int e^{2x}\tan x$

$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x+2\int e^{2x}\tan x=e^{2x}\tan x$

（6）先分部积分后变量代换

原式=$\int xd\left(2\sqrt{e^x-2}\right)=2x\sqrt{e^x-2}-2\int\sqrt{e^x-2}\,dx$

令$e^x-2=t^2$,$e^x=t^2+2$,$x=\ln(t^2+2)$,$dx=\frac{2tdt}{t^2+2}$

$$\int\sqrt{e^x-2}=\int t\frac{2tdt}{t^2+2}=2\int(1-\frac{2}{t^2+2})dt=2t-\frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

从而$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}=2x\sqrt{e^x-2}-4\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}}+\mathrm{C}$

（7）$\int\frac{\sin x+cosx}{\sin x+\cos x}dx=\mathrm{x}+\mathrm{C}$, $\int\frac{\sin x-cosx}{\sin x+\cos x}dx=-\ln|\sin x+\cos x|+\mathrm{C'}$

所以$\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{\sin x+cosx}{\sin x+\cos x}dx+\ \int\frac{\sin x-cosx}{\sin x+\cos x}dx\right]=\frac{1}{2}(\mathrm{x}-\ln|\sin x+\cos x|)+C$

考点二：定积分的有关运用

\# 利被积函数用定积分的定义求极限（重点要找对积分区间和）

\# 利用定积分的保号性比较积分大小、估值定理估值

\# 定积分是一个常数（如$\int_a^b f(x)dx$）

\# 求定积分表达式，注意积分上下限（一般这种题是下限确定而上限为变量）

\# 注意被积变量（有时候写的是 dt 但前面又出现 x，这时候我们要把 x 看成常数）

\# 变上限积分的求导：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_{\beta(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\varphi^{'}(x) - f[\beta(x)]\beta'(x)$(利用积分求极限、讨论含积分的分段函数的时候常常会用到这一性质)

\# 定积分换元积分和分部积分的几个便捷公式：

1)$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]\,dx$

2)$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx\text{，} f(x)\textit{为偶函数} \\ 0, f(x)\textit{为奇函数} \end{cases}$

3)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

4)$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

5)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\text{，n 为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\text{，n 为奇数} \end{cases}$

\# 与定积分有关的证明题

2.求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})$.

分析　将这类问题转化为定积分主要是确定被积函数和积分上下限.若对题目中被积函数难以想到，可采取如下方法：先对区间$[0,\ 1]$ n等分写出积分和，再与所求极限相比较来找出被积函数与积分上下限．

解　将区间$[0,\ 1]$ n等分，则每个小区间长为$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，然后把$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$的一个因子$\frac{1}{n}$乘入和式中各项．于是将所求极限转化为求定积分．即

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}})=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}$．

3.$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$ =________.

解法 1　由定积分的几何意义知，$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$等于上半圆周$(x-1)^2+y^2=1$（$y\geq 0$）

与x轴所围成的图形的面积．故$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$．

解法 2　本题也可直接用换元法求解．令$x-1=\sin t$　（$-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$），则

$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2}$

4.比较$\int_2^1 e^x dx$，$\int_2^1 e^{x^2}dx$，$\int_2^1(1+x)dx$．

分析 对于定积分的大小比较，可以先算出定积分的值再比较大小，而在无法求出积分值时则只能利用定积分的性质通过比较被积函数之间的大小来确定积分值的大小．

解法 1　在$[1,2]$上，有$e^x\leq e^{x^2}$．而令$f(x)=e^x-(x+1)$，则$f'(x)=e^x-1$．当$x>0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，从而$f(x)>f(0)$，可知在$[1,2]$上，有$e^x>1+x$．又

$\int_2^1 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx$，从而有$\int_2^1 (1+x)dx > \int_2^1 e^x dx > \int_2^1 e^{x^2} dx$．

解法 2　在$[1,2]$上，有$e^x \le e^{x^2}$．由泰勒中值定理$e^x = 1 + x + \frac{e^\xi}{2!}x^2$得$e^x > 1 + x$．注意到$\int_2^1 f(x)dx = -\int_1^2 f(x)dx$．因此

$$\int_2^1 (1+x)dx > \int_2^1 e^x dx > \int_2^1 e^{x^2} dx.$$

5. 估计定积分$\int_2^0 e^{x^2-x}dx$的值．

分析　要估计定积分的值，关键在于确定被积函数在积分区间上的最大值与最小值．

解　设$f(x)=e^{x^2-x}$，因为$f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$，令$f'(x)=0$，求得驻点$x=\frac{1}{2}$，而

$f(0)=e^0=1$，$f(2)=e^2$，$f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$，

故

$$e^{-\frac{1}{4}} \le f(x) \le e^2,\ x \in [0,2],$$

从而

$$2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2,$$

所以

$$-2e^2 \le \int_2^0 e^{x^2-x}dx \le -2e^{-\frac{1}{4}}.$$

6. 设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$g(x)\ge 0$，$f(x)>0$．求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx$．

解　由于$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有最大值M和最小值m．由$f(x)>0$知$M>0$，$m>0$．又$g(x)\ge 0$，则

$$\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx \le \sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)dx.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_a^b g(x)dx.$$

7.求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$，$p,n$为自然数.

分析　这类问题如果先求积分然后再求极限往往很困难, 解决此类问题的常用方法是利用积分中值定理与夹逼准则.

解法 1　利用积分中值定理

设$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，显然$f(x)$在$[n,n+p]$上连续，由积分中值定理得

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p,\quad \xi\in[n,n+p],$$

当$n\to\infty$时，$\xi\to\infty$，而$|\sin\xi|\le 1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p=0.$$

解法 2　利用积分不等式

因为

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\int_n^{n+p}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\le\int_n^{n+p}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{n+p}{n},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+p}{n}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.$$

8. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$.

解法 1　由积分中值定理$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$可知

$$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx,\quad 0\le\xi\le 1.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$ 且 $$\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+\xi}\le 1$$，

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$$.

解法 2　因为 $0\le x\le 1$，故有

$$0\le\frac{x^n}{1+x}\le x^n$$.

于是可得

$$0\le\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\le\int_0^1 x^n dx$$.

又由于

$$\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)$$.

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$$.

9.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $4\int_{\frac{3}{4}}^1 f(x)dx=f(0)$．证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

分析　由条件和结论容易想到应用罗尔定理，只需再找出条件 $f(\xi)=f(0)$ 即可.

证明　由题设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由积分中值定理，可得

$$f(0)=4\int_{\frac{3}{4}}^1 f(x)dx=4f(\xi)(1-\frac{3}{4})=f(\xi)$$，

其中 $\xi\in[\frac{3}{4},1]\subset[0,1]$．于是由罗尔定理，存在 $c\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使得 $f'(c)=0$．证毕.

10. （1）若 $f(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$，则 $f'(x)$ =___；（2）若 $f(x)=\int_0^x xf(t)dt$，求 $f'(x)$ =___.

分析　这是求变限函数导数的问题，利用下面的公式即可

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f[v(x)]v'(x) - f[u(x)]u'(x).$$

解　（1）$f'(x)=2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$；

（2）由于在被积函数中 x 不是积分变量，故可提到积分号外即 $f(x)=x\int_0^x f(t)dt$，则可得

$$f'(x)=\int_0^x f(t)dt + xf(x).$$

11. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$，则 $f(26)$ =________.

解　对等式 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$ 两边关于 x 求导得

$f(x^3-1)\cdot 3x^2 = 1$，

故 $f(x^3-1)=\dfrac{1}{3x^2}$，令 $x^3-1=26$ 得 $x=3$，所以 $f(26)=\dfrac{1}{27}$.

12. 函数 $F(x)=\int_1^x (3-\frac{1}{\sqrt{t}})dt\ (x>0)$ 的单调递减开区间为________.

解　$F'(x)=3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，令 $F'(x)<0$ 得 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>3$，解之得 $0<x<\dfrac{1}{9}$，即 $(0,\dfrac{1}{9})$ 为所求.

13. 求 $f(x)=\int_0^x (1-t)\arctan t dt$ 的极值点.

解　由题意先求驻点．于是 $f'(x)=(1-x)\arctan x$．令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，$x=0$．列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，$x=0$ 为极小值点.

14. 已知两曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$在点$(0,0)$处的切线相同，其中

$g(x)=\int_0^{\arcsin x} e^{-t^2}dt$， $x\in[-1,1]$，

试求该切线的方程并求极限$\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{3}{n})$.

分析　两曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$在点$(0,0)$处的切线相同，隐含条件$f(0)=g(0)$，$f'(0)=g'(0)$.

解　由已知条件得

$$f(0)=g(0)=\int_0^0 e^{-t^2}dt=0,$$

且由两曲线在$(0,0)$处切线斜率相同知

$$f'(0)=g'(0)=\left.\frac{e^{-(\arcsin x)^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0}=1.$$

故所求切线方程为$y=x$. 而

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{3}{n})=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{f(\frac{3}{n})-f(0)}{\frac{3}{n}-0}=3f'(0)=3.$$

15. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^2 tdt}{\int_x^0 t(t-\sin t)dt}$；

分析　该极限属于$\frac{0}{0}$型未定式，可用洛必达法则.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^2 tdt}{\int_x^0 t(t-\sin t)dt}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x(\sin x^2)^2}{(-1)\cdot x\cdot(x-\sin x)}=(-2)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2)^2}{x-\sin x}=(-2)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3}{1-\cos x}$

$=(-2)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{12x^2}{\sin x}=0$.

注　此处利用等价无穷小替换和多次应用洛必达法则.

16. 试求正数a与b，使等式$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x-b\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$成立.

分析　易见该极限属于$\frac{0}{0}$型的未定式，可用洛必达法则．

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x-b\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{1-b\cos x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-b\cos x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-b\cos x}=1$$，

由此可知必有$\lim\limits_{x\to 0}(1-b\cos x)=0$，得$b=1$．又由

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a}}=1$$，

得$a=4$．即$a=4$，$b=1$为所求．

17. 设$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的（　　）．

A．等价无穷小．　B．同阶但非等价的无穷小．　C．高阶无穷小．　D．低阶无穷小．

解法 1　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cdot\cos x}{3x^2+4x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3+4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{3}$$．

故$f(x)$是$g(x)$同阶但非等价的无穷小．选 B．

解法 2　将$\sin t^2$展成t的幂级数，再逐项积分，得到

$$f(x)=\int_0^{\sin x}[t^2-\frac{1}{3!}(t^2)^3+\cdots]dt=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{42}\sin^7 x+\cdots$$，

则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x(\frac{1}{3}-\frac{1}{42}\sin^4 x+\cdots)}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{42}\sin^4 x+\cdots}{1+x}=\frac{1}{3}$$．

18 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单调增加，则有

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

证法 1　令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，当 $t\in[a,x]$ 时，$f(t)\leq f(x)$，则

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$$

$$\geq\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(x)dt=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f(x)=0.$$

故 $F(x)$ 单调增加．即 $F(x)\geq F(a)$，又 $F(a)=0$，所以 $F(x)\geq 0$，其中 $x\in[a,b]$．

从而

$$F(b)=\int_a^b xf(x)dx-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx\geq 0.$$ 证毕．

证法 2　由于 $f(x)$ 单调增加，有 $(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\geq 0$，从而

$$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]dx\geq 0.$$

即

$$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\geq\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2})dx=f(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx=0.$$

故

$$\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

19.计算 $\int_{-1}^2|x|dx$.

分析　被积函数含有绝对值符号，应先去掉绝对值符号然后再积分．

解　$\int_{-1}^2|x|dx=\int_{-1}^0(-x)dx+\int_0^2 xdx=[-\frac{x^2}{2}]_{-1}^0+[\frac{x^2}{2}]_0^2=\frac{5}{2}$.

注　在使用牛顿 - 莱布尼兹公式时,应保证被积函数在积分区间上满足可积条件．如

$\int_{-2}^{3}\frac{1}{x^2}dx=[-\frac{1}{x}]_{-2}^{3}=\frac{1}{6}$，则是错误的．错误的原因则是由于被积函数$\frac{1}{x^2}$在$x=0$处间断且在被积区间内无界.

20.计算$\int_0^2 \max\{x^2,x\}dx$．

分析　被积函数在积分区间上实际是分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 1<x\le 2\\ x & 0\le x\le 1\end{cases}.$$

解　$\int_0^2 \max\{x^2,x\}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^2dx=[\frac{x^2}{2}]_0^1+[\frac{x^3}{3}]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{17}{6}$

21. 设$f(x)$是连续函数，且$f(x)=x+3\int_0^1 f(t)dt$，则$f(x)=$________．

分析　本题只需要注意到定积分$\int_a^b f(x)dx$是常数（a,b为常数)．

解　因$f(x)$连续，$f(x)$必可积，从而$\int_0^1 f(t)dt$是常数，记$\int_0^1 f(t)dt=a$，则$f(x)=x+3a$，且$\int_0^1(x+3a)dx=\int_0^1 f(t)dt=a$．

所以

$[\frac{1}{2}x^2+3ax]_0^1=a$，即$\frac{1}{2}+3a=a$，

从而$a=-\frac{1}{4}$，所以 $f(x)=x-\frac{3}{4}$．

22. 设$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\le x<1\\ 5-2x, & 1\le x\le 2\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，$0\le x\le 2$，求$F(x)$，并讨论$F(x)$的连续性．

分析　由于$f(x)$是分段函数，故对$F(x)$也要分段讨论．

解　（1）求$F(x)$的表达式．

$F(x)$的定义域为$[0,2]$．当$x\in[0,1]$时，$[0,x]\subset[0,1]$，因此

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 3t^2dt=[t^3]_0^x=x^3.$$

当$x\in(1,2]$时，$[0,x]=[0,1]\cup[1,x]$，因此，则

$$F(x)=\int_0^1 3t^2dt+\int_1^x(5-2t)dt=[t^3]_0^1+[5t-t^2]_1^x=-3+5x-x^2,$$

故

$$F(x)=\begin{cases}x^3, & 0\le x<1\\ -3+5x-x^2, & 1\le x\le 2\end{cases}.$$

(2) $F(x)$在$[0,1)$及$(1,2]$上连续，在$x=1$处，由于

$$\lim_{x\to1^+}F(x)=\lim_{x\to1^+}(-3+5x-x^2)=1,\quad \lim_{x\to1^-}F(x)=\lim_{x\to1^-}x^3=1,\quad F(1)=1.$$

因此，$F(x)$在$x=1$处连续，从而$F(x)$在$[0,2]$上连续．

错误解答　（1）求$F(x)$的表达式，

当$x\in[0,1)$时，

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 3t^2dt=[t^3]_0^x=x^3.$$

当$x\in[1,2]$时，有

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(5-2t)dt=5x-x^2.$$

故由上可知

$$F(x)=\begin{cases}x^3, & 0\le x<1\\ 5x-x^2, & 1\le x\le 2\end{cases}.$$

(2) $F(x)$在$[0,1)$及$(1,2]$上连续，在$x=1$处，由于

$$\lim_{x\to1^+}F(x)=\lim_{x\to1^+}(5x-x^2)=4,\quad \lim_{x\to1^-}F(x)=\lim_{x\to1^-}x^3=1,\quad F(1)=1.$$

因此，$F(x)$在$x=1$处不连续，从而$F(x)$在$[0,2]$上不连续．

错解分析　上述解法虽然注意到了$f(x)$是分段函数，但（1）中的解法是错误的，因

为当 $x\in[1,2]$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 中的积分变量 t 的取值范围是 $[0,2]$，$f(t)$ 是分段函数，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$

才正确.

23.计算 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$.

分析　由于积分区间关于原点对称，因此首先应考虑被积函数的奇偶性.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$. 由于 $\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，而 $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，有 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=0$，于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx=4\int_0^1dx-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

由定积分的几何意义可知 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$，故

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1dx-4\cdot\frac{\pi}{4}=4-\pi.$$

24.计算 $\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

分析　被积函数中含有 $\frac{1}{x}$ 及 $\ln x$，考虑凑微分.

解 $\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}=\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{2d(\sqrt{\ln x})}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$

$=[2\arcsin(\sqrt{\ln x})]_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{6}$.

25.计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos x}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx$$

$$=[\frac{1}{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{4}}-[\tan x-x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-2+\sqrt{2}.$$

注　此题为三角有理式积分的类型，也可用万能代换公式来求解，请读者不妨一试.

26.计算$\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}dx$，其中$a>0$.

解　$\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}dx=\int_0^{2a}x\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx$，令$x-a=a\sin t$，则

$$\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}dx=a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 tdt$$

$$=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt+0=\frac{\pi}{2}a^3.$$

注　若定积分中的被积函数含有$\sqrt{a^2-x^2}$，一般令$x=a\sin t$或$x=a\cos t$.

27.计算$\int_0^{a}\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$，其中$a>0$.

解法 1　令$x=a\sin t$，则

$$\int_0^{a}\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\frac{(\sin t+\cos t)'}{\sin t+\cos t}]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[t+\ln|\sin t+\cos t|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

解法 2　令$x=a\sin t$，则

$$\int_0^{a}\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt.$$

又令$t=\frac{\pi}{2}-u$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\sin u+\cos u}du.$$

所以，

$$\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt]=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{4}.$$

注　如果先计算不定积分$\int\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$，再利用牛顿－莱布尼兹公式求解,则比较复杂，由此可看出定积分与不定积分的差别之一.

28.计算$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

分析　被积函数中含有根式，不易直接求原函数，考虑作适当变换去掉根式.

解　设$u=\sqrt{e^x-1}$，$x=\ln(u^2+1)$，$dx=\frac{2u}{u^2+1}du$，则

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\int_0^2\frac{(u^2+1)u}{u^2+4}\cdot\frac{2u}{u^2+1}du=2\int_0^2\frac{u^2}{u^2+4}du=2\int_0^2\frac{u^2+4-4}{u^2+4}du$$

$$=2\int_0^2 du-8\int_0^2\frac{1}{u^2+4}du=4-\pi.$$

29.计算$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$，其中$f(x)$连续.

分析　要求积分上限函数的导数，但被积函数中含有x，因此不能直接求导，必须先换元使被积函数中不含x，然后再求导.

解　由于

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)dt^2.$$

故令$x^2-t^2=u$，当$t=0$时$u=x^2$；当$t=x$时$u=0$，而$dt^2=-du$，所以

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)(-du)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du,$$

故

$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt = \frac{d}{dx}[\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du] = \frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x = xf(x^2)$.

错误解答 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt = xf(x^2-x^2)=xf(0)$.

错解分析 这里错误地使用了变限函数的求导公式，公式

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

中要求被积函数 $f(t)$ 中不含有变限函数的自变量 x，而 $f(x^2-t^2)$ 含有 x，因此不能直接求导，而应先换元.

30.计算 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin xdx$.

分析 被积函数中出现幂函数与三角函数乘积的情形，通常采用分部积分法.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin xdx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} xd(-\cos x) = [x\cdot(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\cos x)dx$

$$=-\frac{\pi}{6}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos xdx = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}.$$

31.计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(3-x)^2}dx$.

分析 被积函数中出现对数函数的情形，可考虑采用分部积分法.

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(3-x)^2}dx = \int_0^1 \ln(1+x)d(\frac{1}{3-x}) = [\frac{1}{3-x}\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(3-x)}\cdot\frac{1}{(1+x)}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\int_0^1(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3-x})dx$$

$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 3$.

32.计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin xdx$.

分析　被积函数中出现指数函数与三角函数乘积的情形通常要多次利用分部积分法.

解　由于$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x de^x = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$，　　　　　　　　　　（1）

而

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x de^x = [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot (-\sin x) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx - 1$，　　　　　　　　　　（2）

将（2）式代入（1）式可得

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - [\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx - 1]$，

故

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$.

33.计算$\int_0^1 x \arcsin x dx$.

分析　被积函数中出现反三角函数与幂函数乘积的情形，通常用分部积分法.

解　$\int_0^1 x \arcsin x dx = \int_0^1 \arcsin x d(\frac{x^2}{2}) = [\frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} d(\arcsin x)$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.　　　　　　　　　　（1）

令$x = \sin t$，则

$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} d\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = [\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.　　　　　　　　　　（2）

将（2）式代入（1）式中得

$\int_0^1 x\arcsin x dx = \frac{\pi}{8}$.

34.设$f(x)$在$[0,\pi]$上具有二阶连续导数，$f'(\pi)=3$且$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\cos x dx = 2$，求$f'(0)$.

分析　被积函数中含有抽象函数的导数形式，可考虑用分部积分法求解.

解　由于$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\cos x dx = \int_0^{\pi} f(x) d\sin x + \int_0^{\pi}\cos x df'(x)$

$=\{[f(x)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\sin x dx\} + \{[f'(x)\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\sin x dx\}$

$=-f'(\pi)-f'(0)=2$.

故 $f'(0)=-2-f'(\pi)=-2-3=-5$.

35.（97 研）　设函数$f(x)$连续，

$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$　（A为常数），

求$\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

分析　求$\varphi'(x)$不能直接求，因为$\int_0^1 f(xt)dt$中含有$\varphi(x)$的自变量x，需要通过换元将x

从被积函数中分离出来，然后利用积分上限函数的求导法则，求出$\varphi'(x)$，最后用函数连续的定义来判定$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

解　由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$知$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，而$f(x)$连续，所以$f(0)=0$，$\varphi(0)=0$.

当$x\neq 0$时，令$u=xt$，$t=0$，$u=0$；$t=1$，$u=x$. $dt=\frac{1}{x}du$，则

$\varphi(x)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x}$，

从而

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad (x\neq 0)$$.

又因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$，即 $\varphi'(0)=\frac{A}{2}$. 所以

$$\varphi'(x)=\begin{cases}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{A}{2}, & x=0\end{cases}$$.

由于

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$.

从而知 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注　这是一道综合考查定积分换元法、对积分上限函数求导、按定义求导数、讨论函数在一点的连续性等知识点的综合题. 而有些读者在做题过程中常会犯如下两种错误:

（1）直接求出

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$$,

而没有利用定义去求 $\varphi'(0)$，就得到结论 $\varphi'(0)$ 不存在或 $\varphi'(0)$ 无定义, 从而得出 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续的结论.

（2）在求 $\lim_{x\to 0}\varphi'(x)$ 时，不是去拆成两项求极限，而是立即用洛必达法则，从而导致

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\frac{xf'(x)+f(x)-f(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f'(x).$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ 用洛必达法则得到 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=A$，出现该错误的原因是由于使用洛必达法则需要有条件：$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内可导．但题设中仅有 $f(x)$ 连续的条件，因此上面出现的 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 是否存在是不能确定的．

36.（00 研） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且

$\int_0^{\pi}f(x)dx=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=0$．

试证在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$．

分析 本题有两种证法：一是运用罗尔定理，需要构造函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，找出 $F(x)$ 的三个零点，由已知条件易知 $F(0)=F(\pi)=0$，$x=0$，$x=\pi$ 为 $F(x)$ 的两个零点，第三个零点的存在性是本题的难点．另一种方法是利用函数的单调性，用反证法证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 之间存在两个零点．

证法 1 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,\ 0\le x\le\pi$，则有 $F(0)=0,\ F(\pi)=0$．又

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos xdF(x)=[\cos xF(x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx$$

$$=\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx=0,$$

由积分中值定理知，必有 $\xi\in(0,\pi)$，使得

$$\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx=F(\xi)\sin\xi\cdot(\pi-0).$$

故 $F(\xi)\sin\xi=0$．又当 $\xi\in(0,\pi),\ \sin\xi\ne 0$，故必有 $F(\xi)=0$．

于是在区间 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上对 $F(x)$ 分别应用罗尔定理，知至少存在

$\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，

使得

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$．

证法 2 由已知条件 $\int_0^{\pi}f(x)dx=0$ 及积分中值定理知必有

$\int_0^{\pi} f(x)dx = f(\xi_1)(\pi - 0) = 0$ ， $\xi_1 \in (0,\pi)$ ，

则有 $f(\xi_1) = 0$.

若在 $(0,\pi)$ 内，$f(x) = 0$ 仅有一个根 $x = \xi_1$ ，由 $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ 知 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内异号，不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x) > 0$ ，在 (ξ_1,π) 内 $f(x) < 0$ ，由

$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$ ， $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$ ，

以及 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 内单调减，可知：

$0 = \int_0^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)dx = \int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)dx + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x - \cos\xi_1)dx > 0$.

由此得出矛盾．故 $f(x) = 0$ 至少还有另一个实根 ξ_2 ， $\xi_1 \ne \xi_2$ 且 $\xi_2 \in (0,\pi)$ 使得

$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$

考点三：广义积分

计算过程与求定积分过程相同，只是多了要求极限的步骤

37.计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$.

分析　该积分是无穷限的的反常积分，用定义来计算．

解 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \int_0^t (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3})dx$

$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} [\ln\frac{x+1}{x+3}]_0^t = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} (\ln\frac{t+1}{t+3} - \ln\frac{1}{3})$

$= \frac{\ln 3}{2}$.

38.计算 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2 - 2x}}$.

解 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2 - 2x}} = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{(x-1)^2 - 1}} \xlongequal{x-1=\sec\theta} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta\tan\theta} d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

39.计算 $\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$.

分析　该积分为无界函数的反常积分，且有两个瑕点，于是由定义，当且仅当 $\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$ 和 $\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$ 均收敛时，原反常积分才是收敛的.

解　由于

$$\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}=\lim_{a\to 2^+}\int_a^3\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}=\lim_{a\to 2^+}\int_a^3\frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}}$$

$$=\lim_{a\to 2^+}[\arcsin(x-3)]_a^3=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}=\lim_{b\to 4^-}\int_3^b\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}=\lim_{b\to 4^-}\int_3^b\frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}}$$

$$=\lim_{b\to 4^-}[\arcsin(x-3)]_3^b=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

40.计算 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$.

分析　此题为混合型反常积分，积分上限为 $+\infty$，下限 0 为被积函数的瑕点.

解　令 $\sqrt{x}=t$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}=\int_0^{+\infty}\frac{2tdt}{t(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

再令 $t=\tan\theta$，于是可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan\theta}{(\tan^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^3\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sec^3\theta}$$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta) d\sin\theta$

$= [\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$.

41.计算 $\int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$.

解　由于

$$\int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2},$$

可令 $t = x - \frac{1}{x}$，则当 $x = -\sqrt{2}$ 时，$t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $x \to 0^-$ 时，$t \to +\infty$；当 $x \to 0^+$ 时，$t \to -\infty$；当 $x = 1$ 时，$t = 0$；故有

$$\int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2} + \int_{0}^{1} \frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2}$$

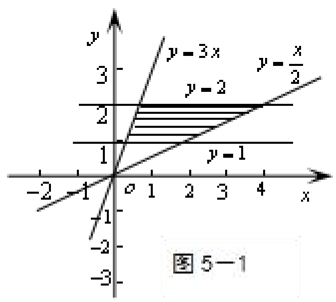
$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{d(t)}{2+t^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\pi + \arctan\frac{1}{2}).$$

注　有些反常积分通过换元可以变成非反常积分，如 33、38、40；而有些非反常积分通过换元却会变成反常积分，如 41，因此在对积分换元时一定要注意此类情形.

考点四：定积分的应用

将书本上举的例子看懂，明白公式推导过程



42.求由曲线 $y=\frac{1}{2}x$，$y=3x$，$y=2$，$y=1$ 所围成的图形的面积.

分析　若选 x 为积分变量，需将图形分割成三部分去求，如图 5 - 1 所示，此做法留给读者去完成．下面选取以 y 为积分变量.

解　选取 y 为积分变量，其变化范围为 $y\in[1,2]$，则面积元素为

$$dA=|2y-\frac{1}{3}y|dy=(2y-\frac{1}{3}y)dy.$$

于是所求面积为

$$A=\int_1^2(2y-\frac{1}{3}y)dy=\frac{5}{2}.$$

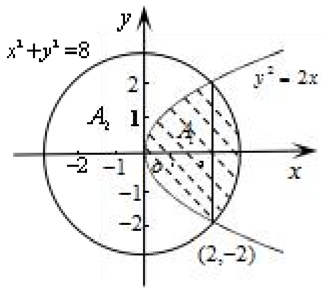


图 5 - 2

43.抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2=8$ 分成两部分，求这两部分面积之比.

解　抛物线 $y^2=2x$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 的交点分别为 $(2,2)$ 与 $(2,-2)$，如图所示 5 - 2 所示，抛物线将圆分成两个部分 A_1，A_2，记它们的面积分别为 S_1，S_2，则有

$$S_1=\int_{-2}^2(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2})dy=8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}+2\pi,\quad S_2=8\pi-A_1=6\pi-\frac{4}{3},$$ 于是

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{4}{3}+2\pi}{6\pi-\frac{4}{3}}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}.$$

44.求心形线$\rho=1+\cos\theta$与圆$\rho=3\cos\theta$所围公共部分的面积.

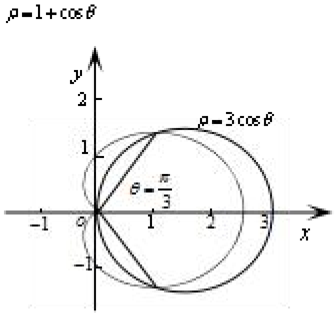


图 5 - 3

分析　心形线$\rho=1+\cos\theta$与圆$\rho=3\cos\theta$的图形如图 5 - 3 所示. 由图形的对称性，只需计算上半部分的面积即可.

解　求得心形线$\rho=1+\cos\theta$与圆$\rho=3\cos\theta$的交点为$(\rho,\theta)=(\frac{3}{2},\pm\frac{\pi}{3})$，由图形的对称性得心形线$\rho=1+\cos\theta$与圆$\rho=3\cos\theta$所围公共部分的面积为

$$A=2[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2d\theta]=\frac{5}{4}\pi.$$

45.求曲线$y=\ln x$在区间$(2,6)$内的一条切线，使得该切线与直线$x=2$，$x=6$和曲线$y=\ln x$所围成平面图形的面积最小（如图 5 - 4 所示）.

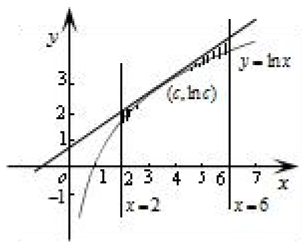


图 5 - 4

分析　要求平面图形的面积的最小值，必须先求出面积的表达式.

解　设所求切线与曲线$y=\ln x$相切于点$(c,\ln c)$，则切线方程为$y-\ln c=\frac{1}{c}(x-c)$. 又切线与直线$x=2$，$x=6$和曲线$y=\ln x$所围成的平面图形的面积为

$$A=\int_2^6[\frac{1}{c}(x-c)+\ln c-\ln x]dx=4(\frac{4}{c}-1)+4\ln c+4-6\ln 6+2\ln 2.$$

由于

$$\frac{dA}{dc}=-\frac{16}{c^2}+\frac{4}{c}=-\frac{4}{c^2}(4-c),$$

令 $\frac{dA}{dc}=0$，解得驻点 $c=4$．当 $c<4$ 时 $\frac{dA}{dc}<0$，而当 $c>4$ 时 $\frac{dA}{dc}>0$．故当 $c=4$ 时，A 取得极小值．由于驻点唯一．故当 $c=4$ 时，A 取得最小值．此时切线方程为：

$y=\frac{1}{4}x-1+\ln 4$．

46.求圆域 $x^2+(y-b)^2\le a^2$（其中 $b>a$）绕 x 轴旋转而成的立体的体积．

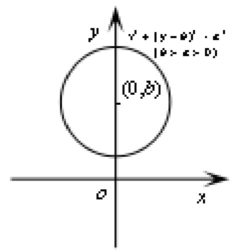


图 5 - 5

解　如图 5 - 5 所示，选取 x 为积分变量，得上半圆周的方程为

$y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$，

下半圆周的方程为

$y_1=b-\sqrt{a^2-x^2}$．

则体积元素为

$dV=(\pi y_2^2-\pi y_1^2)dx=4\pi b\sqrt{a^2-x^2}dx$．于是所求旋转体的体积为

$$V=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=8\pi b\cdot\frac{\pi a^2}{4}=2\pi^2a^2b.$$

注　可考虑选取 y 为积分变量，请读者自行完成．

例 46（03 研）　过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D．

（1）求 D 的面积 A；

（2）求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V．

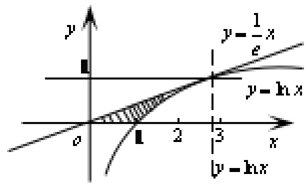


图 5 - 6

分析　先求出切点坐标及切线方程，再用定积分求

面积 A，旋转体积可用大的立体体积减去小的立体

体积进行

计算，如图 5 - 6 所示.

解　（1）设切点横坐标为 x_0，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=e$，所以该切线的方程是 $y=\frac{1}{e}x$. 从而 D 的面积

$$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{e}{2}-1.$$

（2）切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 围成的三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2,$$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 围成的图形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy=\pi(-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{1}{2}).$$

因此，所求体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3).$$

48.有一立体以抛物线$y^2=2x$与直线$x=2$所围成的图形为底，而垂直于抛物线的轴的截面都是等边三角形，如图 5 - 7 所示．求其体积．

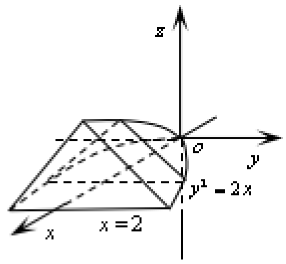


图 5 - 7

解　选x为积分变量且$x\in[0,2]$．过x轴上坐标为x的点作垂直于x轴的平面，与立体相截的截面为等边三角形，其底边长为$2\sqrt{2x}$，得等边三角形的面积为

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2x})^2=2\sqrt{3}x.$$

于是所求体积为 $V=\int_0^2 A(x)dx=\int_0^2 2\sqrt{3}xdx=4\sqrt{3}$．

例 48（03 研）　某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层，汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功，设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为k，$k>0$），汽锤第一次击打进地下a（m），根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数r（$0<r<1$）．问：

（1）汽锤打桩 3 次后，可将桩打进地下多深?

（2）若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深?（注：m表示长度单位米）

分析　本题属于变力作功问题，可用定积分来求．

解　（1）设第n次击打后，桩被打进地下x_n，第n次击打时，汽锤所作的功为W_n（$n=1$，2，…）．由题设，当桩被打进地下的深度为x时，土层对桩的阻力的大小为kx，所以

$$W_1=\int_0^{x_1}kxdx=\frac{k}{2}x_1^2=\frac{k}{2}a^2,\quad W_2=\int_{x_1}^{x_2}kxdx=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{k}{2}(x_2^2-a^2).$$

由$W_2 = rW_1$得

$x_2^2 - x_1^2 = ra^2$，即 $x_2^2 = (1+r)a^2$，

$$W_3 = \int_{x_2}^{x_3} kx\,dx = \frac{k}{2}(x_3^2 - x_2^2) = \frac{k}{2}[x_3^2 - (1+r)a^2].$$

由$W_3 = rW_2 = r^2W_1$ 得

$x_3^2 - (1+r)a^2 = r^2a^2$，即 $x_3^2 = (1+r+r^2)a^2$.

从而汽锤击打 3 次后，可将桩打进地下$x_3 = a\sqrt{1+r+r^2}$ （m）.

（2）问题是要求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，为此先用归纳法证明：$x_{n+1} = a\sqrt{1+r+\cdots+r^n}$.

假设$x_n = \sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}a$，则

$$W_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} kx\,dx = \frac{k}{2}(x_{n+1}^2 - x_n^2) = \frac{k}{2}[x_{n+1}^2 - (1+r+\ldots+r^{n-1})a^2].$$

由

$W_{n+1} = rW_n = r^2W_{n-1} = \ldots = r^nW_1$,

得

$x_{n+1}^2 - (1+r+\ldots+r^{n-1})a^2 = r^na^2$.

从而

$x_{n+1} = \sqrt{1+r+\cdots+r^n}a$.

于是$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}}a = \dfrac{a}{\sqrt{1-r}}$.

若不限打击次数，汽锤至多能将桩打进地下$\dfrac{a}{\sqrt{1-r}}(m)$.

第五章 向量代数与空间解析几何

- 向量及其线性运算
- 数量积、向量积、混合积
- 平面及其方程
- 空间直线及其方程
- 曲面及其方程
- 空间曲线及其方程

本章考点解析

本章在期末考试中的考法比较稳定，不会考得太难，主要考点集中在平面及直线方程这一块，并且还要掌握向量积的算法。

\# 向量积的有关运算。设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

（此公式需要记住，等学了线代就知道怎么回事了）

\# 平面方程：(1)一般方程：Ax+By+Cz+D=0；(2)点法式方程：A$(x-x_0)$+B$(y-y_0)$+C$(z-z_0)$=0,其中 M(x_0,y_0,z_0)为平面经过的一点，$\vec{n}=(A,B,C)$为平面的法向量；(3)截距式方程：已知平面与三条轴的交点分别为(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c),则其平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,法向量为$\vec{n}=(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$

\# 空间直线方程 (1)一般方程：看成两个平面相交，即两个平面；联立方程组。(2)点向式方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,其中$(x_0,y_0,z_0)$为直线经过的一点，$\vec{n}=(m,n,p)$为直线的方向向量。

平面束方程

设直线 L 由$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0(\,I\,)\\A_2x+B_2y+C_2y+D_2=0(II)\end{cases}$,所确定，其中$A_1$，$B_1$，$C_1$与$A_2$，$B_2$，$C_2$不成比例.建立一个三元一次方程$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2y+D_2)=0$(Ⅲ)，λ为任意常数.且 $A_1+\lambda A_2$,$B_1+\lambda B_2$,$C_1+\lambda C_2$(由A_1，B_1，C_1与A_2，B_2，C_2不成比例得出)，所以(Ⅲ)表示一个平面，若一点在直线 L 上，则其必满足方程(Ⅰ)和(Ⅱ)，从而满足(Ⅲ)，故(Ⅲ)也表示通过直线 L 的平面，对应不同的λ值，表示通过直线 L 的不同平面。通过直线 L 的任何平面(除了(Ⅱ)，为什么？自己想……)都包含在方程(Ⅲ),通过直线 L 的所有平面的全体称为平面束，而方程(Ⅲ)就称为平面束方程（具体请看例题 2 和例 4(1)）

重要题型通关

例 1：求过三点 A(2.-1.,4),B(-1,3,-2)和 C(0,2,3)的平面方程.

解：$\overrightarrow{AB}=(-3,4,6)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$，则平面的法向量为：

$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&4&6\\-2&3&-1\end{vmatrix}$=14$\vec{i}$+9$\vec{j}$-$\vec{k}$,由平面的点法式方程得：

14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,即 14x+9y-z-15=0

例 2：求直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+Z+1=0\end{cases}$，在平面 $x+y+z=0$ 上的投影的直线方程.

解：设过直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+Z+1=0\end{cases}$的平面束方程$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+Z+1)=0$,也即$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)+\lambda-1=0$，λ为待定系数.该平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件为法向量数量积为零，即$(1+\lambda)+(1-\lambda)+\lambda-1=0$,解得$\lambda=-1$, 从而所求的投影方程为 $y-z-1=0$,故所求的直线方程

为：$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$

例 3：求过点(2,1,3)且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解： 先过点(2,1,3)做一个与已知直线垂直的平面，从而该平面的方程为：

$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$

再求已知直线与所作平面的交点.已知直线的参数方程为：

$x=-1+3t, y=1+2t, z=-t$,代入上述平面方程，解得 $t=\frac{3}{7}$

从而所求的交点为$(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$,点(2,1,3)和点$(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$所确定的直线的方向向量为($\frac{16}{7}(2,-1,4)$,从而所求直线方程为$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

例 4：(1)求过点(3,1,-2)且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程；

(2)设M_0是直线 L 外的一点，M 是直线上任意一点，且直线的方向向量为$\vec{\mathbf{s}}$，求证：点到直线 L 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{\mathbf{s}}|}{|\vec{\mathbf{s}}|}$.并利用该结论，求点 P(3,-1,2)到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离.

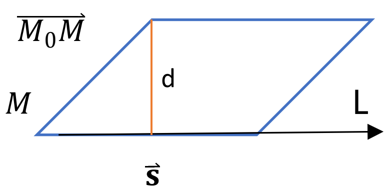
解： (1)利用平面束方程，过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程为：

$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0$,将点(3,1,-2)代入，解得$\lambda=\frac{11}{20}$

于是所求平面方程为：$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0$

也即 $8x-9y-22z-59=0$.

(2)从向量积的几何意义去证明。作出图形如下：



由向量积的几何意义知：$|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{\mathbf{s}}|$表示以$|\overrightarrow{M_0M}|$和$|\vec{\mathbf{s}}|$为领边的平行四边

形的面积，从而$\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$表示以$|\vec{s}|$为底边的平行四边形的高，即点$M_0$到直线 L 的距离。

取直线上一点 M(1,0,2),于是$\overrightarrow{MP}=(2,-1,0)$,又$\vec{S}=(0,-3,-3)$,由上述公式，得 $d=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.(也可以求出交点)

例 5：设一平面垂直平面 z=0，并且通过点(1,-1,1)到直线$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的垂线，求此平面方程.

解:直线$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$的方向向量为$\vec{S}$=(0,-1,-1)(计算过程请自己完善，此处略)，过点(1,-1,1)且以$\vec{S}$=(0,-1,-1)为法向量的平面为：-(y+1)-(z-1)=0,即 y+z=0,联立$\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$，得垂足$(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.又所求平面垂直平面 z=0，故设其方程为 $Ax+By+D=0$,将点(1,-1,1)以及点$(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$代入，解得 $B=2D$，$A=D$，故所求平面方程为：$x+2y+1=0$.

例 6：求过点(-1,0,4),且平行于平面 $3x-4y+z-1=0$,又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程.

解:设所求直线方程为$\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}$,所求直线平行于平面$3x-4y+z-1=0$，故 $3m-4n+p=0$①,又所求直线与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交，故有：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{-1-(-1)} & \boldsymbol{3-0} & \boldsymbol{0-4} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{p} \end{vmatrix}=\boldsymbol{0}, \text{即 } 10\mathrm{m}-4\mathrm{n}-3p=0 ②$$

联立①②，有$\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p}$,因此所求直线方程为$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$

点评：若两直线L_1：$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$；$L_1$：$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，则两直线必共面，故$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2})=0$，即

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$