

一、填空题 (共 8 题, 每题 3 分, 共 24 分.)

1. 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处 _____ . (填可微或不可微).

2. 若 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 处取得极小值, 则常数 $a =$ _____ .

3. 交换积分次序 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy =$ _____ .

4. 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$ 的值为 _____ .

5. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则对面积的曲面积分 $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS =$ _____ .

6. 设函数 $F(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dy$, 则 $F'(x) =$ _____ .

7. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 _____ .

8. 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 _____ .

二、计算题 (共 8 题, 1-4 题每题 8 分, 第 5-8 题每题 9 分, 共 68 分, 要求有步骤.)

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xy = e^z - z$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$, 求曲线 C 上距离 xoy 面最远的点和最近的点.
3. 计算 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ($a > 0$) 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的立体.
4. 将函数 $f(x) = \ln \frac{x}{1+x}$ ($x > 0$) 展开成 $x-1$ 的幂级数.
5. $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量,
- (1) 求曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程.
- (2) 函数 $u = xy^2z$ 在点 P 处沿什么方向的方向导数最大? 并求此方向导数的最大值.
- (3) 求函数 $u = xy^2z$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.
6. 计算曲面积分 $I = \iint_S (2x+z) dydz + z dx dy$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 其法向量与 z 轴正向的夹角为钝角.
7. 设平面区域 D 是由曲线 $y = y(x)$ 和直线 $y = 0$, $x = -1$ 所围成的闭区域, 其中 $y(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ($-1 \leq x < 1$) 的和函数. 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$.
8. 已知 $f''(x) + f(x) = x^2$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 求 $f(x)$.

三、应用题(共 1 题, 共 8 分.)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下. 现有一质量为 9000 kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700 km/h . 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k = 6.0 \times 10^4$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最大距离是多少? (提示: 利用牛顿第二定律 $F = ma$.)

一、填空题(共 5 题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} =$ _____.

2. 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $\iint_D (\sin^2 x + \cos^2 y) d\sigma =$ _____.

3. 设 z 轴与重力的方向一致, 求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移动到 (x_2, y_2, z_2) 时重力所做的功 $W =$ _____.

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为 _____.

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ 的和为 _____.

二、选择题(共 4 题, 每题 3 分, 共 12 分)

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 是可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$$

A. x ; B. z ; C. $-x$; D. $-z$.

2. 设 $f(x)$ 连续, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(3)$ 等于 ()

A. $3f(3)$; B. $2f(3)$; C. $f(3)$; D. 0.

3. 设 Σ 是上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} dx dy = (\quad)$

A. $-\pi R^2$; B. $-2\pi R^2$; C. πR^2 ; D. $2\pi R^2$.

4. 判定下列哪个级数发散 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^n - 2^n}$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)^n \sin \frac{1}{3^n}$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$.

三、计算题(共 8 题, 1 到 7 题每题 9 分, 第 8 题 10 分, 共 73 分)

1. 设 $f(x) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}$, 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
2. 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + y + z = 0$ 交线, 计算曲线积分 $\oint_L (z + y^2) ds$.
3. 计算对坐标的曲线积分 $\int_L (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy$, L : 从 $A(2,0)$ 到 $B(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$.
4. 求第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + (z+1)^2 dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 取外侧.
5. 将函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}$ 展开成 x 的幂级数.
6. 已知连续函数满足条件 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + e^{3x}$, 求 $f(x)$.
7. 求解微分方程 $y'' + y = 4e^x$.
8. 设某工厂需生产容量为 V 的圆柱状易拉罐瓶, 要求上、下底材料的厚度是侧壁的 2 倍. 为使材料最省, 问该工厂如何设计易拉罐的尺寸?

- 考试说明: 1. 本课程为闭卷考试, 共 2 页, 只需要基本文具即可, 不需要计算器。
2. 第一、二题答案直接写在原题空白处, 第三题答案写在答题纸上。

题号	一	二	三	总分
得分				

一、填空题(共 3 题, 每题 3 分, 共 9 分)

1. 函数 $u = xyz$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿 A 指向 $B(2,3,4)$ 方向的方向导数为_____.

2. 已知 $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)|_{(1,-2,2)} =$ _____.

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $(-1,1]$ 上的定义为 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛到_____.

二、选择题(共 3 题, 每题 3 分, 共 9 分)

1. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则 $(0,0)$ 处_____

A. 不是 $f(x, y)$ 的连续点; B. 不是 $f(x, y)$ 的极值点;

C. 是 $f(x, y)$ 的极大值点; D. 是 $f(x, y)$ 的极小值点.

2. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \frac{1}{2})^n$ 在 $x=-3$ 处_____

A. 发散; B. 条件收敛; C. 绝对收敛; D. 敛散性不能判定.

3. 累次积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$ 等于_____

A. $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y) dx$; B. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y) dx$;
 C. $\int_0^1 dx \int_x^2 f(x,y) dy$; D. $\int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$.

三、综合题(共9题,第1题10分,第2-9题每题9分,共82分)

1. 已知.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2} \sin(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性和可微性。

2. 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. 已知函数 $z = f(x,y)$ 的全微分为 $dz = 2x dx - 2y dy$, 并且 $f(1,1) = 2$, 求 $f(x,y)$ 在

椭圆域 $D = \left\{ (x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值。

4. 求 $\iiint_{\Omega} (x^3 + z) dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$, $z = 2$ 所围成的空间区域。

5. 计算 $\oint_L [x^2 + (y+1)^2] ds$, 其中 L 为曲线 $x^2 + y^2 = 2x$ 。

6. 计算

$$\int_L (e^x - x^2 y) dx + (2x + xy^2 + \sin^2 y) dy,$$

其中 L 为取逆时针方向的圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半部分。

7. 计算 $\oiint_{\Sigma} \frac{x^2 dy dz + y dz dx + z^3 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(a > 0)$ 的外侧。

8. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的和函数。

9. 计算 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解。

期末考试试卷

2016 年 春 季 学 期 考 试 科 目: 高等数学 I-2 学院: 数学科学学院

一、填空题(共 7 题, 每题 3 分, 共 21 分)

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 求函数 $u = x + y + z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 (x_0, y_0, z_0) 处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(2x - 3z, 2y - z) = 0$ 所确定, $F(u, v)$ 有连续偏导数, 则 $3\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_y^1 x \sin \frac{y}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则 $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 将函数 $f(x) = \ln x$ 在 $x = 1$ 处展开成幂级数为 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 微分方程 $y'' - y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -1$ 的特解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(共 5 题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 则 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处 ()

A. 不连续; B. 偏导数不存在; C. 偏导数存在但不可微; D. 可微.

2. 设 L 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 取逆时针方向, 则 $\oint_L (x^3 - x^2 y) dx + (xy^2 - y^3) dy = ()$

A. $\frac{\pi a^4}{2}$; B. $-\frac{\pi a^4}{2}$; C. πa^4 ; D. $-\pi a^4$.

3. 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, S 所围成的球体记为 Ω , 则 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \underline{\hspace{2cm}}.$ 考试科目: 高等数学 I-2

A. $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \iiint_{\Omega} a^2 dv = a^2 \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{4}{3} \pi a^5$;

B. $\oiint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \oiint_S a^2 dS = a^2 \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^4$;

C. Ω 的体积 $V = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho$;

D. Ω 的体积 $V = 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$.

4. 下列级数条件收敛的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{1}{n})$; B. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

5. 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是 ()

A. $y'' - y' - 2y = 3x e^x$; B. $y'' - y' - 2y = 3e^x$; C. $y'' + y' - 2y = 3x e^x$; D. $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

三、计算题(共 7 题, 1 到 6 题每题 9 分, 第 7 题 10 分, 共 64 分)

1. 设向量场 $\vec{A} = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k}$, 计算下列各题:

(i) 向量场 $\vec{A}$ 的散度 $\text{div} \vec{A}$; (ii) 向量场 $\vec{A}$ 的旋度 $\text{rot} \vec{A}$; (iii) 梯度 $\text{grad}(\text{div} \vec{A})$.

2. 求三个正数, 使它们的和为 50 而它们的乘积最大.

3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

4. 计算 $\iint_S x dy dz + y dz dx + 2z dx dy$, 其中 S 是旋转抛物面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($z \leq 1$) 的外侧.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛域及和函数.

6. 设 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 是由方程 $z = x f(x+y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数, 求 $\frac{dz}{dx}$.

7. 设 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, $f(0) = -\frac{1}{2}$, 且曲线积分 $\int_c [\sin x - f(x)] y dx + f(x) dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

期末考试试卷

2015 年 春 季学期 考试科目: 高等数学 I-2 学院: 数学科学学院

考试说明: 本课程为闭卷考试, 共 2 页, 满分为 100 分。

题号	一	二	三	总分
得分				

一、填空题(共 7 题, 每个空 3 分, 共 24 分)

1. 已知 $z = x^y$ ($x > 0$), 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____, $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.
2. 已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xy + \sin z + y = 2z$ 所确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.
3. 设 $\vec{A}(x, y, z) = \{x, y, z\}$, 则 $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) =$ _____.
4. 交换积分次序 $\int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx =$ _____.
5. 已知 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段, 则第一类曲线积分 $\int_L (x+y) ds =$ _____.
6. 将函数展开成 x 的幂级数: $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} =$ _____.
7. 微分方程 $y' = e^{2x-y}$ 满足初始条件 $y(0) = 0$ 的特解为 _____.

二、选择题(共 4 题, 每题 3 分, 共 12 分)

1. 下列说法正确的是 ()

A. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = 0;$

B. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0;$

C. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处可微;

D. $f(x, y) = |xy|$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

2. 在曲线 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = -t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线 ()

A. 只有 1 条; B. 只有 2 条; C. 至少有三条; D. 不存在.

3. 下列级数发散的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$; B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

4. 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x < 0 \\ x - \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, 则其傅里叶级数在 $x = \frac{5\pi}{2}$

处收敛于 ()

A. $\frac{\pi}{2}$; B. 0; C. π ; D. $-\frac{\pi}{2}$.

三、计算题(共 7 题, 其中第 1、2 题每题 12 分, 第 3-7 题每题 8 分, 共 64 分)

1. (1) 求函数 $u = xyz$ 在点 $(3, 4, 5)$ 处的梯度;

(2) 求函数 $u = xyz$ 在点 $(3, 4, 5)$ 处沿锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的外法线方向的方向导数.

2. 已知曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成区域 Ω ,

(1) 求 Ω 的体积 V ; (2) 求 Ω 的表面积 S .

3. 求函数 $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值.

4. 计算第二类曲线积分 $I = \int_L (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^4)dy$, 其中 L 是从点 $(0, 0)$ 沿曲线 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧.

5. 计算第二类曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上侧.

6. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数.

7. 求微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解.

考试说明: 本课程为闭卷考试, 共 2 页, 满分为 100 分。

题号	一	二	三	总分
得分				

一、填空题(共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 设向量场 $\vec{A}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + yz^2 \vec{j} + zx^2 \vec{k}$, 则 $\text{grad}(\text{div } \vec{A}) =$ _____.
2. 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 的法线方程是_____.
3. 设 D 是以原点为中心, 半径为 r 的圆域, 则 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy =$ _____.
4. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$, 则 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅立叶级数在 $x = \pi$ 处收敛于_____.
5. 微分方程 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - ye^y$ 的通解是_____.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$ 的和函数是_____.

二、选择题(共 4 题, 每题 3 分, 共 12 分)

1. 下列说法错误的是 ()
 - A. 若 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在, 则函数 $f(x, y)$ 在 $x = x_0$ 处连续;
 - B. 若 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在, 则函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有界;
 - C. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则 $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 都存在;
 - D. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.
2. 二元函数 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 取到极小值的点是 ()
 - A. $(1, 0)$;
 - B. $(1, 2)$;
 - C. $(-3, 0)$;
 - D. $(-3, 2)$.

3. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = (\quad)$

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$

B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 那么下列级数收敛的有 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n};$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 100);$ C. $100 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n;$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{u_n}.$

三、计算题(共 7 题, 每题 10 分, 共 70 分)

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{yx} = xz + xy + y$ 确定, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(1,0)}.$

2. 计算 $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 Ω : 由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围成的区域.

3. 设 Ω 是由 $x^2 + y^2 = 2x$ 和 $x^2 + y^2 = z^2$ 所围的有界体, 求 Ω 的表面积.

4. 求 $I = \int_L (e^x \sin y - 2x - 2y) dx + (e^x \cos y - x) dy$, 其中 L 为从点 $A(2,0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

5. 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} 2xz dy dz + yz dz dx - z^2 dx dy$, 其中 Σ 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与曲面

$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围立体表面外侧.

6. 将函数 $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$ 展开成 x 的幂级数.

7. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

考试说明: 本课程为闭卷考试, 共 2 页, 满分为 100 分。

题号	一	二	三	总分
得分				

一、填空题(共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} =$ _____.
2. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x - z, y - z) = 0$ 所确定得的隐函数, 其中 F 有连续一阶偏导数, 且 $F'_1 + F'_2 \neq 0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.
3. 交换积分次序 $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy =$ _____.
4. S 表示平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限的部分, 则 $\iint_S \frac{dS}{(1 + x + y + z)^2} =$ _____.
5. 函数 $f(x) = \frac{x}{1 - x - 2x^2}$ 展成 x 的幂级数时, x^3 的系数是 _____.
6. 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y}{1 + x^2} \Delta x + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1) =$ _____.

二、选择题(共 4 题, 每题 3 分, 共 12 分)

1. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处()
A. 不连续; B. 连续但偏导数不存在; C. 偏导数存在但不可微; D. 可微.
2. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内有定义, 且 $f'_x(0, 0) = 2$, $f'_y(0, 0) = 1$, 则()
A. $dz|_{(0,0)} = 2dx + dy$; B. 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的法向量为 $\{2, 1, 1\}$;

C. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{2, 1, 0\}$;

D. 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{1, 0, 2\}$.

3. 设函数 $f(x, y)$ 在 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$ 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ 的充分条件是 ()

A. $f(x, -y) = f(x, y)$; B. $f(x, -y) = -f(x, y)$;

C. $f(-x, y) = f(x, y)$; D. $f(-x, -y) = f(x, y)$.

4. 下列级数发散的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$; B. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n^2} - \frac{1}{n} \right)$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos n\pi$.

三、计算题(共 7 题, 每题 10 分, 共 70 分)

1. $z = f(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = f(x, y)$ 的极值.

2. 已知 S 是曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的曲面, 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在 S 上

的点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处沿外法线方向的方向导数.

3. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} |z - x^2 - y^2| dV$, 其中 $\Omega: 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1$.

4. 设 L 为上半圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, 沿逆时针方向, 计算第二类曲线积分

$$I = \int_L (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y + 3x) dy.$$

5. 设 S 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 的外侧在 $z \geq 0$ 的部分, 计算第二类曲面积分

$$I = \iint_S yz dz dx + 2 dx dy.$$

6. 求微分方程 $y'' + y = xe^x$ 的通解.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^{n-1}$ 的收敛域和和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和.

2019 春季学期高等数学 I-2(A) 参考答案

一、填空题(共 8 题, 每题 3 分, 共 24 分.)

1. 可微 2. -5 3. $\int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx$ 4. $\frac{3}{2}\pi$ 5. $\frac{4\pi}{x}$ 6. $2\arctan \frac{1}{x}$ 7. $(1,5]$ 8. $e^{-x} \sin x$.

二、计算题 (共 8 题, 1-4 题每题 8 分, 第 5-8 题每题 9 分, 共 68 分, 要求有步骤.)

1. $xy = e^z - z$ 两边分别对 x 、 y 求导数得到 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{e^z - 1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{e^z - 1}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{e^z - 1} \right) = \frac{e^z - 1 - ye^z \frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z - 1)^2} = \frac{(e^z - 1)^2 - xye^z}{(e^z - 1)^3}.$$

2. C 上的点 (x, y, z) 到 xoy 面的距离为 $|z|$. 令 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2z^2) + \mu(x + y + 3z - 5)$,

$$\text{由 } \begin{cases} L'_x = 2\lambda x + \mu = 0 \\ L'_y = 2\lambda y + \mu = 0 \\ L'_z = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ L'_\mu = x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \text{ 得 } x = y, \text{ 从而 } \begin{cases} 2x^2 - 2z^2 = 0 \\ 2x + 3z = 5 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

根据几何意义, C 上存在距离 xoy 面最远的点和最近的点. 故所求点分别为 $(-5, -5, 5)$ 和 $(1, 1, 1)$.

$$3. \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^a r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{8}.$$

$$\text{或 } \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r dr \int_r^{\sqrt{a^2 - r^2}} z dz = 2\pi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{a^2 - r^2 - r^2}{2} r dr = \pi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (a^2 r - 2r^3) dr = \frac{\pi a^4}{8}.$$

$$4. f(x) = \ln \frac{x}{1+x} = \ln x - \ln(1+x) = \ln[1+(x-1)] - \ln 2(1 + \frac{x-1}{2})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} - \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\frac{x-1}{2})^n}{n} = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n2^n} \right) (x-1)^n \quad (x \in (0, 2]).$$

5. 令 $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6$, 则 $(F'_x, F'_y, F'_z)|_{(1,1,1)} = (4x, 6y, 2z)|_{(1,1,1)} = (4, 6, 2)$, 可取 $\vec{n} = (2, 3, 1)$.

(1) 所求切平面方程为 $2(x-1) + 3(y-1) + z-1 = 0$, 即 $2x + 3y + z = 6$.

(2) 沿方向 $\text{grad } u|_{(1,1,1)} = (u'_x, u'_y, u'_z)|_{(1,1,1)} = (y^2z, 2xyz, xy^2)|_{(1,1,1)} = (1, 2, 1)$ 的方向导数最大, 最大值为 $\sqrt{6}$.

(3) $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$. $u = xy^2z$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{(1,1,1)} = u'_x|_{(1,1,1)} \cdot \cos \alpha + u'_y|_{(1,1,1)} \cdot \cos \beta + u'_z|_{(1,1,1)} \cdot \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{6}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}}.$$

6. 添加辅助面 $S_1: z = 1 (x^2 + y^2 \leq 1)$, 取上侧, $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$. 设 S 与 S_1 围成区域 Ω , 则

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S (2x+z)dydz + zdx dy = \iiint_{S \cup S_1} (2x+z)dydz + zdx dy - \iint_{S_1} (2x+z)dydz + zdx dy \\
 &= 3 \iiint_{\Omega} dv - \iint_{D_{xy}} dx dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz - \pi = 6\pi \int_0^1 (r-r^3)dr - \pi = \frac{3}{2}\pi - \pi = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

7. $x \in (-1,1)$ 时, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, $y(x) = y(0) + \int_0^x y'(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x)$, $x \in (-1,1]$.

$$\iint_D x dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-\ln(1-x)}^0 dy = \int_{-1}^0 x \ln(1-x) dx = -\frac{1}{4}.$$

8. $f''(x) + f(x) = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda = \pm i$, 通解为 $Y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

$f''(x) + f(x) = x^2$ 的一个特解可设为 $y^* = ax^2 + bx + c$, 则 $2a + ax^2 + bx + c = x^2$, 比较两端同次幂的系数,

得 $a=1$, $b=0$, $c=-2$, $y^* = x^2 - 2$. 所以 $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 2$.

再由 $f(0)=0$, $f'(0)=1$ 得到 $c_1=2$, $c_2=1$, 所以 $f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2$.

三、应用题(共 1 题, 共 8 分.)

设 $t=0$ 为飞机接触跑道开始时刻, t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$, 速度为 $v(t) = x'(t)$. 由题设可知,

飞机的质量 $m=9000\text{ kg}$, 着陆时的水平速度 $v(0) = x'(0) = 700\text{ km/h}$, t 时刻所受阻力为 $-kv(t)$, 按

牛顿第二定律得到 $m \frac{dv}{dt} = -kv$. 初始条件 $v(0) = v_0$. 该问题可按 3 种方式求解.

法 1. 一阶线性齐次方程的初值问题 $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v \\ v(0) = v_0 \end{cases}$ 的解为 $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$.

飞机滑行的最长距离为 $x = \int_0^{+\infty} v(t)dt = \int_0^{+\infty} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05(\text{km})$.

法 2. 由于 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{v}{\frac{dx}{dv}}$, 于是得到微分方程 $m \frac{v}{\frac{dx}{dv}} = -kv$, 即 $\frac{dx}{dv} = -\frac{m}{k}$, 相应的初值为 $x(v_0) = 0$.

该问题的解为 $x = -\frac{m}{k}(v - v_0)$. 令 $v=0$ 得到飞机滑行的最长距离为 $x = \frac{m}{k}v_0 = 1.05(\text{km})$.

法 3. 由 $v = \frac{dx}{dt}$, $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ 得到微分方程 $m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} = 0$, 其特征方程为 $\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$, 特征值为

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{k}{m}$. 于是通解为 $x = c_1 + c_2 e^{-\frac{k}{m}t}$. 由初始条件 $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$ 得到 $c_1 = -c_2 = \frac{mv_0}{k}$,

从而有 $x(t) = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{mv_0}{k} = 1.05(\text{km})$, 即飞机滑行的最长距离为 1.05 km .

一、填空题

1. 0 2. π 3. $mg(z_2 - z_1)$ 4. 5 5. 4

二、选择题

1. B 2. B 3. A 4. C

三、计算题

$$1. \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 2x \arctan \frac{y}{x} - y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$2. \text{由对称性, } \oint_L (z + y^2) ds = \frac{1}{3} \oint_L (x + y + z + x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{1}{3} \oint_L 4 ds = \frac{16}{3} \pi$$

$$3. \text{补有向直线 } BA: y=0, x: 0 \rightarrow 2, \text{ 令 } P = e^x \sin y - y, \quad Q = e^x \cos y - 1,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y, \text{ 由格林公式得,}$$

$$\begin{aligned} \int_L (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy &= \oint_{L+BA} - \int_{BA} (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma - 0 = \iint_D d\sigma = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$4. \iiint_{\Sigma} \frac{xdydz + (z+1)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \iiint_{\Sigma} \frac{xdydz + (z+1)^2 dx dy}{2}, \quad \text{由高斯公式得,}$$

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [1 + 2(z+1)] dV = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 (3 + 2r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr = 8\pi$$

$$5. f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, |x| < 1, \quad \frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n, |x| < 2$$

+-----
+

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{2^n} \right] x^n, |x| < 1$$

6. 两边求导得 $f'(x) = 2f(x) + 3e^{3x}$, $f'(x) - 2f(x) = 3e^{3x}$ 此为一阶微分方程,

$$\text{解得 } f(x) = e^{\int 2dx} \left[\int 3e^{3x} \cdot e^{\int -2dx} dx + C \right] = e^{2x} \left(\int 3e^x dx + C \right) = 3e^{3x} + Ce^{2x}$$

又由原方程有 $f(0) = 0 + e^0 = 1$, 故 $C = -2$, 得 $f(x) = 3e^{3x} - 2e^{2x}$

7. 特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 得特征根 $r = \pm i$. 故对应的齐次方程的通解为

$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, 又因为 $f(x) = 4e^x$, $\lambda = 1$ 不是特征方程的根, 故设 $y^* = Ae^x$ 为

非齐次方程的一个特解, 代入原方程得 $2Ae^x = 4e^x$, 因而 $y^* = 2e^x$ 为非齐次方程的一个

特解。故原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x$.

8. 设易拉罐的底面半径为 r , 高为 h . 由于上、下底材料的厚度是侧壁的 2 倍, 所以易拉罐所需材料可以表示为 $S = 2 \cdot 2\pi r^2 + 2\pi rh$. 则问题即为: 求函数

$S(r, h) = 2 \cdot 2\pi r^2 + 2\pi rh$ 在约束条件 $V = \pi r^2 h$ 下的最小值, 其中 $r > 0, h > 0$. 作

Lagrange 函数 $L(r, h, \lambda) = 2 \cdot 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - V)$

由方程组 $L'_r = 8\pi r + 2\pi h + 2\lambda\pi rh = 0$

$$L'_h = 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0$$

$$L'_\lambda = \pi r^2 h - V = 0$$

求得唯一驻点 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$, $h = 4\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$, 根据问题的本身可知 S 一定有最小值, 所以当

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$ 和 $h = 4\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}} = 4r$ 时, 易拉罐用料最省。

+-----
+

答案详解:

一. 填空题

$$1. \frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

$$\text{grad } u|_A = \{1, 1, 1\}$$

$$\overrightarrow{AB} = \{1, 2, 3\} \therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \therefore u \text{ 可微}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial u}{\partial t}|_A &= \text{grad } u|_A \cdot \vec{t}^0 \\ &= 1 \times \frac{1}{\sqrt{14}} + 1 \times \frac{2}{\sqrt{14}} + 1 \times \frac{3}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

$$2. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\therefore \text{grad } f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \{x, y, z\} \triangleq \{p, q, r\}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } f) &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{div}(\text{grad } f)|_{(1,2,2)} = \frac{2}{3}$$

3. $f(x)$ 满足收敛定理条件. $x=1$ 是间断点

$$\therefore S(1) = \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

二. 选择题

1. 由 $dz = xdx + ydy$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y$$

$\therefore (0,0)$ 是驻点

$$\text{在 } (0,0) \text{ 处 } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

$$AC - B^2 > 0 \text{ 且 } A > 0 \therefore f(0,0) \text{ 是极小值}$$

$\therefore D$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=3$ 条件收敛

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^n$ 收敛 但 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| 3^n$ 发散

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \frac{1}{2})^n$ 在 $x=3$ 处, 即为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\frac{7}{2})^n$

假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\frac{7}{2})^n$ 收敛, 由阿贝尔定理

知, $|3| < |-\frac{7}{2}|$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| 3^n$ 收敛,

矛盾! 从而 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\frac{7}{2})^n$ 发散. A

$$3. \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$D: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2 \sin \theta$$

$$\text{由 } r = 2 \sin \theta \text{ 知, } \sqrt{x^2+y^2} = 2 \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

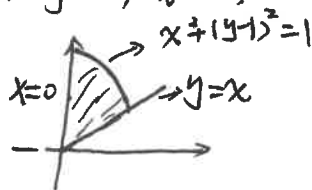
$$\text{又 } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \therefore \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\therefore \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{即 } x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\text{当 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 时 } \therefore y = x$$

$$\text{当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } x = 0$$

D 由 $y=x, x=0, x^2 + (y-1)^2 = 1$ 围成



$$\begin{cases} y=x \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases} \quad \text{交点}(1,1)$$

$$\therefore D: 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}$$

选 D

三. 综合题

$$1. \because \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} = 0 \quad \text{而} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} \cdot \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0 \cdot 1 = 0 = f(0,0)$$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\therefore f'_x(0,0) = 0 \quad \text{同理} \quad f'_y(0,0) = 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|} \sin[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \quad \text{不存在, 事实上,}$$

$$\text{令 } \Delta y = k \Delta x \quad \text{上式} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x \cdot k \Delta x}}{|\Delta x| \sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}$$

$\therefore$ 极限不存在, $\therefore f$ 在 $(0,0)$ 不可微

$$2. \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot e^{xy} \cdot y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot e^{xy} \cdot y] \\ &= \frac{\partial f'_1}{\partial y} \cdot 2x + f'_1 \cdot 0 + \frac{\partial f'_2}{\partial y} e^{xy} \cdot y \end{aligned}$$

$$+ f'_2 \cdot e^{xy} \cdot x \cdot y + f'_2 e^{xy} \cdot 1$$

$$= (f''_{11} \cdot (-2y) + f''_{12} e^{xy} \cdot x) 2x +$$

$$(f''_{21} (-2y) + f''_{22} e^{xy} \cdot x) e^{xy} \cdot y$$

$$+ f'_2 e^{xy} (xy+1)$$

$$= -4xy f''_{11} + e^{xy} f''_{12} (2x^2 - 2y^2)$$

$$+ f''_{22} e^{2xy} xy + f'_2 e^{xy} (xy+1)$$

$$3. \text{ 由 } dz = 2x dx - 2y dy \text{ 知}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

对 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ 两边关于 x 积分得

$$z = x^2 + \varphi(y), \quad \text{对 } y \text{ 求偏导.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(y) = -2y$$

$$\therefore \varphi(y) = -y^2 + C.$$

$$\therefore z(x,y) = x^2 - y^2 + C \quad \text{而 } f(1,1) = 2$$

$$\therefore C = 2 \quad \therefore f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } (0,0)$$

$$z(0,0) = 2$$

在边界上. $z = (1 - \frac{y^2}{4}) - y^2 + 2 = 3 - \frac{5}{4}y^2, y \in [-2, 2]$

令 $\frac{dz}{dy} = 0$ 得 $y = 0$. 此时 $x = \pm 1$.

$z(1, 0) = z(-1, 0) = 3$

端点处 $z(0, -2) = z(0, 2) = -2$

故最小值为 $z(0, \pm 2) = z(0, 2) = -2$

最大值为 $z(1, 0) = z(-1, 0) = 3$.

4. 解: $\because \Omega$ 关于 yOz 面对称, x^3 关于 x 是

奇函数 $\therefore \iiint_{\Omega} x^3 dx dy dz = 0$

$\iiint_{\Omega} z dx dy dz \xrightarrow{\text{截面法}} \int_1^2 z dz \iint_{D_z: x^2+y^2 \leq z^2} dx dy$

$= \int_1^2 z \cdot \pi z^2 dz = \frac{15}{4}\pi$

$\therefore \iiint_{\Omega} (x^3 + z) dx dy dz = \frac{15}{4}\pi.$

5. 由 $x^2 + y^2 = 2x$ 得 $\begin{cases} x-1 = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\oint_L [x^2 + (y+1)^2] ds$

$= \int_0^{2\pi} [(1+\cos t)^2 + (\sin t+1)^2] \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt$

$= \int_0^{2\pi} (2\sin t + 2\cos t + 3) dt$

$= 6\pi$

6. 令 $P = e^x - x^2y, Q = 2x + xy^2 + \sin^2 y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 + y^2$

补直线 $C: y=0, x: -1 \rightarrow 1$

应用格林公式得

$\int_L (e^x - x^2y) dx + (2x + xy^2 + \sin^2 y) dy$

$= \oint_{L+C} (e^x - x^2y) dx + (2x + xy^2 + \sin^2 y) dy$

$= \int_C (e^x - x^2y) dx + (2x + xy^2 + \sin^2 y) dy$

$= \iint_D (2 + y^2 + x^2) dx dy - \int_{-1}^1 e^x dx$

$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 (2 + r^2) r dr - (e - e^{-1})$

$= \frac{5}{4}\pi + e^{-1} - e$

7. $\oiint_{\Sigma} \frac{x^2 dy dz + y dz dx + z^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$= \oiint_{\Sigma} \frac{x^2 dy dz + y dz dx + z^2 dx dy}{a}$

应用高斯公式得

上式 $= \frac{1}{a} \iiint_{\Omega} (2x + 1 + 3z^2) dx dy dz$

$\xrightarrow{\text{球}} \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a (2r \sin \varphi \cos \theta + 1 + 3r^2 \cos^2 \varphi) \cdot r^2 \sin \varphi dr$

$= \frac{4\pi}{3} a^3 + \frac{4}{5} \pi a^5$

$$8. \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+3}}{2^{n+1}} = 1$$

$$\therefore \text{收敛半径 } R = \frac{1}{\rho} = 1. \quad \text{收敛区间 } (-1, 1)$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, 原级数} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \text{ 发散}$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, 原级数} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \text{ 发散}$$

$$\therefore \text{收敛域 } (-1, 1)$$

$$\text{令 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= 2x \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} + \frac{1}{1-x}$$

$$= 2x \left[\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx \right]' + \frac{1}{1-x}$$

$$= 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' + \frac{1}{1-x}$$

$$= 2x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)' + \frac{1}{1-x}$$

$$= 2x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1+x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\text{代入原方程得, } 4Ax + 4A + 4B = x$$

$$\therefore \begin{cases} 4A = 1 \\ 4A + 4B = 0 \end{cases} \therefore A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore y^* = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) e^x$$

$$\text{原方程通解为 } y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x$$

$$(C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

$$9. \text{ 对应齐线性方程为 } y'' + 2y' + y = 0$$

$$\text{特征方程: } r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$\text{特征根 } r_1 = r_2 = -1$$

$$\text{对应通解为: } y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$\lambda = 1 \text{ 不是特征根, 设特解 } y^* = (Ax+B)e^x$$

$$y^{*'} = A x e^x + (A+B)e^x$$

$$y^{*''} = A x e^x + (2A+B)e^x$$

高等数学 I-2 答案 A 卷

一 填空题

$$\frac{6}{\sqrt{14}}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{2}$$

二 选择题

D; A; D

三 综合题

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2) = 0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续

易求: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{|\Delta x \Delta y|}{\Delta^2 x + \Delta^2 y}} \frac{\sin(\Delta^2 x + \Delta^2 y)}{\Delta^2 x + \Delta^2 y} \end{aligned}$$

由于 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{|\Delta x \Delta y|}{\Delta^2 x + \Delta^2 y}}$ 极限不存在, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x f'_1 + y e^{xy} f'_2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy f''_{11} + (1 + xy) e^{xy} f''_2 + 2e^{xy}(x^2 - y^2) f''_{12} + xye^{2xy} f''_{22}$

3. 根据条件可得: $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$

先由偏导数为零求出驻点 $(0,0)$, 并且 $f(0,0) = 2$

在边界 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上, $y^2 = 4 - 4x^2$, 故 $z = 5x^2 - 2$, $x \in [-1, 1]$

显然 $x = 0$ 时取最小值 -2, $x = \pm 1$ 时取最大值 3

综上, 所求最大值为 $f(1,0) = f(-1,0) = 3$, 最小值为 $f(0,2) = f(0,-2) = -2$

注: 亦可采用 Lagrange 乘子法求椭圆边界上的条件极值

4. 由对称性及先二后一的积分方法, $I = \int_1^2 z \pi z^2 dz = \frac{15\pi}{4}$

5. 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$,

$$I = \oint_L (x^2 + y^2 + 2y + 1) ds = \oint_L (2x + 1) ds \\ = \int_0^{2\pi} 2(1 + \cos t) dt + 2\pi = 6\pi$$

6. 由格林公式 $I + \int_{-1}^1 e^x dx = \iint_D (2 + x^2 + y^2) dx dy$, 易求 $I = \frac{5}{4}\pi + e^{-1} - e$

7. $I = \frac{1}{a} \iiint_{\Sigma} x^2 dy dz + y dz dx + z^3 dx dy = \frac{1}{a} \iiint_{\Omega} (2x + 1 + 3z^2) dx dy dz = \frac{4}{3}\pi a^2 + \frac{4}{5}\pi a^4$

8.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ = 2x \left(\frac{x}{1-x} \right)' + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

9. 特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, 特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$,

对应的齐次方程的通解为: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$

设原方程的一个特解为: $y^* = (A + Bx)e^x$, 带入原方程解得 $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$

原方程的通解为: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x$

2016 春季高等数学 I-2 (A) 参考答案

一、填空题(共 7 题, 每题 3 分, 共 21 分)

1. -2 2. $x_0 + y_0 + z_0$ 3. 2 4. $\int_0^1 dx \int_0^x x \sin \frac{y}{x} dy$

5. 12a 6. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad (0 < x \leq 2)$ 7. $y = -\ln |x+1|$

二、选择题(共 5 题, 每题 3 分, 共 15 分)

1. D 2. A 3. A 4. C 5. D

三、计算题(1-6 题每题 9 分, 第 7 题 10 分, 共 64 分)

1. (i) $\operatorname{div} \vec{A} = 2x + 2y + 2z$; (ii) $\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + yz & y^2 + xz & z^2 + xy \end{vmatrix} = \vec{0}$;

(iii) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) = (2, 2, 2)$.

2. 设三个正数为 x, y, z , 此问题是求函数 $u = xyz$ 满足条件 $x + y + z = 50$ 的最大值.

作拉格朗日函数 $L(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - 50)$, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - 50 = 0, \end{cases}$$

解得 $x = y = z = \frac{50}{3}$ 是唯一的驻点, 根据问题的实际意义可知 $x = y = z = \frac{50}{3}$ 时函数 $u = xyz$ 取得最大值.

3. $\iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z dz = 2\pi \int_0^1 \frac{2-r^2-r^4}{2} r dr = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) = \frac{7}{15} \pi$.

4. 解法一: $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$,

$$\begin{aligned} \iint_S x dy dz + y dz dx + 2z dx dy &= \iint_{D_{xy}} (x, y, 2z) \Big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right) dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr = -\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

解法二: $S_1: z=1$, S_1 与 S 围成 Ω , $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$,

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + 2z dx dy = \iint_{S \cup S_1} x dy dz + y dz dx + 2z dx dy - \iint_{S_1} x dy dz + y dz dx + 2z dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} (1+1+2)dv - \iint_{D_{xy}} (x, y, 2z)_{z=1} \cdot (0, 0, 1) dx dy = 4 \cdot \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n} |x|^{2n-2}} = \frac{|x|^2}{2},$$

当 $\frac{|x|^2}{2} < 1$, 即 $|x| < \sqrt{2}$ 时, 级数收敛. 当 $|x| = \sqrt{2}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$, 是发散的,

故级数的收敛域是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$\text{令 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}, \text{ 则 } x \neq 0 \text{ 时,}$$

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2} x^2}{1 - \frac{1}{2} x^2} = \frac{x}{2 - x^2}, \quad s(x) = \left(\frac{x}{2 - x^2} \right)' = \frac{2 + x^2}{(2 - x^2)^2}.$$

$$\text{又因为 } s(0) = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } s(x) = \frac{2 + x^2}{(2 - x^2)^2} \quad (x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})).$$

6. 各方程两边关于 x 求导, 得:

$$z' = f + x \cdot f' \cdot (1 + y'), \quad F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0,$$

$$\text{变形: } -xf' \cdot y' + z' = f + xf', \quad F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = -F'_x.$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -xf' & f + xf' \\ F'_y & -F'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F'_y & F'_z \end{vmatrix}} = \frac{(f + xf')F'_y - xf' \cdot F'_x}{F'_y + xf' \cdot F'_z},$$

其中, $(F'_y + xf' \cdot F'_z \neq 0)$ 。

$$7. \quad P(x, y) = [\sin x - f(x)], \quad Q(x, y) = f(x), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \sin x - f(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = f'(x).$$

$$\text{由 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ 得 } f'(x) + f(x) = \sin x, \text{ 解得 } f(x) = e^{-x} \left(\frac{\sin x - \cos x}{2} e^x + c \right).$$

$$\text{把 } f(0) = -\frac{1}{2} \text{ 代入上式, 得 } c = 0. \text{ 所以 } f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2}.$$

2015 春季高等数学 I-2 (A) 参考答案

一、填空题(共 6 题, 每个空 3 分, 共 24 分)

$$1. \frac{yx^{y-1}}{2-\cos z} \quad \frac{x^y \ln x}{2-\cos z} \quad 2. \frac{y}{2-\cos z} \quad 3. 0 \quad 4. \int_1^2 dx \int_{1-x}^0 f(x,y) dy$$

$$5. \sqrt{2} \quad 6. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) x^n \quad (x \in (-1,1)) \quad 7. e^y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$$

二、选择题(共 4 题, 每题 3 分, 共 12 分)

1. D 2. A 3. C 4. D

三、计算题(共 7 题, 其中第 1、2 题每题 12 分, 第 3-7 题每题 8 分, 共 64 分)

1. (1) $\text{gradu}|_{(3,4,5)} = (yz, xz, xy)|_{(3,4,5)} = (20, 15, 12).$

(2) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(3, 4, 5)$ 的外法向量为

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) \Big|_{(3,4,5)} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1 \right), \quad \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \text{ 从而单位}$$

法向量为 $\vec{n} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, 所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 20 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{10} + 15 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} + 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2}.$$

2. (1) $V = \iiint_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^{2-r} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2-r-r^2) r dr = 2\pi \cdot \left(r^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{6}\pi.$

(2) 设 $S_1: z = x^2 + y^2$, $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$, 则 Ω 的表面积为

$$S = \iint_{S_1} dS + \sqrt{2}\pi$$

$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dxdy + \sqrt{2}\pi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr + \sqrt{2}\pi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} d(1 + 4r^2) + \sqrt{2}\pi = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \sqrt{2}\pi = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi + \sqrt{2}\pi.$$

3. (i) 在 D 内, 由 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(4-x-y) - x^2y = xy(8-3x-2y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2(4-x-y) - x^2y = x^2(4-x-2y) = 0, \end{cases}$ 得驻点为 $(2, 1).$

(ii) 在 D 的边界上, $x+y=6$ 时, $f(x, y) = -2x^2(6-x)$, 由

$$\frac{df}{dx} = -4x(6-x) + 2x^2 = 6x(x-4) = 0, \text{ 得驻点为 } x=4. \text{ 又 } f(0, y) = 0, f(x, 0) = 0,$$

$f(2, 1) = 4$, $f(4, 2) = -64$, 所以 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值是 4, 最小值是 -64.

4. 令 L_1 为直线 $y = x$ 从点 $(1,1)$ 到点 $(0,0)$ 的一段, D 为 L 与 L_1 围成的区域, 则由格林公式,

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^4)dy = \iint_D (2x - 2x)d\sigma - \int_{L_1} (x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^4)dy \\ &= -\int_1^0 (x^2 + 2x^2 + x^2 + x^4)dx = \int_0^1 (4x^2 + x^4)dx = \left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{23}{15}. \end{aligned}$$

5. $\Sigma_1: z = 0$ 的下侧, Ω 是 Σ 与 Σ_1 围成的区域, $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$, 由高斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy \\ &= 6 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z)dV - \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{1-r^2} (r^2 + z)dz - \iint_{D_{xy}} 3dxdy \\ &= 12\pi \int_0^1 [r^3(1-r^2) + \frac{1}{2}r(1-r^2)^2]dr - 3\pi = 2\pi - 3\pi = -\pi. \end{aligned}$$

6. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛, 所以收敛域是 $[-1, 1)$,

$$\text{设 } \forall x \in [-1, 1), S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \text{ 则 } xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x \in (-1, 1), \text{ 有}$$

$$[xS(x)]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

$$\text{所以 } xS(x) = 0 \cdot S(0) + \int_0^x [xS(x)]' dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x),$$

$$\text{所求和函数为 } S(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

7. 特征方程是 $r^2 - 4 = 0$, 特征根为 $r = \pm 2$, 故 $y'' - 4y = 0$ 的通解为 $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$.

因为 $\lambda = 2$ 是特征方程的单根, 故设特解为 $y^* = axe^{2x}$,

$$(y^*)' = ae^{2x} + 2axe^{2x} = (1+2x)ae^{2x}, (y^*)'' = 2ae^{2x} + 2(1+2x)ae^{2x} = 4(1+x)ae^{2x},$$

所以, $4(1+x)a - 4ax = 1$, 解得 $a = \frac{1}{4}$, 从而 $y^* = \frac{1}{4}xe^{2x}$.

$y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解为 $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$, 其中 c_1, c_2 是任意常数.

2014 春季高等数学 I-2 (A) 参考答案

一、填空题(共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. $\frac{2(x, y, z)}{\quad}$
2. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$
3. $\frac{1}{\quad}$
4. $\frac{\pi^2}{2}$
5. $x = y(-e^y + C)$
6. $xe^x + e^x - 1$

二、选择题(共 4 题, 每题 3 分, 共 12 分)

1. B 2. A 3. C 4. C

三、计算题(共 7 题, 每题 10 分, 共 70 分)

1. 方程 $e^{yx} = xz + xy + y$ 两端对 x 求偏导数, 得 $ye^{yx} = z + x \frac{\partial z}{\partial x} + y$, 又因为

$$y^2 e^{yx} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

当 $x=1, y=0$ 时, $z=1$, 此时 $\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$.

$$\begin{aligned} 2. I &= \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 z dz = 2\pi \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 z dz = 2\pi \int_0^1 r^2 \frac{1-r^2}{2} dr \\ &= \pi \int_0^1 (r^2 - r^4) dr = \pi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15} \pi. \end{aligned}$$

3. l 为平面曲线 $x^2 + y^2 = 2x$, Σ 为曲面 $x^2 + y^2 = z^2$, $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2x$, Ω 的表面积

$$\begin{aligned} S &= 2 \left[\int_l \sqrt{x^2 + y^2} ds + \iint_{\Sigma} dS \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos t)} \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt + \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt + \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dx dy \right] = 2 \left[\int_0^{\pi} 2 \cos \frac{t}{2} dt - \int_{\pi}^{2\pi} 2 \cos \frac{t}{2} dt + \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 1^2 \right] \\ &= 2 \left[4 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} - 4 \sin \frac{t}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} + \sqrt{2} \pi \right] = 16 + 2\sqrt{2} \pi. \end{aligned}$$

4. 令 L_1 为 x 轴上由原点到点 $(2,0)$ 的有向直线段, D 为 L 与 L_1 围成的区域, 则由格林公式,

$$I = \int_L (e^x \sin y - 2x - 2y) dx + (e^x \cos y - x) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D [e^x \cos y - 1 - (e^x \cos y - 2)] d\sigma - \int_{L_1} (e^x \sin y - 2x - 2y) dx + (e^x \cos y - x) dy \\
&= \iint_D d\sigma - \int_0^2 -2x dx = \frac{1}{2} \pi + x^2 \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} + 4.
\end{aligned}$$

5. 由高斯公式得

$$\begin{aligned}
I &= \oiint_{\Sigma} 2xz dydz + yzdz dx - z^2 dx dy \\
&= \iiint_{\Omega} (2z + z - 2z) dv = \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad f(x) &= \frac{3}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n \cdot 2^{n+1}] x^n \quad \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

7. 特征方程是 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 特征根为 $r = 2, 3$,

$$\text{故 } y'' - 5y' + 6y = 0 \text{ 的通解为 } y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

因为 $\lambda = 2$ 是特征方程的单根, 故设特解为 $y^* = x(ax + b)e^{2x} = (ax^2 + bx)e^{2x}$

$$(y^*)' = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx)e^{2x} = [2ax^2 + (2a + 2b)x + b]e^{2x},$$

$$(y^*)'' = (4ax + 2a + 2b)e^{2x} + 2[2ax^2 + (2a + 2b)x + b]e^{2x}$$

$$= [4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b]e^{2x},$$

$$\text{所以, } [4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b] - 5[2ax^2 + (2a + 2b)x + b] + 6(ax^2 + bx) = x.$$

$$\text{化简得: } -2ax + 2a - b = x.$$

$$\text{由 } \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - b = 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$\text{所以 } y^* = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^{2x}$$

$$y'' - 5y' + 6y = xe^{2x} \text{ 的通解为 } y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{2x}, \text{ 其中 } c_1, c_2 \text{ 是任意常数.}$$

2013 春季高等数学 I-2 (A) 参考答案

一、填空题(共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x,y) dx$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ 5. $\frac{3}{2}$ 6. $\frac{\pi}{e^4}$

二、选择题(共 4 题, 每题 3 分, 共 12 分)

1. C 2. D 3. B 4. B

三、计算题(共 7 题, 每题 10 分, 共 70 分)

$$1. \text{ 由 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-3y}{y+z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x+10y-z}{y+z} = 0 \\ x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-9 \\ y=-3 \\ z=-3 \end{cases},$$

因此函数 $z = f(x,y)$ 的驻点 $(9,3)$ 或 $(-9,-3)$ 。在驻点处,

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y+z-(x-3y)\frac{\partial z}{\partial x}}{(y+z)^2} = \frac{1}{y+z},$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x-3y}{y+z} \right) = \frac{-3(y+z)-(x-3y)(1+\frac{\partial z}{\partial y})}{(y+z)^2} = -\frac{3}{y+z},$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(10-\frac{\partial z}{\partial y})(y+z)-(-3x+10y-z)(1+\frac{\partial z}{\partial y})}{(y+z)^2} = \frac{10}{y+z},$$

在 $(9,3)$ 处, $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{5}{3}$, $B^2 - AC = -\frac{1}{36} < 0$ 且 $A > 0$, 因此 $(9,3)$ 是极小值点, 极小值为 $z|_{(9,3)} = 3$ 。

在 $(-9,-3)$ 处, $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{5}{3}$, $B^2 - AC = -\frac{1}{36} < 0$ 且 $A < 0$, 因此 $(-9,-3)$ 是极大值点, 极大值为 $z|_{(-9,-3)} = -3$ 。

2. $S: 3(x^2 + z^2) + 2y^2 = 12$ 在 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 的法向量为

$$\{6x, 4y, 6z\}|_{(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})} = (0, 4\sqrt{3}, 6\sqrt{2}), \text{ 外单位法向量为 } \left\{ 0, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{30}} \right\}.$$

在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 2\sqrt{3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z = 2\sqrt{2}$ 。

所以 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处沿外法线方向的方向导数为

$$\{0, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\} \cdot \left\{0, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{30}}\right\} = \frac{24}{\sqrt{30}}。$$

3. $\Omega_1: x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 1, \Omega_2: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2,$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega_1} (z - x^2 - y^2) dV + \iiint_{\Omega_2} (x^2 + y^2 - z) dV \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 (z - r^2) dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{r^2} (r^2 - z) dz = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}。 \end{aligned}$$

4. 令 L_1 为 x 轴上由原点到点 $(2, 0)$ 的有向直线段, D 为 L 与 L_1 围成的区域, 则由格林公式,

$$\begin{aligned} I &= \int_{L \cup L_1} (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y + 3x) dy - \int_{L_1} (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y + 3x) dy \\ &= \iint_D [(e^x \cos y + 3) - (e^x \cos y - 1)] d\sigma - 0 = 4 \iint_D d\sigma = 4 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 = 2\pi。 \end{aligned}$$

5. 添加辅助曲面 $S_1: z = 0 (x^2 + y^2 \leq 4)$, 法向量朝下, S 与 S_1 围成区域 Ω , 则由高斯公式,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S \cup S_1^-} yz dz dx + 2 dx dy - \iint_{S_1^-} yz dz dx + 2 dx dy = \iiint_{\Omega} z dV + \iint_{D_{xy}} 2 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho + 2 \cdot 4\pi = 4\pi + 8\pi = 12\pi。 \end{aligned}$$

6. 特征根为 $\lambda = \pm i$, $y'' + y = 0$ 的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 。

假设 $y'' + y = xe^x$ 的特解为 $y^* = (ax + b)e^x$, 则代入该方程得 $2ax + 2a + 2b = x$,

解得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ 。因此 $y'' + y = xe^x$ 的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x$ 。

7. 收敛半径 $R = 3$, 在 $x = \pm 3$ 处, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^{n-1}$ 都发散, 因此, 该级数的收敛域是 $(-3, 3)$ 。

和函数为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{3} \right)^n \right]' = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n \right]' = \left(\frac{\frac{x}{3}}{1 - \frac{x}{3}} \right)' = \left(\frac{x}{3-x} \right)' = \frac{3}{(3-x)^2}, \quad (-3 < x < 3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = S(1) = \frac{3}{4}。$$