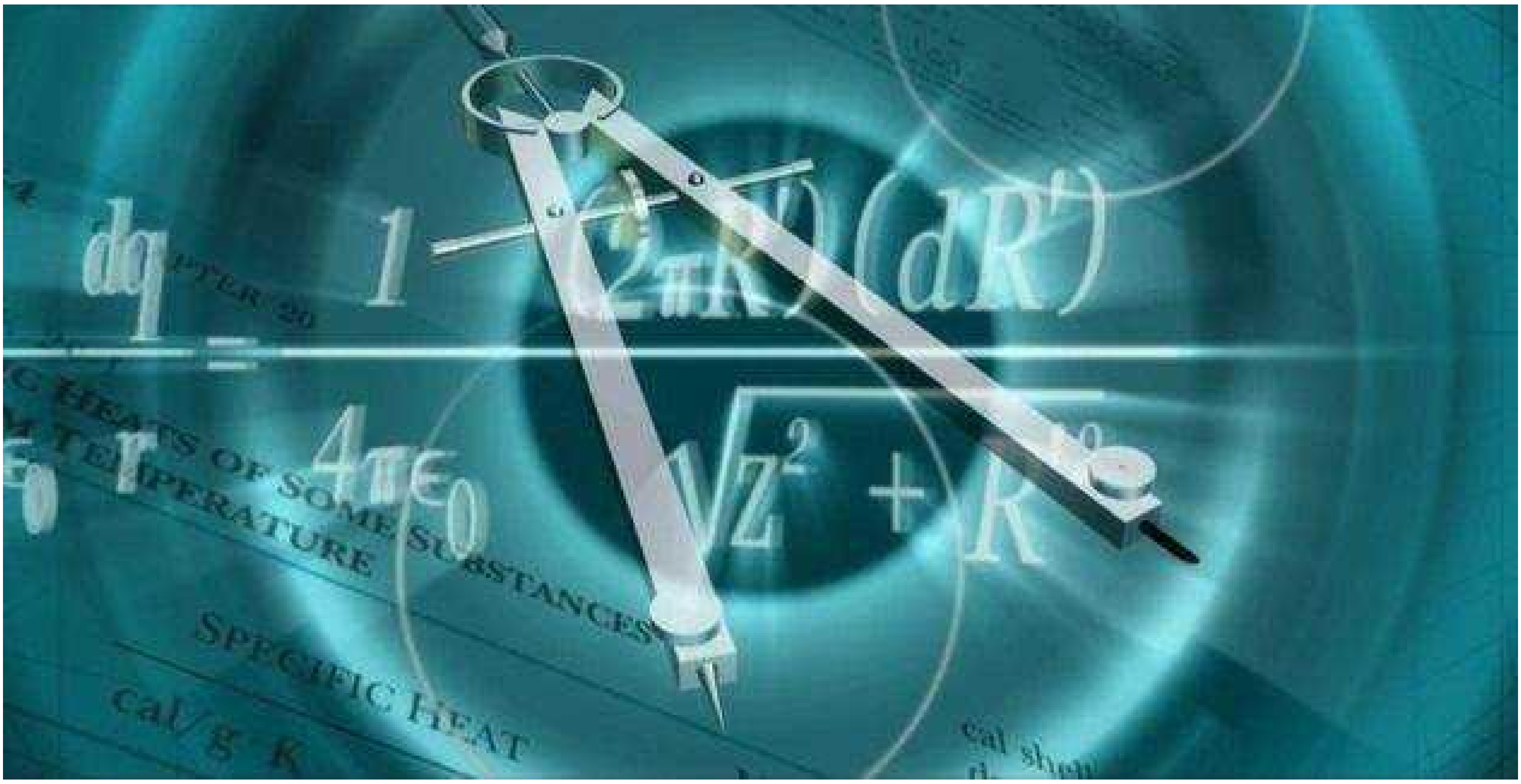
大气二班

2019~2020 春季学期

期末复习资料

整理：蒋斌



前言

2020 年春季学期的高数复习资料终于和大家见面了。本资料的内容包括多元函数、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数和微分方程，这些内容均是期末考试的重难点。本资料继承了上学年度资料的特点——在每章前面画出思维导图，并罗列出重要考点和知识点。同时，本学期所学内容涉及的知识点多，需要同学们大量记忆，因此本资料的例题又有所减少，每章留下了适当的练习题，以强化对知识点的理解。

至此，《高等数学》模块的复习资料整理就结束了。希望本资料对同学们复习高等数学有所帮助。同时，也请资料使用者在使用过程中发现问题及时与本人交流联系，最后祝大家高数期末顺利！

联系邮箱：1592512561@qq.com

2020 年 7 月 31 日

第六章 多元函数的微分法及其应用

- 多元函数的基本概念
- 偏导数、全微分
- 多元函数的求导法则及隐函数的求导
- 多元函数微分学的几何应用
- 方向导数与梯度
- 多元函数的极值及其求法
- 二元函数的泰勒公式

重要考点题型通关

考点一 求函数的表达式

1．设函数 f(x,y)可微，则$f'_x(x,y)=-f(x,y)$，$f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，且满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$，求 f(x,y).

解： 先计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}}=$

$e^{\frac{f'_y(0,y)}{f(0,y)}}=e^{\cot y}$. 即$\frac{f'_y(0,y)}{f(0,y)}=\cot y$，两边对 y 积分，得$\ln f(0,y)=\ln\sin y+\ln C$,

从而 $f(0,y)=C\sin y$. 由 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$，求得 $f(0,y)=\sin y$.

又由$f'_x(x,y)=-f(x,y)$，即$\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}=-1$，两边对 x 积分，得 $f(x,y)=Ce^{-x}$.

将 $f(0,y)=\sin y$代入，求得 $f(x,y)=\sin y\,e^{-x}$.

2. 设 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y}$, 求 $f(xy,\frac{x}{y})$.

解： 令 $u=xy, v=\frac{x}{y}$. 则 $f\left(xy,\frac{x}{y}\right)=f(u,v)=\frac{uv}{u^2+v}=\frac{xy\cdot\frac{x}{y}}{(xy)^2+\frac{x}{y}}=\frac{xy}{xy^3+1}$.

考点二 多（二）元函数的极限及连续性

若已知多元函数极限存在，要证明该极限，一般采用定义法

\# 证明多元函数极限不存在的方法主要有三种：一是找到任意两条路径，当点沿着两条路径趋于已知点时，极限值不相同；二是找到一条特定的路径，使其极限值不存在（即趋于无穷）；三是求累次极限，若累次极限存在但不相等，则说明多元函数极限不存在.

\# 多元函数求极限时，原理方法和一元函数求极限相似，这里把 xy 看做一个整体.

3. 证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$

证明：（解法一）因为$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\le|y^2|$, 故对任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$, d 当$|x-0|<\delta,|y-0|<\delta$, 且$(x,y)\neq(0,0)$时，有$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|\le|y^2|\le\varepsilon.$

由二元函数的极限定义知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$

（解法二）因为$x^2+y^2\ge2|xy|$, 所以 $0\le\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|xy|}{2}.$

又因为$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{2}=0$，由夹逼准则，知$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$

点评：常用的不等式关系有：$x^2+y^2\ge2|xy|$，$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\le1$，$|\sin\theta|\le1$

4. 证明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

证明：取 y = kx 这条路径趋于点 (0, 0), 则$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.$

该极限值与 k 值有关，显然不唯一，所以极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

5. 计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}$； （2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}$； （3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$

解：（1）因为$|\sin(xy)|\le|xy|$, 所以 $0\le\frac{\sin(xy)}{x}\le|y|$, 又$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$

由夹逼准则知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x}=0$。

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to2}y=2$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+4}+2)}{xy+4-4}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt{xy+4}+2\right)=4$

注意：第一问不能用第二问的方法解决，$\frac{\sin(xy)}{x}$的定义区域为$\{(x,y)|x\neq 0\}$, 而$\frac{\sin(xy)}{xy}$的定义区域为$\{(x,y)|x\neq 0，y\neq 0\}$(如果 y 为常数，那么是可以在分母中添加 y 的)

6. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln x^2+y^2, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$在(0, 0)处的连续性.

解： 令$\begin{cases}x=\mathrm{r}\cos\theta\\ \mathrm{y}=\mathrm{r}\sin\theta\end{cases}$,则$(x,y)\to(0,0)$时有 $\mathrm{r}\to 0$,

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{r\to 0}r^2\ln r^2=0=f(0,0)$, 故 f(x,y)在(0, 0)处的连续性.

点评：当 f(x,y)中的表达式有x^2+y^2时，常做变化 $x=\mathrm{r}\cos\theta$， $\mathrm{y}=\mathrm{r}\sin\theta$，这样$x^2+y^2=r^2$，且当$(x,y)\to(0,0)$时变为 $\mathrm{r}\to 0$.

考点三　偏导数的计算及多元复合函数的求导法则

求在某一点处的偏导数，可以先求后代，也可以先代后求

在面对分段的二元函数时，其在间断点处的偏导数应采用偏导数定义去求

偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$是一个整体符号，不能像导数$\frac{dy}{dx}$那样直接进行运算，可以理解为：$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\neq 1$（不能约分）

对于函数 z = f(x,y), 其偏导数$f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$本身也是 x 和 y 的二元函数，若不认识到这一点，在求一些高阶偏导数时会 “漏项”.

多元函数的求导分两种情况：

(1) 多元函数与多元函数复合. 如果 $u=\varphi(x,y)$和 $v=\Psi(x,y)$都在点(x,y)具有对 x，y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$在对应点具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\Psi(x,y))$在点(x,y)的两个偏导数都存在，它们为$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$.

(2) 一元函数与多元函数复合. 如果函数 $u=\varphi(t)$及 $v=\Psi(t)$在点 t 都可导，函数 $z=f(u,v)$在对应点具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f(\varphi(t),\Psi(t))$在都

可导，并且有$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$, 其中$\frac{dz}{dt}$称为 z 关于 t 的全导数.

上述两种情况可以推广到三元及其三元以上的多元函数，但改变条件时，可以推出一些特例.

当函数中间变量本身又是自变量的函数时，比如设 $z=f(u,x,y)$具有连续的偏导数，而 $u=\varphi(x,y)$具有偏导数，则该复合函数的偏导数依然可又由上述的两个定理求导（$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial d}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$），这里需注意$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$的区别：前者是固定 y 对 x 求偏导数，而后者是指 $f(u,x,y)$的第二项对 x 求偏导数.

全微分形式的不变性

7. (1) 设 $f(x,y)=e^{\arctan\frac{y}{x}}\ln(x^2+y^2)$，求$f_x'(1,0)$.

(2) 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^5-y^3}$，求$f_x'(0,0)$.

解：(1) 先将 y 固定在 $y=0$, 则有 $f(x,0)=2\ln|x|$, 从而$f_x'(x,0)=\frac{2}{x}$, 则$f_x'(1,0)=2$.

(2) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^5}}{\Delta x}=0$.

点评：（1）若先求导，计算过程会十分麻烦.

（2）第二题求导后代入发现偏导数在（0,0）处没有意义，但题目又要求计算，所以应使用定义求计算.

8. 设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$在点$(2,\frac{1}{\pi})$处的值为________.

解： $\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y}e^{-x}\cos\frac{x}{y}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{-x}\left[\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y^2}\right)\cos\frac{x}{y}+\frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y}\right],\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\left(\frac{\pi}{e}\right)^2.$$

9. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，证明$f_{xy}''(0,0)\neq f_{yx}''(0,0)$.

证明：当$(x,y)\neq(0,0)$时，$f_x'(x,y)=\frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$，$f_y'(x,y)=\frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

当$(x,y)=(0,0)$时，由定义得$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$, 再次用定义求，可得：

$f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,0+\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=-1$，$f''_{yx}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(0+\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=1$

从而证明了$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

点评：这一题说明，函数 $z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数只有在其定义区域内连续的时候，才有$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}$这一等式成立

此题的另一种解法——采用累次极限：

$$f'_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}y\frac{(\Delta x)^2-y^2}{(\Delta x)^2+y^2}=-y$$

于是$f''_{xy}(0,0)=\frac{df'_x(0,y)}{dy}=-1$，同理可求，$f''_{yx}(0,0)=1$

10. 设 $z=f(x,y)$是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 dz.

解：把方程两端微分得 $dz-dy-dx+e^{z-y-x}+xe^{z-y-x}(dz-dy-dx)=0$

整理得：$(1+xe^{z-y-x})dz=(1+xe^{z-y-x}-e^{z-y-z})dx+(1+xe^{z-y-x})dy$

解得 $dz=\frac{(1+xe^{z-y-x}-e^{z-y-z})}{(1+xe^{z-y-x})}dx+dy$

11. 设 $z=xy\cdot f(\frac{y}{x})$，$f(u)$可导，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=yf\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yf'\left(\frac{y}{x}\right)$

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xyf\left(\frac{y}{x}\right)-y^2f\left(\frac{y}{x}\right)+xyf\left(\frac{y}{x}\right)+y^2f\left(\frac{y}{x}\right)=2z$

12. 设 $f(u)$具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$，求$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$.

解：由已知条件可得

$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{x}{y}\right)$，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$

$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)$，$\frac{\partial z_9}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)$

$=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)$

于是$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=x^2\left[\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)\right]-y^2\left[\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\right.$

$\left.\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)\right]=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right).$

13. 设函数 $z=\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}tf(x^2+y^2-t^2)\,dt$，其中函数 f 具有连续的导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： 令 $u=x^2+y^2-t^2$, 则 $z=\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}tf(x^2+y^2-t^2)\,dt=$

$\int_{x^2+y^2}^{0}\sqrt{x^2+y^2-u}f(u)\,d\sqrt{x^2+y^2-u}=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2}f(u)du$

于是$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2}f(u)du\right)=\frac{1}{2}f(x^2+y^2)\cdot 2x=xf(x^2+y^2)$, 从而

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xyf'(x^2+y^2)$

14. 利用变量代换 $u=x.v=\frac{y}{x}$, 一定可以把方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$=z 转换为新方程______.

A. $u\frac{\partial z}{\partial u}=z$ B. $v\frac{\partial z}{\partial v}=z$ C. $v\frac{\partial z}{\partial u}=z$ D. $u\frac{\partial z}{\partial v}=z$

解： 由多元复合函数求导法则知

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}$, 代入原方程组中，求得

$x\frac{\partial z}{\partial u}=z$，也即 $u\frac{\partial z}{\partial u}=z$, 选 A.

（可以理解为原来的函数为 $z=f(x,y)$，而变换后的函数为 $z=f(x,\frac{y}{x})$）

15. 设变换$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$可将方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$=0，求常数 a

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$,

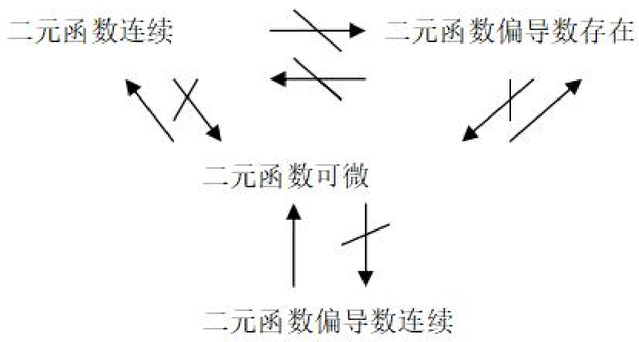
代入原方程，整理后有$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, 其满足的条件为

$10+5a\neq 0$ 以及 $6+a-a^2=0$，解得 $a=3$

点评：做变换后的函数为 $z=z(x-2y,x+ay)$. 偏导数$\frac{\partial z}{\partial u}$、$\frac{\partial z}{\partial v}$仍然是关于 x,y 的函

数, 即$\frac{\partial z}{\partial u}=z_u'(x-2y,x+ay),\frac{\partial z}{\partial v}=z_v'(x-2y,x+ay)$

考点四　二元函数可微、偏导数存在和连续之间的关系



详细内容请查看班级群内文件或点击此链接：

https://wenku.baidu.com/view/f0c1a9ff680203d8ce2f2499.html?from=search

考点五　隐函数求导法则

熟记一元和二元函数求导法则

一元：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}$，二元：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$（请大家自己去注意该结论成立的条件）

对于复杂的二元函数的复合，保持冷静，做到细心

16. 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xy}=1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1,1)$的一个邻域，在此邻域内该方程______.

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$，$y=y(x,z)$

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$，$z=z(x,y)$

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$

解析： D （提示：求出F_x',F_y',F_z'，发现$F_z'=0$）

17. 设函数 $z=z(x,y)$由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

解：（法一）直接应用隐函数求导公式，令 $F(x,y,z)=z-e^{2x-3z}+2y$，有$F_x'=-2e^{2x-3z},F_y'=-2,F_z'=1+3e^{2x-3z}$，从而有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$，代入所求式子，有 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2$

（法二）对方程两边求全微分，有 $dz=e^{2x-3z}\cdot(dx-3dz)+2dy$，整理得 $dz=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}dx+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}dy$，于是求出了$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$，计算结果同上.

18. 设函数 $u=f(x,y,z)$具有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$所确定，求 du.

解： 设 $F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$，则$F_x'=(x+1)e^x$，$F_y'=-(y+1)e^y$，$F_z'=-(z+1)e^z$，故$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+1)}{(z+1)}e^{x-z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{(y+1)}{(z+1)}e^{y-z}$，而$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x'+f_z'\cdot\frac{(x+1)}{(z+1)}e^{x-z}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=f_y'-f_z'\frac{(y+1)}{(z+1)}e^{y-z}$，于是 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=(f_x'+f_z'\cdot\frac{(x+1)}{(z+1)}e^{x-z})dx+(f_y'-f_z'\frac{(y+1)}{(z+1)}e^{y-z})dy$

19. 设 $y=y(x),z=z(x)$是由方程 $z=xf(x+y)$和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导导数，求$\frac{dz}{dx}$.

解：分别在 $z=xf(x+y)$和 $F(x,y,z)=0$ 两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f+xf'\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\\ F_x'+F_y'\frac{dy}{dx}+F_z'\frac{dz}{dx}=0\end{cases}，\text{整理得：}\begin{cases}-xf'\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=f+xf'\\ F_y'\frac{dy}{dx}+F_z'\frac{dz}{dx}=-F_x'\end{cases}，$$

解得：$\frac{dz}{dx}=-\frac{(f+xf')F_y'-xf'F_x'}{F_y'+xf'F_z'}(F_y'+xf'F_z'\neq0)$

点评：本题需通过含有导数的方程组求解，这类题型还可以为证明题，用的是同样的方法求解.

考点六　多元函数微分学的几何应用

\# 空间曲线的切线和法平面：

(1) 参数方程式：$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$

切线方程：$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$，法平面方程：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-$

$y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$（特别的，若所给参数为,$y=y(x),z=z(x)$此时只需将 x 看成参数即可，即，$x=x,y=y(x),z=z(x)$）

(2)方程组式：$\begin{cases}G(x,y,z)=0\\F(x,y,z)=0\end{cases}$,（设 F, G 对各个变量具有连续的偏导数，且 $J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$，这时曲线在点 $M(x_0,y_0,z_0)$，确定了一组函数,$y=y(x),z=z(x)$), 在方程组中，两边分别对 x 求全导数，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

解此方程组，有$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}Fz & Fx\\Gz & Gx\end{vmatrix}$，$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}Fx & Fy\\Gx & Gy\end{vmatrix}$

曲线在 M 点的切向量 $T=\left(\begin{vmatrix}Fy & Fz\\Gy & Gz\end{vmatrix}_M,\begin{vmatrix}Fz & Fx\\Gz & Gx\end{vmatrix}_M,\begin{vmatrix}Fx & Fy\\Gx & Gy\end{vmatrix}_M\right)$

切线方程：$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}Fy & Fz\\Gy & Gz\end{vmatrix}_M}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}Fz & Fx\\Gz & Gx\end{vmatrix}_M}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}Fx & Fy\\Gx & Gy\end{vmatrix}_M}$

法平面方程：$\begin{vmatrix}Fy & Fz\\Gy & Gz\end{vmatrix}_M(x-x_0)+,\begin{vmatrix}Fz & Fx\\Gz & Gx\end{vmatrix}_M(y-y_0)+\begin{vmatrix}Fx & Fy\\Gx & Gy\end{vmatrix}_M(z-z_0)=0$

曲面的切平面和法向量

已知曲面方程 $F(x,y,z)=0$, 并且对 x,y,z 有连续的偏导数（三者不同时为零）

法向量 $n=(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0))$

法线方程：$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$

切平面方程：$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

20. 求$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ z=x^2+y^2\end{cases}$在点（-1, 1, 2）处的切线方程为________.

解： 方程组两边对 x 求导有$\begin{cases}x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0\\ \frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}\end{cases}$，解得$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},\frac{dz}{dx}=0$, 所以在点（-1, 1, 2）处的切向量为$\vec{T}=(1,1,0)$, 切线方程为$\begin{cases}\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}\\ z=2\end{cases}$

21. 试证锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}+3$ 的所有切平面都通过锥面的顶点.

证: 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 故在锥面上任意一点$(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$z-z_0=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(x-x_0)+(y-y_0)\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，将$z_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}+3$ 代入，整理后

得$x_0x+y_0y-(z_0-3)(z-3)=0$，顶点（0, 0, 3）满足上述方程，证毕。

22. 由曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法向量为________.

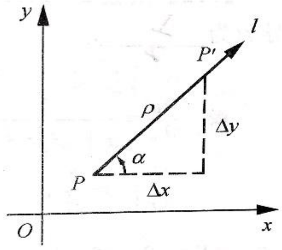
解: 由题可知旋转曲面的方程为 $3x^2+2y^2+3z^2=12$，令 $F(x,y,z)=3x^2+2y^2+3z^2-12$，则$F_x'=6x,F_y'=4y,F_z'=6z$, 所以曲面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的法向量为$(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$, 其单位向量为$(0,\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5})$

23. 曲面 $3x^2+y^2+z^2=12$ 上点 $M(-1,0,3)$处的切平面与平面 $z=0$ 的夹角为_______.

解：令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-12$，则 $F_x'(-1,0,3)=-6$，$F_y'(-1,0,3)=0$，$F_z'(-1,0,3)=6$，于是曲面在点 $M(-1,0,3)$的法向量为$n_1=(-6,0,6)$. 取$n_2=(0,0,1)$为平面 $z=0$ 的一个法向量，于是$\cos\theta=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可知夹角为$\frac{\pi}{4}$.

考点七　方向导数

\# 熟记方向导数的定义：设函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$的邻域内有定义，过点 P 引射线 l（如下图所示），在 l 上点 P 的邻近取一动点$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$，记$\rho=$



$|PP'|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，当$P'$沿 l 趋于 P 点时，极限 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\rho\cos\alpha,y+\rho\sin\beta)-f(x,y)}{\rho}$

存在，那么称该极限为函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$沿方向 l 的方向导数，记为$\frac{\partial f}{\partial l}$.

方向导数与偏导数的简单区分：由方向导数定义中的$\rho\to 0^+$可以知道，方向导数求的是单侧极限，是求在某一射线方向的导数；而偏导数是在直线方向的导数

函数可微一定可以得出函数任意方向的方向导数存在，但反过来讲不成立.

举例：$z=\sqrt[3]{x^3+y^3}$在点（0, 0）处。

方向导数的计算公式.

梯度的两个表述方式：

(1) $f(x,y)$在某点的梯度∇f 是这样一个向量：它的方向为函数在该点方向导数取得最大值的方向，它的模等于方向导数的最大值.

(2) $f(x,y)$在某点的梯度∇f 是这样一个向量：它的方向是等值线 $f(x,y)=c$ 在该点的法线方向，它的模为 $f(x,y)$沿法线方向的偏导数.

（非零函数在其定义区域内某点的梯度唯一）

24. 设$\vec{n}$是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$处指向外侧的法向量，则 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点 P 处沿$\vec{n}$方向的方向导数为________.

解：令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$，因为 $F_x'(1,1,1)=4$，$F_y'(1,1,1)=6$,$F_z'(1,1,1)=2$, 所以$\vec{n}=(4,6,2)$，又$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$, 所以$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{8}{\sqrt{14}},-\sqrt{14}\right)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{11}{7}$.

点评：偏导数可以看成两个向量的数量积，即偏导数组成的一个向量，该点的方向向量的单位向量（该单位向量由方向向量除以它的模得到）

25. 数量场 $u=xy+yz+zx$ 在点 P(1, 2, 3) 处沿其向径方向的方向导数为________.

解：向径$\vec{r}=(1,2,3)$，即在 P 点的方向向量，偏导数组成的向量为$(5,4,3)$, 借用上题的结论，$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_P=(5,4,3)\cdot\frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}=\frac{22}{\sqrt{14}}$.

考点八：多元函数的极值与最值

极值的充分必要条件

（1） 必要条件

若函数 $z = f(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$处可微且取得极值，那么必有$f_x(x_o,y_0) = 0$，$f_y(x_o,y_0) = 0$(注意两个条件同时成立)

（2） 充分条件

设函数 $z = f(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$的某邻域内具有二阶连续偏导数，且 $f_x'(x_0,y_0) = 0$，$f_y'(x_0,y_0) = 0$ ， 记 $A = f_{xx}''(xo,y_0),B = f_{xy}''(xo,y_0),C = f_{yy}''(xo,y_0)$, 那么：

① 若 $AC - B^2 > 0$，则 $f(x_0,y_0)$是极值，且当 $A > 0$ 时，$f(x_0,y_0)$是极小值，当 $A < 0$ 时，$f(x_0,y_0)$是极大值

② 若 $AC - B^2 < 0$， 则 $f(x_0,y_0)$不是极值

③ 若 $AC - B^2 = 0$， 则不确定， 需进一步判断

条件极值——拉格朗日乘数法

函数 $z = f(x,y)$在附加条件$\varphi(x,y) = 0$ 下的极值称为条件极值

做拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$，其中$\lambda$为某一常数，则点$(x,y)$时极值点的必要条件为：

$$\begin{cases} F_x'(x,y,\lambda) = f_x'(x,y) + \lambda\varphi_x'(x,y) = 0 \\ F_y'(x,y,\lambda) = f_y'(x,y) + \lambda\varphi_y'(x,y) = 0 \\ F_\lambda'(x,y,\lambda) = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

由该方程解出的(x,y)可能是条件极值的极值点

（若有两个附加条件,则可以设拉格朗日函数为$F(x,y,\lambda,\mu) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) + \mu\psi(x,y)$, 以此类推）

多元函数的最值

先求出有界闭区域 D 上的极大值与极小值，再与边界上的函数值比较即可（若通过函数极值的必要条件求得的驻点不在闭区域内，而题目又要求最值，那么最值一定在边界上取得，从而可以采用条件极值法或代入条件转化为一元函数）

26. 设 f(x,y)与φ(x,y)均为可微函数，且$\varphi_y'(x,y) \neq 0$，已知(x_0,y_0)是 f(x,y)在约束条件$\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是______.

A. 若$f_x'(x_0,y_0)=0$，则$f_y'(x_0,y_0)=0$

B. 若$f_x'(x_0,y_0)=0$，则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

C. 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y'(x_0,y_0)=0$

D. 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

解析：D　设 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，由题设可知：

$$\begin{cases} F_x'(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0 \\ F_y'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

消去λ得：$\varphi_y'(x_0,y_0)\cdot f_x'(x_0,y_0)=\varphi_x'(x_0,y_0)\cdot f_y'(x_0,y_0)$

又$\varphi_y'(x,y)\neq 0$，则当$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 时，$\varphi_x'(x_0,y_0)\cdot f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

27. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线 $x+y=6$、y 轴和 x 轴所围成的闭区域 D 上的极值与最值.

解：由方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$得 $x=0(0\le y\le 6)$，

(4,0),(2,1). 点(4,0)及线段 x=0 都在 D 的边界上，只有(2, 1)是可能的极值点

$$f_{xx}''=8y-6xy-2y^2,\quad f_{xy}''=8x-3x^2-4xy,\quad f_{yy}''=-2x^2$$

在点(2, 1)处 $A=f_{xx}''(2,1)=-6<0, B=f_{xy}''(2,1)=-4, C=f_{yy}''(2,1)=-8$

即 $BC-A^2=32>0$，从而可知点(2,1)是极大值点，极大值为 $f(2,1)=4$

在边界 x=0 和 y=0 上 $f(x,y)=0$，在边界 $x+y=6$ 上，将 $y=6-x$ 代入，有 $z=2x^3-12x^2(0\le x\le 6)$. 由$z'=6x^2-24x=0$，解得 $x=0,x=4$, 又 $z''|_{x=4}=12x-24|_{x=4}=24>0$ 所以(4,2)是边界上的极小值点，极小值为 $f(4,2)=-64$

经比较，最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64$

28. 设 x,y,z 为实数，且满足关系式$e^x+y^2+|z|=3$，试证：$e^xy^2|z|\le 1$.

解：设函数为 $f(x,q)=e^x y^2(3-e^x-y^2)$，因为$|z|\ge 0$，故函数的定义域是$e^x+y^2\le 3$，现求函数在区域 D：$e^x+y^2\le 3$ 上的最大值，令

$\begin{cases} fx=y^2e^x(3-2e^x-y^2)=0 \\ fy=ye^x(6-2e^x-4y^2)=0 \end{cases}$解得 $y=0,(x\le \ln 3)$或$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

当 $y=0$ 时，$f(x,y)=0$；而当 $x=0,y=\pm 1$ 时，$f(0,\pm 1)=1$；此外，在闭区域 D 的边界上，有$e^x+y^2=3$，即 $f(x,y)=0$，从而 $f(0,\pm 1)=1$ 为函数 $f(x,y)$ 在$e^x+y^2\le 3$ 上取得的最大值，于是$e^x y^2|z|\le 1$.

第六章 多元函数巩固提高练习

1. 设 $f(x-y,\ln x)=(1-\frac{y}{x})\frac{e^x}{e^y\ln x}$，则 $f(x,y)=$_________.

2. 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$，则$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$__________.

3. 已知 $Z=u^v,u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\frac{y}{x}$，则 dZ =__________.

4. 设函数 $z=f\left(\frac{\sin x}{y},\frac{y}{\ln x}\right)$，其中 f 是可微函数，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$__________.

5. 设函数 $u=(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数$\varphi$二阶导数，$\psi$具有一阶导数，则必有_________.

   A. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　C. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　D. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

6. 设 $f(x,y,z)$是 k 次齐次函数，即 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$，λ 为某一常数，则下面结论正确的是________.

   A. $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=k^\lambda f(x,y,z)$　B. $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda^k f(x,y,z)$

   C. $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$　D. $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=f(x,y,z)$

7. 设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，则$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=$__________.

8. 设 $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

9. 设 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

10. 设函数 $z=z(x,y)$由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 给出，F,z 都是可微函数，证明：

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$

11. 设 $u=f(x,y,z)$具有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$及 $z=z(x)$分别由下列两式确定：$e^{xy}-xy=2,e^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$，求$\frac{du}{dx}$.
12. 试证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$在任意一点处的切平面，在三个坐标轴上的截距之和为常数.
13. 设函数 $z=f(x,y)$，有$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1,f_y'(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$________.
14. 设 $z(x,y)=(1-y^2)f(y-2x)$，且已知 $f'(y)=\frac{ye^y}{(1+y)^2}$，$f(0)=1$，则 $\int_0^2 z(1,y)dy=$________.
15. 设函数 $z=f(x,x)$在点(1, 1)可微，且 $f(1,1)=1,f_1'(1,1)=2,f_2'(1,1)=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 则$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)|_{x=1}.=$_________.
16. 函数 $f(u,v)$由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$确定，其中函数 $g(y)$可微，且 $g(y)\neq 0$，则$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$________.
17. 已知函数 $z=f(x,y)$的全微分为 $dz=2xdx-2ydy$，并且 $f(1,1)=2$，求 $f(x,y)$在椭圆域 $D=\left\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\right\}$上的最值.

第六章 多元函数巩固提高练习答案

1. $f(x,y)=\frac{xe^x}{ye^y}$

2. $-2e^{-x^2y^2}$　　提示：注意对变限积分的求导

3. $\frac{u^v}{x^2+y^2}\left[\left(\frac{xv}{u}-y\ln u\right)dx+\left(\frac{yv}{u}+x\ln u\right)dy\right]$　提示：全微分形式的不变性

4. $\frac{\cos x}{y}\cdot f_1'-\frac{y}{x\ln^2 x}\cdot f_2'$　提示：将$\frac{\sin x}{y},\frac{y}{\ln x}$分别看成中间变量再用法则求偏导

5. B

6. C　解析：令 $u=tx,v=ty,\omega=tz$,则有 $f(u,v,\omega)=t^kf(x,y,z)$，该式的两边对 t 求导有：$x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial \omega}=kt^{k-1}f(x,y,z)$,两边再同时乘以 t,有 $tx\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+ty\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+tz\cdot\frac{\partial f}{\partial \omega}=kt^kf(x,y,z)$,即 $u\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+v\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\omega\cdot\frac{\partial f}{\partial \omega}=kf(u,v,\omega)$,由此可知 C 选项正确.

7. $-4xyf''_{11}+2(x^2-y^2)e^{xy}f''_{12}+xye^{2xy}f''_{22}+e^{xy}(1+xy)f'_2$

8. 解：$\frac{\partial z}{\partial y}=x^4f_1'+x^2f_2'$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^5f''_{11}+2x^3f''_{12}+xf''_{22}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf''_{11}-yf''_{22}$

9. x^2+y^2

10. 略（提示：将 $x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}$看做中间变量，再用隐函数存在定理 2 求偏导数)

11. $\frac{du}{dx}=f_x'-\frac{y}{x}f_y'+\left[1-\frac{e^x\cdot(x-z)}{\sin(x-z)}\right]f_z'$（提示：$u=(x,y(x),z(x))$,于是有$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$)

12. 略（提示：先求出切面方程，再化为截距式)

13. $1+xy+y^2$

14. -2 （提示：先求出 f(x)的表达式；所求积分其实为一元函数的积分）

15. 51

16. $-\frac{g'(v)}{[g(v)]^2}$

17. $x=\pm1$ 时，最大值为 3；$x=0$ 时，最小值为 -2

第七章 重积分

- **二重积分**
- **三重积分**
- **重积分的应用**
- **含参变量积分**

重要考点题型通关

考点一：二重积分的性质

\# 二重积分的几个重要性质

性质 1：$\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{kf(x,y)d\sigma} = k\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f(x,y)d\sigma}$

性质 2：$\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f_1(x,y) \pm f_2(x,y)d\sigma} = \iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f_1(x,y)d\sigma} \pm \iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f_2(x,y)d\sigma}$

性质 3：$\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f(x,y)d\sigma} = \iint_{D_1} \mathrm{f(x,y)d\sigma} \pm \iint_{D_2} \mathrm{f(x,y)d\sigma},\ \mathrm{D = D_1 + D_2}$

性质 4：在区域 D 上，$\mathrm{f(x,y) \le \varphi(x,y)}$，则有

$$\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f(x,y)d\sigma} \le \iint_{\mathrm{D}} \mathrm{\varphi(x,y)d\sigma}$$

性质 5：在闭区域 D 上，$\mathrm{f(x,y)}$的最大值与最小值分别为 M 和 m，则有

$$\mathrm{m\sigma} \le \iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f(x,y)d\sigma} \le M\sigma,\ \sigma\text{为闭区域面积}$$

性质 6：设函数 $\mathrm{f(x,y)}$在闭区域 D 上连续，则在 D 上至少有一点(ξ,η)，使得

$$\iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f(x,y)d\sigma} = \mathrm{f(\xi,\eta)}\sigma,\ \sigma\text{为闭区域面积.}$$

1. 设 $\mathrm{f(x,y)}$连续，且 $\mathrm{f(x,y)} = xy + \iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f(u,v)dudv}$，其中 D 是由 $\mathrm{y = 0, x = 1, y = x^2}$ 所围成的闭区域，则 $\mathrm{f(x,y)} =$________.

解：记 $\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{D}} \mathrm{f(u,v)dudv}$，则 $\mathrm{f(x,y)} = xy + I$，两端同时取二重积分得

$$\iint\limits_{\mathrm{D}} \mathrm{f(x,y)d\sigma} = \iint\limits_{\mathrm{D}} (xy + I)\mathrm{d\sigma} = \int_0^1 \mathrm{dx} \int_0^{\mathrm{x^2}} \mathrm{(xy + I)dy} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3}I = I$$

解得$\frac{1}{8}$，所以 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$

2. 计算$\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,dxdy$，其中 D 为$x^2+y^2\le r^2$.

解：利用积分中值定理，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,dxdy=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\pi r^2}\iint_D e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi r^2$$

$$=\lim_{\xi\to0,\eta\to0}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)=0$$

考点二：二重积分在两种坐标系下的计算

\# 直角坐标系下

- X 型区域 $\begin{cases}a\le x\le b\\ \varphi_{1(x)}\le y\le\varphi_2(x)\end{cases}$，

  则积分写成$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$

- Y 型区域$\begin{cases}c\le y\le d\\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\end{cases}$

  则积分可写成$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx$

\# 极坐标系下

在变换$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$下，有$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta$

积分区域的形式写成：$\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\end{cases}$ 于是积分可写成

$\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$

（当极点在闭区域内是情况如何？）

3. 交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx=$________.

解：由上式可知，积分区域 $D=D_1+D_2$，其中

$$D_1=\begin{cases}0\le y\le\frac{1}{4}\\ y\le x\le\sqrt{y}\end{cases},D_2=\begin{cases}\frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{2}\\ y\le x\le\frac{1}{2}\end{cases}$$，于是区域 D 又可以写成

$$D=\begin{cases}0\le x\le\frac{1}{2}\\ x^2\le y\le x\end{cases}$$，从而原式=$\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$

4. 设 f(x)为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)=$________.

解：交换积分次序，得 $\mathrm{F(t)}=\int_1^{\mathrm{t}}\mathrm{dy}\int_y^t f(x)dx=\mathrm{F(t)}=\int_1^{\mathrm{t}}\mathrm{dx}\int_1^x f(x)dy=$ $\int_1^{\mathrm{t}} f(x)(\mathrm{x}-1)\mathrm{dx}$, 从而$\mathrm{F}'(\mathrm{t})=\mathrm{f(t)(t-1)}$, 所以，$\mathrm{F}'(2)=\mathrm{f}(2)$.

5. 设区域 D 是 y 轴与曲线 $\mathrm{x}=\cos y\,(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2})$ 所围成，则二重积分 $\iint_{\mathrm{D}} 3\mathrm{x}^2\sin^2\mathrm{y}\,\mathrm{dxdy}=$ ________.

解：$\iint_{\mathrm{D}} 3\mathrm{x}^2\sin^2\mathrm{y}\,\mathrm{dxdy}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy\int_0^{\cos y}3\mathrm{x}^2\sin^2\mathrm{y}\,\mathrm{dx}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 y\sin^2\mathrm{y}\,dy=$ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 y\,(1-\sin^2\mathrm{y})\,d(\sin y)=\frac{4}{15}$

注释：也可以转化为$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x$再用公式求解

6. 设平面区域 D 由曲线 $\mathrm{y}=\frac{\mathrm{x}^2}{2}$与直线 $\mathrm{y}=\mathrm{x}$ 所围成，求$\iint_{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\mathrm{dxdy}$.

解：易求两条线的交点为$(0,0)$和$(2,2)$, 因此有：

$$\iint_{\mathrm{D}}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\mathrm{dxdy}=\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}dy=\int_0^2\left(\arctan\frac{y}{x}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^2\frac{2x}{4+x^2}dx=\ln 2$$

注释：本题也可以使用极坐标计算（极坐标系下：$\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\\0\le\rho\le 2\sec\theta\tan\theta\end{cases}$，读者自行计算）

7. 设 $\mathrm{a}>0,\mathrm{f(x)}=\mathrm{g(x)}=\begin{cases}a\text{，若 }0\le\mathrm{x}\le1\\0\text{，其它}\end{cases}$，而 D 表示全平面，则 $\mathrm{I}=\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{f(x)g(y-x)dxdy}=$__________.

解：$\mathrm{I}=\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{f(x)g(y-x)dxdy}=\iint_{0\le x\le1,0\le y-x\le1}a^2\int_0^1 dx\int_x^{1+x}dy=a^2$

点评：本题虽然 D 为无界区域，但由于被积函数只在 D1：$0\le x\le1, 0\le y-x\le1$ 上不为零，因此实际求的是 $\iint_{\mathrm{D}_1}\mathrm{f(x)g(y-x)dxdy}$，并且 $\mathrm{f(x)g(y-x)dxdy}=\begin{cases}a^2\text{，}0\le x\le1,0\le y-x\le1\\0\text{，其它}\end{cases}$

8. 计算$\iint_{\mathrm{D}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}{1+\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\le1$

解：在极坐标系下计算此题。$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho d\rho \xrightarrow{\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}=t}$

$2\pi \int_0^1 \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt \xrightarrow{\text{分部积分法}} \pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

9. 计算积分$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是由 $y=x, x=a, y=0$ 围成.

解：利用极坐标系，$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_6^{a\sec\theta} \rho \bullet \rho d\rho = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta d\theta$

令 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta d\theta$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d(\tan\theta) = \sec\theta \bullet \tan\theta \,|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \sec\theta\, d\theta$ $= \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta = \sqrt{2} - I + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta$，而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta = \ln|\tan\theta + \sec\theta| \,|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$，从而解得 $I=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$，于是原式结果为$\frac{a^3}{6}\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$

点评：本题主要是要用到几个学过的积分公式：$\sec^2 x = 1+\tan^2 x$,$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

考点三：利用对称性计算二重积分

在积分区域对称时，要同时考虑被积函数的奇偶性，有以下结论：

设 D 关于 y 轴对称，D_1是 D 的右半部分，

若 $f(-x,y) = -f(x,y)$，则$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$

若 $f(-x,y) = f(x,y)$，则$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$

设 D 关于 x 轴对称，D_1是 D 的上半部分，

若 $f(x,-y) = -f(x,y)$，则$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$

若 $f(x,-y) = f(x,y)$，$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$

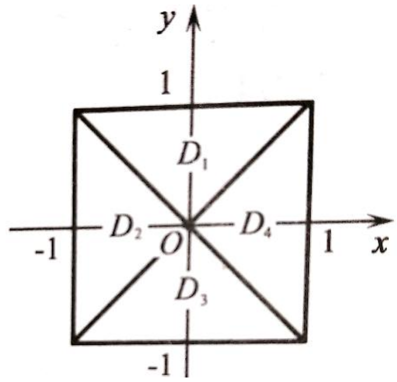
设 D 关于原点对称，D_1,D_2分别是 D 的对称于原点的两部分，

若 $f(-x,-y) = -f(x,y)$，则$\iint_D f(x,y)d\sigma = 0$

若 $f(-x,-y) = f(x,y)$，则$\iint_D f(x,y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$

二重积分的轮换对称性：在对 x 和 y 交换顺序后，积分的区间没有改变，则被积函数的 x 和 y 调换顺序后，积分值保持不变（$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(y,x)d\sigma$）

10. 如图，正方形区域 D：$\{(x,y)|\,|x| \le 1,|y| \le 1\}$ 被其对角线划分为 4 个区域D_k（k=1,2,3,4），$I=\iint_{D_k} y\cos x\,dxdy$，则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\} =$__________.



解：令，则 z 关于 y 为奇函数，关于 x 为偶函数，由题意知，D_1、D_3关于 y 轴对称，D_2、D_4关于 x 轴对称，故由对称性，$I_2 = I_4 = 0$，又由积分的保号性，知$I_1 > I_3$，所以答案为I_1

11. 设区域 $D = \{(x,y)|\chi^2 + y^2 \le 4,x \ge 0,y \ge 0\}$，f(x)在 D 上的正值连续函数，a，b 为常数，则$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma =$__________.

解： 易知在积分区域上 x，y 具有轮换对称性，即$\iint_D \sqrt{f(x)} = \iint_D \sqrt{f(y)}$，从而有

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma = \frac{1}{2}\iint_D \frac{a[\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}]+b[\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}]}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}} = \frac{1}{2}\iint_D (a+b)\,d\sigma = \frac{1}{2}(a+b)\pi$$

考点四：三重积分的运算

直角坐标系下的运算：

将空间闭区域Ω的形式写成：$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$，则三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

柱面坐标系下的运算

柱面坐标系的三个参数及取值范围：$\begin{cases} 0 \le \rho < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \iiint_\Omega f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\boldsymbol{\rho d\rho d\theta dz}$$

球面坐标系下的运算：

球面坐标系的三个参数及取值范围：$\begin{cases} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\mathbf{r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta}$

12. 计算$\iiint_\Omega (x+y+z)dv$，其中Ω为由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的区域.

解： 区域Ω可写成$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$，

故 $\iiint_\Omega (x+y+z)dv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[(x+y)z+\frac{z^2}{2}]|_0^{1-x-y}dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[(x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]dy=$

$\int_0^1\left[\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}+\frac{(1-x-y)^3}{6}\right]|_0^{1-x}dx=\int_0^1\frac{1}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}dx=\frac{1}{8}$

13. 计算$\iiint_\Omega\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dv$其中Ω为由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的区域.

解： $\iiint_\Omega\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]|_0^{1-x-y}dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}\right]dy$$

$$=\int_0^1[-\frac{1}{4}+\frac{x-1}{8}+\frac{1}{2(1+x)}]dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$$

14. 计算$\iiint_\Omega xy^2dv$，其中Ω由平面 $z=0, x+y-z=0, x-y+z=0, x=1$ 围成的区域.

解： 将 Ω 投影到 xOz 平面上，有$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z\le x\end{cases}$，于是 $\iiint_\Omega xy^2dv=$

$\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_{-(x-z)}^{x-z}xy^2dy=\frac{2}{3}\int_0^1 dx\int_0^x x(x-z)^3dz=\int_0^1\frac{x^5}{6}dx=\frac{1}{36}$

点评：本题的特点为灵活选取投影平面。实际上，两个平面是关于 xOz 平面对称的，它们与 xOz 平面的交线均为 z=x（可以利用法向量来确定两平面的大致位置）

15. 计算 $I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)dv$，其中Ω为平面曲线$\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$绕 z 轴一周形成的曲面

与平面 $z=8$ 所围成的区域.

解： 在柱面坐标系下，区域Ω可写成$\begin{cases}0\le\rho\le 4\\0\le\theta\le 2\pi\\\frac{\rho^2}{2}\le z\le 8\end{cases}$

于是 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\rho^2dz=2\pi\int_0^4\rho^3(8-\frac{\rho^2}{2})d\rho=\frac{1024\pi}{3}$

16. 计算 $I=\iiint_\Omega x^2dv$，其中Ω是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$和 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的空间闭区域.

解： 在球面坐标系下Ω可表示为$\begin{cases}0\le r\le R\\0\le\theta\le 2\pi\\0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$，于是

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot r^2\sin\varphi\, dr$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\, d\varphi\int_0^R r^4dr=\frac{1}{5}\pi R^5\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{12}\sqrt{2}\right)$$

考点五：利用对称性计算三重积分

与二重积分类似，当积分区域关于 xOz、yOz、xOy 平面对称时，考虑被积函数的奇偶性，同样可以得出有关结论

17. 设Ω是由曲面$x^2+y^2=1, z=0, z=1$ 所围成的闭区域，则$\iiint_\Omega[e^{z^3}\tan(x^2y^3)+3]dv$=________.

解： $\iiint_\Omega[e^{z^3}\tan(x^2y^3)+3]dv=\iiint_\Omega e^{z^3}\tan(x^2y^3)\,dv+3\iiint_\Omega dv=I_1+I_2$

对于I_1，由于积分区域关于 xOz 对称，而被积函数又是关于 y 的奇函数，所以I_1=0，故原式=3 $\iiint_\Omega dv=3\pi$

18. 设Ω为$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$，则$\iiint_\Omega(x+xyz^2-3)dv=$__________.

解： 积分区域是关于yOz 平面对称的，而$x+xyz^2$是关于x的奇函数，则原式$=-3\iiint_\Omega dv=-4\pi$

考点六：重积分的应用

利用重积分计算曲顶柱体的体积

计算曲面的面积

设曲面方程为 $z=z(x,y)$, 其在 xOy 平面上的投影区域为 D，则曲面的面积为

$$A=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$$

计算质心的位置（先建系，再利用物体的对称性计算，以计算$\bar{x}$为例）

质心位置的宏观表达式：$\bar{x}=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$

质心位置的积分表达式：$\bar{x}=\frac{\iint_D \mu(x,y)xd\sigma}{\iint_D u(x,y)d\sigma}$或者$\bar{x}=\frac{\iint_D \mu(x,y,z)xdv}{\iint_D u(x,y,z)dv}$，如果密度为常量，可以进行约分

计算对轴的转动惯量（以对 x 轴为例）

转动惯量的宏观表达式：$I_x=\sum m_i r_i^2$（r_i为m_i到质点的垂直距离）

转动惯量的积分表达式：$I_x=\iint_D \mu(x,y)x^2 d\sigma$或者$I_x=\iint_D \mu(x,y)(y^2+z^2)d\sigma$

计算某一物体对另一物体的万有引力

万有引力的表达式：$\vec{F}=G\frac{Mm}{r^3}\vec{e}_r$

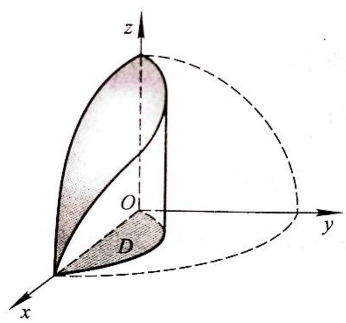
在空间直角坐标系中，取物体上任一质元的位置坐标为(x,y,z)，另一物体的坐标为(x_0,y_0,z_0)，于是，$\vec{F}$与 x,y,z 坐标轴的夹角的余弦值分别为：$\cos\theta=\frac{x-x_0}{r}$，$\cos\beta=\frac{y-y_0}{r}$，$\cos\gamma=\frac{z-z_0}{r}$

积分形式的万有引力为：$F_x=Gm\iiint_\Omega \frac{\mu(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv$

19. 求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$含在圆柱面$x^2+y^2=ax$内部的那部分面积.

解：如图所示，上半球面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，从而$\sqrt{1+z_x^2+z_y^z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，由曲面的对称性可知，所求面积为

$A=4\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^z}d\sigma$，在极坐标系下，有



$A=4a\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}d$

$2a^2(\pi-2)$

20. 计算由曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$所围成的立体体积（其中常数$a>0$）.

解： 由曲面方程知立体关于 xOz,yOz 对称，且$z\geq 0$。曲面在球面坐标下的方程为$r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}$，设Ω_1表示在曲面在第一卦限中在 xOy 上的投影区域，由对称性可知：$V=4\iiint_{\Omega_1}dv=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\sin\varphi\,dr=\frac{\pi}{3}a^3$

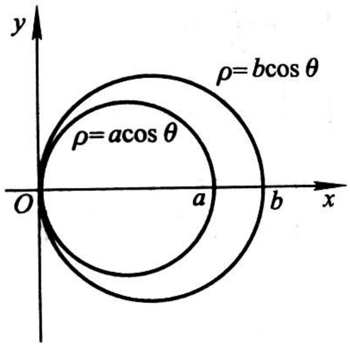
21. 一球形行星的半径为 R，其质量为 M，其密度呈球对称分布，并向着球心线性增加，若行星表面的密度为 0，则行星中心的密度是多少？

解： 设行星中心的密度为μ_0，由题意可知，在距离球心为 r 处的密度为$\mu(r)=\mu_0-kr$，且$\mu(R)=0$，解得$k=\frac{\mu_0}{R}$，于是$\mu(r)=\ \mu_0-\frac{\mu_0}{R}r$

又$M=\iiint_{r\leq R}\mu_0\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta=\mu_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2dr=\frac{\mu_0\pi R^2}{3}$，因此得$\mu_0=\frac{3M}{\pi R^3}$

22. 已知面密度为μ_0的均匀薄片所占的闭区域 D 介于$\rho=a\cos\theta,\rho=b\cos\theta$（$0<a<b$）之间，求薄片的质心位置.

解： 如图所示，D 关于 x 轴对称，故质心位于 x 轴上，于是$\bar{y}=0$



$A=\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)$

而$\iint_D xdxdy=\iint_D\rho\cos\theta\rho\,d\rho d\theta=\int_{-\frac{\pi}{z}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho^2d\rho=\frac{\pi}{8}(b^3-a^3)$

故$\bar{x}=\frac{\frac{\pi}{8}(b^3-a^3)}{\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)}=\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}$，所求质心为$\left(\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},0\right)$

第七章 重积分巩固提高练习

1. 计算$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx =$ ________.

2. 已知 $D(x,y) = \{x^2 + y^2 \le \pi\}$，则$\iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2+y^2)\, dxdy =$ ______.

3. 已知 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 围成，求 $\iint_D x dxdy =$ ______.

4. 下列四个等式中不成立的是________.

   A. $\iint_D x\ln(x^2+y^2)\, dxdy = 0$

   B. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy = 4\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy$

   C. $\iint_D |xy|\, dxdy = 4\iint_{D_1} |xy|\, dxdy$

   D. $\iint_D xy\, dxdy = 4\iint_{D_1} xy\, dxdy$

   其中 D：$x^2 + y^2 \le 1$；D_1：$x^2 + y^2 \le 1$，$x \ge 0$，$y \ge 0$

5. 设 $g(x) > 0$ 为已知连续函数，在圆域 $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le a^2\}$上计算二重积分 $I = \iint_D \frac{\lambda g(x)+\mu g(y)}{g(x)+g(y)}$，其中$\lambda,\mu$为正常数.

6. 有界闭区域Ω由平面 $x + y + z + 1 = 0, x + y + z + 2 = 0$ 及三个坐标面围成，设$I_1 = \iiint_\Omega [\ln(x+y+z)]dV$，$I_2 = \iiint_\Omega (x+y+z)^2 dV$，试比较$I_1$和$I_2$.

7. 设$\Omega = \{(x,y)|x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$，则$\iiint_\Omega z^2 dxdydz =$ _______.

8. 计算三重积分 $I = \iiint_\Omega y\cos(x+y)\, dxdydz$，其中$\Omega$为由平面 $y = x, z = 0, y = 0, x + z = \frac{\pi}{2}$所围成.

9. 计算$\iiint_\Omega e^{|x|}\, dV$，其中$\Omega$为$x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

10. 计算$\iiint_\Omega z^2\, dxdydz$，其中区域$\Omega$是由$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \\ x^2 + y^2 + (z-R)^2 \le R^2 \end{cases}$所确定.

11. 计算$\iiint_\Omega \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} dV, \Omega = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0. z \ge 0\}$

12. $\iiint_\Omega x e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}} dV$，$\Omega = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0. z \ge 0\}$

13. 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=a$，函数 $F(t)=\iiint_{\Omega}[z+f(x^2+y^2+z^2)]\,dV$，其中 $\Omega: 0\le z\le \sqrt{t^2-x^2-y^2}$ 及 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^3}$.

14. 求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上点 $M_0(1,-1,3)$ 处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成空间区域的体积.

15. 曲面 $x^2+y^2+z^2=2z, x^2+y^2=z^2$ 所围成合并包含点 $(0,0,1)$ 的立体体积等于__________.

16. 求 $\iint_D\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

17. 设有一半径 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任意一点的密度与该点到 P_0 的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体质心的位置.

18. 设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$（设长度单位为 cm，时间单位为 h），已知体积减小的速率与侧面积成正比且比例系数为 0.9，问高度为 130cm 的雪堆全部融化需要多长时间？

19. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

20. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i^2\sin\frac{j\pi}{2n}$

第七章 重积分巩固提高练习答案

1. $\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}$ （交换积分次序计算）

2. $\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi})$(做极坐标变换)

3. $4-\frac{\pi}{2}$

4. 答案：D（考虑被积函数的奇偶性）

5. $\frac{1}{2}\pi(\lambda+u)a^2$(积分区域关于 $y=x$ 对称)

6. $I_1\le I_2$(两平面之间平行，可以写出被积函数的值域)

7. $\frac{4}{15}\pi$(利用轮换对称性：$\iiint_{\Omega}x^2dxdydz=\iiint_{\Omega}y^2dxdydz=\iiint_{\Omega}z^2dxdydz$)

8. $1+\frac{\pi^2}{48}-\frac{\pi}{2}$

9. 2π(积分区域关于坐标轴均对称，可转化为第一卦限)

10. $\frac{59}{480}\pi R^5$

11. $\frac{\pi}{2}(1-\cos 1)$(在球面坐标下计算)

12. $\frac{\pi a^4}{8}$

13. $\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a$(思路：交换积分次序，转化为关于 t 的变上限积分)

14. $\frac{\pi}{2}$（先求出切平面方程：$z=2x-2y-1$，与 $z=x^2+y^2$联立可求得积分区域 D，最后化为二重积分进行计算）

15. π （利用球面坐标运算）

16. $\frac{16}{9}(3\pi-2)$(利用被积函数的奇偶性和积分区域的对称性)

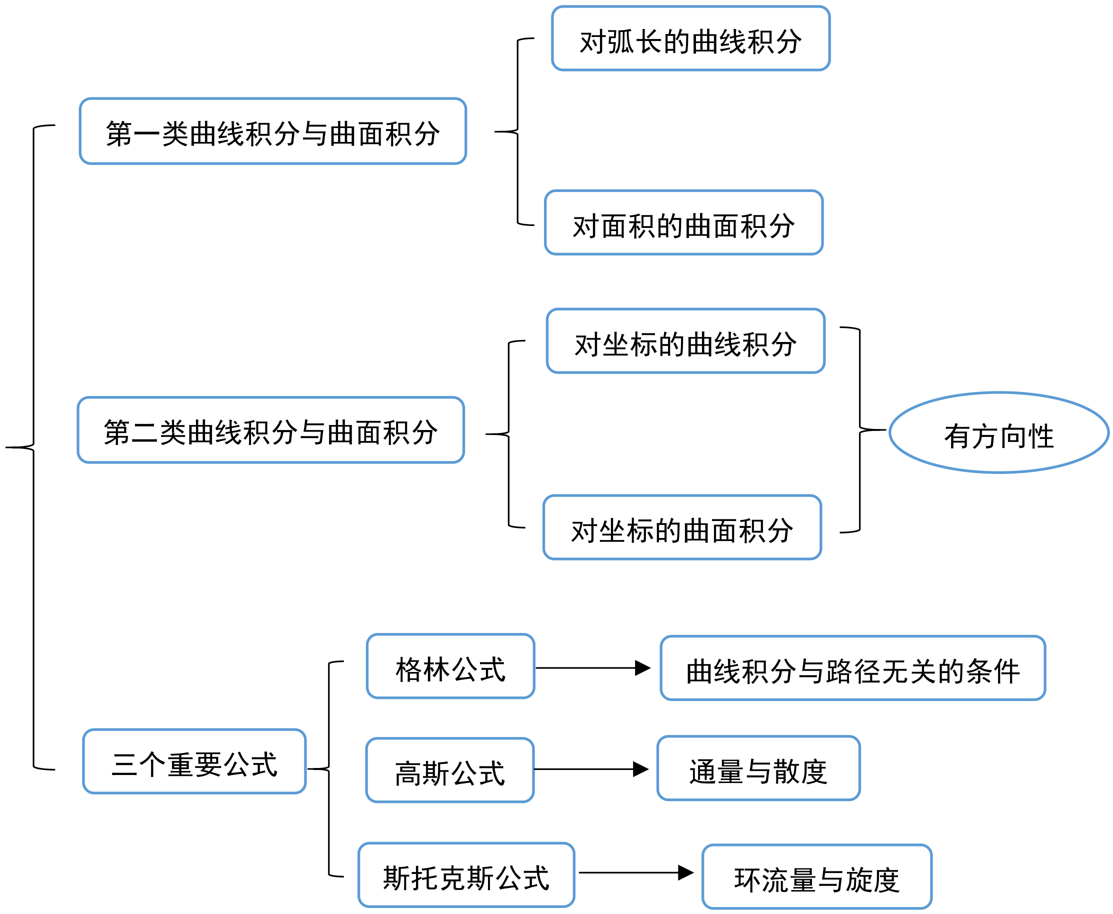
17. $\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$(利用对称性，质心在 x 轴上)

18. 100h（提示：分别用三重积分和二重积分表示体积和侧面积——$\frac{\pi}{4}h^3(t)$、$S=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$，再结合$\frac{dV}{dt}=0.9S$，解出 $h(t)$，令 $h(t)=0$ 即可）

19. $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

20. $\frac{1}{3}$(二重积分定义)

第八章 曲线积分和曲面积分



考点一：第一、二类曲线积分及其联系

\# 第一类曲线积分——对弧长的积分的计算法（以二维为例，三维类比）

设函数 $f(x,y)$在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha < t < \beta)$，若$\varphi(t)$，$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$，则曲线积分$\int_L f(x,y)ds$存在，且有：

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

注意：α的值一定小于β

\# 第二类曲线积分——对坐标的曲线积分的计算法

设 $P(x,y)$与 $Q(x,y)$在有向曲线弧 L 上连续有定义，L 的参数方程为$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，

当 t 单调的由变到时，点 $M(x,y)$从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，若$\varphi(t)$，$\psi(t)$在[α,β]上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$存在，且有：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

注意：这里α与β没有大小关系的要求

两类曲线积分之间的联系

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds$$

上式中$\cos\alpha$、$\cos\beta$为曲线弧上任一点处的切线（方向与 L 一致）的方向余弦

1. 计算 $I=\int_L xds$，其中为 L 为双曲线 $xy=1$ 从点$(\frac{1}{2},2)$至点$(1,1)$的弧段.

解：L 为 $x=\frac{1}{y},1\le y\le 2$，以 y 为积分变量得：

$$\int_L xds=\int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1+(x)'^2}dy=\int_1^2 \frac{\sqrt{1+y^4}}{y^3}dy=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1+y^4}}{y^2}\Big|_1^2-\int_1^2\frac{1}{y^2}\frac{2y^3}{\sqrt{1+y^4}}dy\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{17}}{8}+\frac{1}{2}ln\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}$$

点评：本题对 y 积分显然方便，如果对 x 积分，则需要再做一次倒代换，转换成本题对 y 积分的形式，读者可以自己试一试。本题在使用分部积分后用到的积分公式为$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C$

2. 计算$\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz$，其中Γ是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的一段直线.

解：Γ的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=1+3t\end{cases}$ t：$0\to 1$，于是

$$\int_\Gamma xdx+ydy+(x+y-1)dz$$

$$=\int_0^1[(1+t)+2(1+2t)+3(1+t+1+2t-1)]dt=\int_0^1(6+14t)dt=13$$

考点二：第一、二类曲面积分及其联系

\# 第一类曲面积分——对面积的曲面积分的计算法

设函数 $z=z(x,y)$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

（x= $x(y,z),y=y(z,x)$的情况与上面类似）

\# 有向曲面在某平面上的投影，其符号由曲面的方向向量与垂直该投影面的坐标轴正向的夹角的余弦值决定．例如投影到 xOy 平面上：

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\sigma)_{xy}, & \cos\gamma>0\\ -(\sigma)_{xy}, & \cos\gamma<0\\ 0, & \cos\gamma\equiv 0\end{cases}$$

\# 第二类曲面积分——对坐标的曲面积分的计算法

设光滑曲面Σ是 $z=z(x,y)$所确定曲面的上侧，曲面Σ在的投影区域为D_{xy}，函数 $z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，γ是曲面的法向量与 z 轴的夹角，此时，$\cos\gamma>0$，又设被积函数 $R(x,y,z)$在Σ上连续，则有：

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dx\,dy$$

若Σ取下侧，则上式右侧应该加上负号，类似的还有：

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dy\,dz$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dz\,dx$$

\# 两类曲面积分之间的联系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)dS$$

上式中 $cos\alpha$、$cos\beta$、$cos\gamma$为曲面上任一点的法向量的方向余弦

3. 设Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，Σ_1为Σ在第一卦限中的部分，则有________.

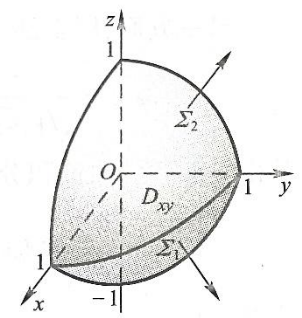
A.$\iint_{\Sigma} xdS=4\iint_{\Sigma_1} xdS$ B.$\iint_{\Sigma} ydS=4\iint_{\Sigma_1} xdS$

C. $\iint_{\Sigma} zdS = 4\iint_{\Sigma_1} xdS$　　　　D. $\iint_{\Sigma} xyzdS = 4\iint_{\Sigma_1} xyzdS$

解： C 本题考查对面积的曲面积分的对称性. Σ：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{z}dxdy$.首先明确$\iint_{\Sigma_1} xdS \neq 0$，而$\iint_{\Sigma} xdS = a^2\iint_{D_{xy}} \frac{x}{z}dxdy$，由对称性知$\iint_{\Sigma} xdS=0$，同理可得$\iint_{\Sigma} ydS=0$，排除 A、B

两项. D 项，$\iint_{\Sigma} xyzdS=\iint_{D_{xy}} xydxdy$，由对称性可知$\iint_{\Sigma} xyzdS=0$.故正确答案为 C.

4. 计算曲面积分$\iint_{\Sigma} xyzdxdy$，其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在 $x\geq 0,y\geq 0$ 的部分.



解： 如图所示：在坐标轴上的侧面在 xOy 平面上 的投影均为零，故曲面主要分为$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，从而原积分可化为$\iint_{\Sigma} xyzdxdy=\iint_{\Sigma_1} xyzdxdy+\iint_{\Sigma_2} xyzdxdy=$

$$\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

在极坐标系下计算该二重积分，有：

$2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\, d\theta\int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho=\frac{2}{15}$，即$\iint_{\Sigma} xyzdxdy=\frac{2}{15}$.

5. 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

其中 $f(x,y,z)$为连续函数，Σ为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧

解： 易求平面的方向余弦$(cos\alpha,cos\beta,cos\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$，于是

$$I=\iint_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]cos\alpha+[2f(x,y,z)+y]cos\beta+[f(x,y,z)+z]cos\gamma\}dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}[(x,y,z)+x-2f(x,y,z)-y+f(x,y,z)+z]\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x - y + z)\, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = \frac{1}{2}$$

点评：考查两类曲面积分的转化

考点三：格林公式及其应用

\# 平面区域的边界曲线 L 的正向：

当观察者沿 L 的某一方向前进时，区域 D 的部分总是在他的左侧，那么观察者所走的方向就是边界曲线 L 的正向（分为两种：逆时针与顺时针）

\# 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，若函数 $P(x,y),Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数，则有$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = \oint_L Pdx + Qdy$，其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

\# 格林公式的应用 ★

设区域 D 是一个单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数，则有以下四个条件等价（已知其中一个，可推出另外三个）：

① 沿 D 中任意的闭曲线，恒有$\oint_L Pdx + Qdy = 0$；

② 对 D 中任意分段光滑曲线，曲线积分$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$的结果与积分路径无关，只与起止点有关；

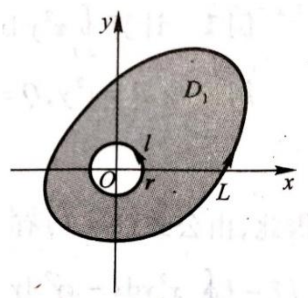
③ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在 D 内是某一函数 $u(x,y)$的全微分；

④ 在 D 内的每一点，都有$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

6. 计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的光滑闭曲线，L 的方向为逆时针方向.

解： 令 $P =- \frac{y}{x^2+y^2}$，$Q = \frac{x}{x^2+y^2}$，当$x^2 + y^2 \neq 0$ 时，有$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，记 L 所围成的闭区域为 D，当$(0,0) \notin D$ 时，由格林公式，有$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$.

当$(0,0) \in D$ 时，选取适当小的 $r > 0$，作位于 D 内的圆周 l：$x^2 + y^2 = r^2$,记 L 和 l 围成的复连通区域为D_1，



由格林公式得：$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$，其中 l 的方向取逆时针方向，于是

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2} d\theta = 2\pi$$

7. 求解方程$(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy=0$.

解： 设 $P=5x^4+3xy^2-y^3$；$Q=3x^2y-3xy^2+y^2$

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2$，因此所给方程为某一函数的全微分方程

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy$

$$=\int_0^x 5x^4+\int_0^y (3x^2y-3xy^2+y^2)dy$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$

故方程的通解为$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$

[此题的另一种解法如下：

方程的通解为 $u(x,y)=C$，其中 $u(x,y)$满足$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4+3xy^2-y^3$,

从而 $u(x,y)=\int(5x^4+3xy^2-y^3)dx=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\varphi(y)$，这里$\varphi(y)$是以 y 为自变量的待定函数，由此得$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+\varphi'(y)$.又 $u(x,y)$必须满足$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+y^2$，从而可得$\varphi'(y)=y^2$，即$\varphi(y)=\frac{1}{3}y^3+C$，故原方程的通解为 $x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$

考点四：高斯公式及其应用

\# 高斯公式

设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成，若函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=$ $\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\,[\oiint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS]$，其中Σ是Ω整个

边界曲面的外侧，$cos\alpha$、$cos\beta$、$cos\gamma$是Σ在点(x,y,z)处的法向量的方向余弦.

通量与散度

设向量场$\vec{\boldsymbol{A}}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}} + Q(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}} + R(x,y,z)\vec{k}$，其中 P、Q、R 具有连续的一阶偏导数，Σ是场内的一个有向曲面，则称

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

为向量场$\vec{A}$通过曲面Σ的通量（流量）. 称$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$为向量场$\vec{A}$的散度，记为$div\vec{\boldsymbol{A}}$，从而高斯公式又可以写成

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \iiint_{\Omega} div\,\vec{\boldsymbol{A}}\,dv$$

Σ是空间闭区域Ω整个边界曲面的外侧.

考点五：斯托克斯公式及其应用

斯托克斯公式

设Γ为分段光滑曲的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，Γ的正向与Σ的测符合右手规则，若函数在函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在曲面Σ（连同边界Γ）上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz$$

上述公式也可以记成：

$$\iint_{\Sigma}\left|\begin{matrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix}\right| = \iint_{\Sigma}\left|\begin{matrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix}\right| dS = \oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz$$

环流量与旋度

设向量场$\vec{\boldsymbol{A}}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\boldsymbol{i}} + Q(x,y,z)\vec{\boldsymbol{j}} + R(x,y,z)\vec{k}$，其中 P、Q、R 具有连续的一阶偏导数，Γ是场内的一个有向闭曲线，则称

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{\tau} ds = \oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz$$

为向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线Γ的环流量（上式中$\vec{\tau}$为Γ在任一点的单位切向量），称

$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$为向量$\vec{A}$的旋度，记为$rot\,\vec{\boldsymbol{A}}$，从而斯托克斯公式又可以写成

$$\iint_{\Sigma} rot\,\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}dS=\oint_{L}\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{\tau}}ds$$

第八章 曲线积分与曲面积分巩固提高练习

1. 设Σ是平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面$x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，则曲面积分 $\iint_{\Sigma} ydS=$ ________.

2. 设 L 为正向圆周$x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分$\int_L xdy-2ydx=$ ________.

3. 计算$\int_L (x^2+y^2)ds$,其中 L 为曲线$x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)$.

4. 计算 $I=\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为由圆周$x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限所围成的图形的边界.

5. 计算曲线积分 $I=\int_L (y+2xy)dx+(x^2+2x+y^2)dy$，其中 L 是由点 A(4,0) 到点 O(0,0)的上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$.

6. 计算$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周$x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）

7. 计算 $I=(-2xy-y^2)dx-(2xy+x^2-x)dy$，其中 L 是以(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)为顶点的正方形的正向边界曲线.

8. 设 $I=\int_L \left(e^{x^2}-y^3\right)dx-(x+\cos y)dy$，其中是 $y=k\cos x\,(k>0)$ 上自$(-\frac{\pi}{2},0)$至$(\frac{\pi}{2},0)$的一段弧，试问常数 k 取何值时，I 取极值，是极大值还是极小值？

9. 设曲线积分$\int_L [\sin x-f(x)]\frac{y}{x}+f(x)dy$与积分路径无关，且 $f(\pi)=1$，求 $f(x)$. 并计算 L 始点为(1,0)、终点为(π,π)时的曲线积分.

10. 计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(2xy-zx^2+x+z)dS$，其中$\Sigma$为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分.

11. 计算曲面积分$\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$,其中$\Sigma$是由曲面$x^2+y^2=R^2$及平面 $z=R,z=-R(R>0)$所围成立体表面的外侧.

12. 计算曲面积分$\oiint_{\Sigma} xzdxdy+xydydz+yzdzdx$，其中$\Sigma$是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间闭区域的整个边界曲面的外侧.

13. 利用高斯公式计算下列曲面积分.

（1） $\oiint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中Σ为平面 $x=0,y=0,z=0,x=a,y=a,z=a$ 所围成的立体表面的外侧.

（2） $\oiint_{\Sigma} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，其中Σ为上半球体 $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2},x^2+y^2\le a^2$的表面的外侧.

14. 求下列向量场$\vec{\boldsymbol{A}}$穿过曲面流向指定侧的通量或向量场$\vec{\boldsymbol{A}}$的散度.

（1） $\vec{\boldsymbol{A}}=yz\vec{\boldsymbol{i}}+xz\vec{\boldsymbol{j}}+xy\vec{\boldsymbol{k}}$，Σ为圆柱$x^2+y^2\le a^2(0\le z\le h)$的全表面，流向外侧；

（2） $\vec{\boldsymbol{A}}=(2x-z)\vec{\boldsymbol{i}}+x^2y\vec{\boldsymbol{j}}-xz^2\vec{\boldsymbol{k}}$，Σ为立方体 $0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a,$ 的全表面，流向外侧；

（3） $\vec{\boldsymbol{A}}=(2x+3z)\vec{\boldsymbol{i}}-(xz+y)\vec{\boldsymbol{j}}+(y^2+2z)\vec{\boldsymbol{k}}$，Σ是以点$(3,-1,2)$为球心，半径 $R=3$ 的球面，流向外侧；

（4） $\vec{\boldsymbol{A}}=e^{xy}\vec{\boldsymbol{i}}+\cos(xy)\vec{\boldsymbol{j}}+\cos(xz^2)\vec{\boldsymbol{k}}$

15. 利用斯托克克斯公式计算下列积分.

（1） $\oint_{\Gamma} 3ydx-xzdy+yz^2dZ$ 其中为圆周$x^2+y^2=2z,z=2$，若从 z 轴正向看去，这圆周取逆时针方向；

（2） $\vec{\boldsymbol{A}}=(y-z)\vec{\boldsymbol{i}}+yz\vec{\boldsymbol{j}}-xz\vec{\boldsymbol{k}}$， Σ为立方体$\{(x,y,z)|0\le x\le 2,0\le y\le 2,0\le z\le 2\}$的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面，$\vec{\mathbf{n}}$是Σ的单位法向量，求 $\iint_{\Sigma} rot\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}dS$

16. 求下列向量场$\vec{\boldsymbol{A}}$的旋度或沿某闭曲线的环流量.

（1） $\vec{\boldsymbol{A}}=(2z-3y)\vec{\boldsymbol{i}}+(3x-z)\vec{\boldsymbol{j}}+(y-2x)\vec{\boldsymbol{k}}$；

（2） $\vec{\boldsymbol{A}}=(x^2\sin y)\vec{\boldsymbol{i}}+y^2\sin(xz)\vec{\boldsymbol{j}}+xy\sin(\cos z)\vec{\boldsymbol{k}}$

（3） $\vec{\boldsymbol{A}}=(x-z)\vec{\boldsymbol{i}}+(x^3+yz)\vec{\boldsymbol{j}}-3xy^2\vec{\boldsymbol{k}}$，其中Γ为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2},z=0$，从 z 轴正向看Γ为逆时针方向.

第八章 曲线积分与曲面积分巩固提高练习答案

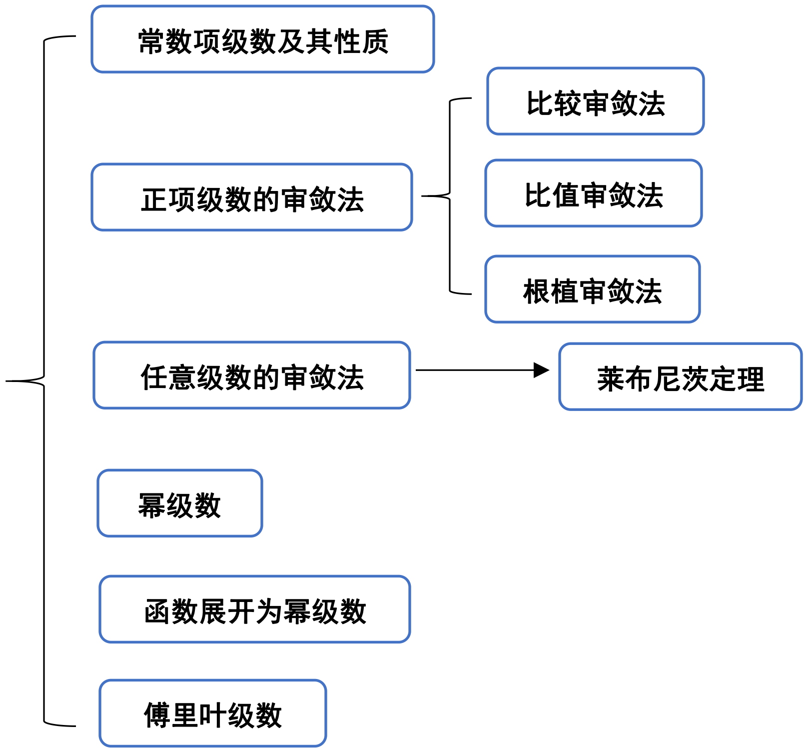
1. 0
2. $\frac{3\pi}{2}$
3. $\pi^2a^3(1+2\pi^2)$
4. $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$(注意分段)
5. 2π
6. -2π
7. 1
8. 当 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，I 取得极大值
9. π
10. $-\frac{27}{4}$
11. $\frac{\pi^2R}{2}$（计算时需要投影到两个平面——yOz、xOy 上分别计算再求和）
12. $\frac{1}{8}$（观察积分表达式，结合图形，用到对称性计算）
13. (1)$3a^4$；(2)$\frac{2}{5}\pi a^5$
14. (1)0；(2)$a^3\left(2-\frac{a^2}{6}\right)$；(3)$108\pi$；(4) $div\vec{\boldsymbol{A}}=ye^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2)$
15. (1)-20π；(2)-4
16. (1) $rot\vec{\boldsymbol{A}}=2\vec{\boldsymbol{i}}+4\vec{\boldsymbol{j}}+6\vec{\boldsymbol{k}}$；

    (2) $rot\vec{\boldsymbol{A}}=[x\sin(\cos z)-xy^2\cos(xz)]\vec{\boldsymbol{i}}-y\sin(\cos z)\vec{\boldsymbol{j}}+[y^2z\cos(xz)-$

    $x^2\cos y]\vec{\boldsymbol{k}}$；

    (3) $\oint_L\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{\tau}}ds=12\pi$

第九章 无穷级数



重要考点题型通关

考点一：常数项级数的定义及性质

\# 常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的前 n 项和记为s_n，若部分和的极限存在（$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$），那么称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是收敛的，否则，称其发散

\# $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n\,(k\neq 0)$具有相同的敛散性；

\# 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均收敛，有$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛；

\# 收敛级数中添加括号后所成新级数仍收敛（反之不成立）

\# 级数收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

1．利用定义验证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$级数是否收敛.

解： 因为$u_n=\frac{1}{2}\frac{(n+2)-2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，所以

$$s_n=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}\right)+\left(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}\right)+\dots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，即$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{4}$，故原级数收敛.

2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和序列为$s_n=\frac{2n}{n+1}$，则$u_n=$________.

解： $u_n=s_n-s_{n-1}=\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{n}=\frac{2}{n(n+1)}$

3. 设有以下命题：

①若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n}+u_{2n-1})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

②若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛；

③若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

以上命题正确的有__________.

解： ③ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n}+u_{2n-1})$为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$加括号后得到的级数，由加括号的级数收敛，不能得到原级数收敛，故①错误；取$u_n=-v_n=\frac{1}{n}$，可知②也错误；对于③，由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$可知，随着项数的增加，级数的一般项总比它的前一项大，所以一般项极限不会趋于零，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

考点二：正项级数的审敛法

\# 正项级数收敛的充要条件：其部分和数列$\{S_n\}$有界

\# 比较审敛法及其极限形式

- 已知 $0\le u_n\le v_n$

  若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散

- 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，当$0<l<+\infty$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$具有相同的敛散性；

  若$l=0$，则只能得出“$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛”的结论；

  若$l=+\infty$，则只能得出“$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散”的结论.

- v_n常取调和级数($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$)和 P 级数($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$)

\# 比值审敛法

$$
\text{若} \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho>1,\ \text{则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散}\\ \rho<1,\ \text{则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\\ \rho=1,\ \text{则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{敛散性不确定}\end{cases}
$$

根值审敛法

$$
\text{若} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}\rho>1,\ \text{则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散}\\ \rho<1,\ \text{则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\\ \rho=1,\ \text{则}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\text{敛散性不确定}\end{cases}
$$

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{u_n}$判断审敛性的一般步骤

① 看一般项是否趋于零，若不趋于零，则级数发散；

② 当一般项趋于零时，采用比值法或根值法判定；

③ 若上述两种方法无效，则采用比较审敛法；

④ 若上述方法都行不通，则考虑部分和数列是否有极限（回到定义）.

4. 用比较审敛法判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{1+n^3}$以及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$的敛散性.

解：（1）因为$\frac{1+n^2}{1+n^3}\geq\frac{1+n^2}{n+n^3}=\frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{1+n^3}$发散.

（2）当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq0$，故原级数发散；

当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}\neq0$，故原级数发散；

当 $a>1$ 时，$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$收敛，故原级数收敛.

5. 已知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho$，当$\rho$为何值时，不能判断两个正项级数具有相同的敛散性？______.

A. $\rho=0$　　B. $\rho=1$　　C. $\rho=2$　　D. $\rho=\frac{1}{2}$

解： A 解析过程参看本考点的知识点

6. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，下列说法正确的是______.

A. 若$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

B. 若存在非零常数λ，使得$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\lambda$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散

C. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} n^2a_n=0$

D. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则存在非零常数λ，使得$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\lambda$

解： B 本题在较好的掌握了比较审敛法的极限形式后即可做出判断，或者举例排除.

考点三：任意项级数的审敛法

\# 莱布尼茨判别法——交错级数审敛性的判定

对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，若满足条件$u_n\ge u_{n+1}$；$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，那么该级数收敛，且其和 $s\le u_1$.

\# 一般级数——绝对收敛与条件收敛

绝对收敛：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛，并称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛，例如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$；

条件收敛：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，但是$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，那么称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为条件收敛，例如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

\# 可能用到的转化：$|\sin x|\le 1,\sin(n\pi+x)=(-1)^n\sin x$

7. 设常数λ > 0，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$________.

A.发散　　B.条件收敛　　C.绝对收敛　　D.收敛性与λ有关

解： $\left|(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|=\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\le\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lambda}$均收敛，由比较审敛法知原级数绝对收敛，选 C.

8. 设 $0\le a_n<\frac{1}{n}(n=1,2,3\ldots)$，则下列级数肯定收敛的是_______.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n^2$

解： 取$a_n=\frac{1}{4n}$，则可以把 A、C 均排掉；B 选项，取$a_n=\frac{1}{2n}|\sin\frac{n\pi}{2}|$，此时$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|=\frac{1}{2}\left[-1+0-\frac{1}{3}+0-\frac{1}{5}+\ldots\right]$，从而可得该级数前 $2n-1$ 项的部分和为$S_{2n-1}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}\ne 0$，故级数发散；D 选项由正项级数的比较审敛

法可以得出.

9. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$的敛散性.

解：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$，易知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$绝对收敛，从而它们的和为条件收敛.

点评：条件收敛±绝对收敛=条件收敛；绝对收敛±绝对收敛=绝对收敛；而条件收敛±条件收敛的敛散性不确定.

10. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+a}{n}$收敛，则 a 的取值范围为______.

解：因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+a}{n}$均收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+a}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}$也收敛，由此知 $a=0$.

考点四：幂级数及函数展开成幂级数

阿贝尔定理：

若x_0是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛点，则对于一切满足$|x|<|x_0|$的点，幂级数都绝对收敛；

若x_0是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的发散点，则对一切满足$|x|>|x_0|$的点，幂级数都发散.

幂级数的收敛半径求法

设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则幂级数的收敛半径为：

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$$

简记为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

幂级数的性质：

- 幂级数的和函数在收敛域内是连续的；
- 幂级数可以进行求导和微分运算

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$\int_0^x S(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x a_nx^ndx=\sum_{1=1}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$$

- 已知两个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$、$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，它们的和函数分别为 $f(x)$,$h(x)$，收敛半径分别为 R_1,R_2，那么 $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\pm\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n\pm b_nx^n)=f(x)\pm h(x)$；$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0)x^n=f(x)\cdot h(x)$. 上述运算得到的新级数的收敛域为$\min\{R_1,R_2\}$（除法是个例外）

Taylor 级数与麦克劳林级数

函数展开为幂级数的方法

① 直接展开法

求出 $f(x)$在 $x=0$ 处各阶导数值$f^{(n)}(0)$,n $=0,1,2,\dots$;

写出幂级数 $f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$，并求出收敛半径 R;

在收敛区间内考察 Taylor 级数的余项$R_n(x)$的极限，如果$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)$为零，则上一步所写的幂级数就是函数的幂级数展开式.

② 间接展开法：利用已知函数的幂级数展开式，通过适当的变换(四则运算、逐项求导与微分等)，来求出所给函数的幂级数展开式.

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$	$R\in(-1,1)$
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$R\in(-\infty,+\infty)$
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$R\in(-\infty,+\infty)$
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$R\in(-\infty,+\infty)$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$	$R(-1,1]$
$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}+\cdots$	$R\in(-1,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\ R\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x,\qquad R[-1,1]$$

11. （1）若$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处______.

A.条件收敛　　B.绝对收敛　　C.发散　　D.敛散性不确定

（2）若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在 $x=3$ 处发散，则级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\frac{1}{2})^n$在 $x=-3$ 处______.

A.条件收敛　　B.绝对收敛　　C.发散　　D.敛散性不确定

解： 本题考查阿贝尔定理.

(1) B (将 $x-1$ 看成一个整体，$|2-1|<|-1-1|$)

(2) C ($\left|-3-\frac{1}{2}\right|>|3|$)

12. (1)幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$的收敛半径为______.

(2)设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为______.

解： (1)该幂级数由于缺少偶次幂项，因此不能直接通过求系数比的极限求收敛半径，而应通过比值审敛法来求．$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{2n+1}}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}\cdot\frac{2^n+(-3)^n}{x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n-3}\cdot x^2\right|=\frac{x^2}{3}$，当$\rho<1$ 时，级数收敛，即$\frac{x^2}{3}<1$ 时级数收敛，从而 $R=\sqrt{3}$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$

$$=(x-1)^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n\right]$$

由幂级数的性质知，$\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$与$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$具有相同的收敛半径，由$|x-1|<3$，解得$-2<x<4$，故填$(-2,4)$.

点评：注意区分收敛域和收敛区．收敛区间是开区间，而收敛域是在收敛区间的基础上，进一步考虑端点处的收敛情况.

13. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

解： 因 $f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{x^4}{1-x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}, x\in(-1,1)$，且 $f(0)=0$，所以

$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x\\ 1, x=0\end{cases}$,

试将 $f(x)$展开成 x 的幂级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和.

解： 因为$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}$，所以 $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{2n+1}$① $+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+2}}{2n+1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}$

$x\in[-1,1]$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

注释：①处式子推导过程：$\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{x}\cdot(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1})$

$=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\dots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{2n+1}$

15. 展开$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$为 x 的幂级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$的和.

解： 因为$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，所以$\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$，从而

$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)x^{n-2}}{n!}$，由$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$的展开式知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\right]|_{x=1}=$

$\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}|_{x=1}=1$

考点五：傅里叶（Fourier）级数

\# 傅里叶级数的形式：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

各项系数的求法：$\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1,2,3,\dots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \end{cases}$

\# 狄利克雷(Dirichlet)定理

设函数 $f(x)$是以 2π为周期的周期函数，如果在一个周期内满足：

（1）连续或有有限个第一类间断点；

（2）至多只有有限个极值点.（不能无限振荡）

那么 $f(x)$的傅里叶级数收敛，并且有以下结论：

① 若 x 是连续点，则级数收敛于 $f(x)$；

② 若 x 是间断点，则级数收敛于$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$；

③ 在 $x=\pm\pi$处，级数收敛于$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$

\# 正弦级数与余弦级数（傅里叶级数的特殊情况）

① 当 $f(x)$为奇函数时，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0(n=0,1,2,\dots)$，此时傅里叶级数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，称之为正弦级数；

② 当 $f(x)$为偶函数时，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0(n=1,2,3,\dots)$，此时傅里叶级数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，称之为余弦级数.

③ 利用奇延拓或偶延拓展开成正弦级数或余弦级数.

16. 设函数 $f(x)$是以 2π为周期的周期函数，且其傅里叶系数为a_n,b_n，试求 $f(x+h)$(h 为实数)的傅里叶系数：$a_n^{'}=$ ________,$b_n^{'}=$ ________.

解： $a_n^{'}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos[n(x+h)-nh]\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nh\cos n(x+h)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\sin nh\sin n(x+h)\,dx$

$=a_n\cos nh+b_n\sin nh.$

同理可得，$b_n^{'}=b_n\cos nh-a_n\sin nh$

17. 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\le 0\\ 1+x, & 0<x\le\pi\end{cases}$的傅里叶级数为$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其和函数为 $f(x)$，则 $f(1)=$ ______,$f(0)=$ ______,$f(\pi)=$ ______.

解： 本题直接考狄利克雷定理，根据定理，$f(1)=1+1=2$，$f(0)=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}$

$=\frac{1}{2}$，$f(\pi)=\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{1}{2}$

18. 把函数 $f(x)=\frac{\pi}{4}$在[0,π]上展开成正弦级数，并由它推导出：

(1)$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$;

(2)$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\ldots=\frac{\pi}{3}$.

解： $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2n}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\frac{1}{2k-1}, n=2k-1\\ 0, n=2k\end{cases}\ (k=1,2,\ldots)$

又 $f(x)=\frac{\pi}{4}$在[0,π]上为连续函数，故$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x$

(1) 取 $x=\frac{\pi}{2}$，得$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ (①)

(2) 在(1)中的等式两边各乘以$\frac{\pi}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\ldots$ (②)

①+②得，$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\ldots$

第九章 无穷级数巩固提高练习题

1. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$的和__________.

2. 下列各项叙述正确的是________.

   A. 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛

   B. 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛

   C. 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$u_n\geq\frac{1}{n}$

   D. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$u_n\geq v_n$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也收敛

3. 设$a_n>0,n=1,2,\ldots$, 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛, 则下列结论正确的是________.

   A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$发散　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$发散

   C. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$收敛

4. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛域，并求其和函数.

5. 求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$的和函数，并求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和 S.

6. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数 $S(x)$.

7. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$的收敛域及其和函数 $S(x)$.

8. 设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\,dx,n=0,1,2,\ldots$,求$\sum_{n=0}^{\infty}I_n$.

9. 将函数 $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$展开为 $x-5$ 的幂级数.

10. 将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leq 0\\ x, & 0<x\leq\pi\end{cases}$展开成傅里叶级数.

11. 将 $f(x)=x^2$在$(0,\pi)$上展开为余弦级数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

第九章 无穷级数巩固提高练习答案

1. $\frac{3}{2}$（注意奇数项与偶数项的情况不同，需分别求出他们的和的极限）

2. A（用到不等式$|u_n|^2+|v_n|^2\geq 2|u_n\cdot v_n|$）

3. D （利用级数定义——部分和数列来求解）

4. 收敛域为$[-1,1]$，

和函数 $S(x)=\begin{cases}1+\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x), & -1\leq x<0,0<x<1\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$

5. 和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x), & |x|<1 \text{ 且 } x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$（对所给级数因式分解）

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}ln\,2$

6. 和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & |x|\in(0,1)\\ 0, & x=0\end{cases}$

7. $S(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),x\in[-1,1]$(注意本题中缺少偶次幂项)

8. $\ln(2+\sqrt{2})$(提示：写出$\sum_{n=0}^{\infty}I_n$的表达式为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$，从而转化为求出级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(x)^{n+1}$的和函数，再代入 x 的值即可)

9. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n+1}-2^{n+2}}{6^{n+1}}(x-5)^n,3<x<7$

10. $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$，在 $x=\pm\pi$处，$f(x)$收敛于$\frac{\pi}{2}$.

11. $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}cos\,nx,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$(提示：展开成傅里叶级数后，考虑当 x = 0，x = π时的级数形式)

第十章 微分方程

- 微分方程的基本概念
- 可分离变量的微分方程 → 形如 $g(y)dy = f(x)dx$
- 齐次方程 → 形如$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$
- 一阶线性方程与伯努利方程 → 形如$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$
- 可降解的高阶微分方程
  - $y^{(n)}(x) = f(x)$型
  - $y'' = f(x,y')$型
  - $y'' = f(y,y')$型
- 高阶线性微分方程
  - (二阶)一般形式：$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$
  - 二阶线性齐次微分方程解的结构
  - 二阶线性非齐次微分方程解的结构
- 常系数线性微分方程
  - 常系数齐次微分方程 → 特征方程求解
  - 常系数非齐次微分方程 → 待定系数求解

重要考点题型通关

考点一：可分离变量的微分方程

\# 一阶微分方程写成一端只含 y 的函数和 dy，另一端只含 x 的函数和 dx，即形如 $g(y)dy = f(x)dx$，那么对方程的两边积分即可.

1．若连续函数 $f(x)$满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$，则 $f(x) =$__________.

解：求导得$f'(x)=2f(x)$，从而 $f(x)=Ce^{2x}$，又由初始条件 $f(0)=\ln 2$，得 $C=\ln 2$，于是 $f(x)=e^{2x}\ln 2$

点评：对于由变上限积分推出的微分方程，注意其中隐含的初始条件。

2. 已知函数 $y=y(x)$在任一点 x 处的增量为$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当$\Delta x\to 0$ 时，α 是Δx 的高阶无穷小，且 $y(0)=\pi$，则 $y(1)=$________________.

解：由$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}$得$f'(x)=\frac{y}{1+x^2}$，分离变量得$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2}$，积分并整理得：$y=Ce^{\arctan x}$，代入初始条件，的 C=π，$y=\pi e^{\arctan x}$，于是 $y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

3. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$为 L 上任意一点，$M_0(2,0)$为 L 上一定点，若极径 OM,OM_0与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上的两点间弧长值的一半，求曲线 L 的方程.

解：由已知条件得：$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$，两边对θ求导得：

$r^2=\sqrt{r^2+r'^2}$，即 $r=\pm r\sqrt{r^2-1}$，从而$\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}=\pm d\theta$，解此微分方程，得：

$-\arcsin\frac{1}{r}+C=\pm\theta$，又由 $r(0)=2$，得 C=$\frac{\pi}{6}$，于是 $r\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm\theta\right)=1$，此即直线

$x\mp\sqrt{3}y=2$

点评：本题考查了积分形式的扇形面积公式（$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2 d\theta$）和极坐标系下的弧长公式（$\int_0^\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$）.

考点二：齐次微分方程

\# 形如$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$的一阶微分方程称为齐次方程. 对于一些一阶微分方程，可化成齐次形式，再令$\frac{y}{x}=u$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，转化为关于 u,x 的可分离变量的一阶微分方程.

4. 求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$的通解.

解： 令$\frac{y}{x}=u$，则$\frac{dy}{dx}==u+x\frac{du}{dx}$，当$x>0$时，原方程可化为$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$，积分得$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=-\ln x+\ln C$，代回原变量，得通解为$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$，当$x<0$时，原方程的通解与$x>0$的相同.

点评：本题涉及$\sqrt{x^2+y^2}$，需对 x 的正负号进行分别讨论，同时本题还考查了积分$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

5. 求微分方程$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$满足$y|_{x=1}=1$的特解.

解： 原方程可化为$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)-1}$，再令$\frac{y}{x}=u$，方程又可以化为$\frac{dx}{x}=-\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}du$，亦即$\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)du$，积分得$\ln|x|+\ln|C|=\ln\left|\frac{u+1}{u^2+1}\right|$，即$cx(u^2+1)=u+1$将原变量代入，得通解为$x+y=C(x^2+y^2)$，代入初始条件，得$C=1$，故特解为$x+y=(x^2+y^2)$.

点评：$\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}$看似复杂，但$u^3+u^2+u+1$可以写成$u+1$、$u^2+1$，因此可采用因式分解来简化.

6. 设有连结点 O（0,0）和 A（1,1）的一段凸的曲线弧$\widehat{AB}$，对$\widehat{AB}$于上任意一点 P（x,y），曲线弧$\widehat{OP}$与直线段$\overline{OP}$所围图形的面积为x^2，求曲线弧$\widehat{AB}$的方程.

解： 设其方程为$y=f(x)$，由题意得$\int_0^x f(x)dx-\frac{1}{2}xf(x)=x^2$，两边对 x 求导，有$y'=\frac{y}{x}-4$，令$\frac{y}{x}=u$，方程化为$du=-4\frac{dx}{x}$，积分得$u=-4\ln x+C$，即$y=-4x\ln x+Cx$，又$y|_{x=1}=1$，解得 C=1，从而曲线方程为$y=-4x\ln x+x$.

考点三：一阶线性微分方程、伯努利方程

\# 一阶线性微分方程的形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，当$Q(x)=0$时，方程为齐次的，否则为非齐次的，一阶线性微分方程的通解公式为：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

（ 常数变易法推导)

伯努利方程一般形式：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$（$n\neq 1,2$），两边同时除以$y^n$，令 $z=y^{1-n}$，那么原方程可化为$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)Q(x)$，即转化为一阶线性微分方程来求解.

7. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+yZ}\right)dxdy$，求 $f(t)$.

解：由题可知：$f(0)=1$，而$\iint_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+yZ}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t} rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr$，

从而 $f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr$，对 t 求导得，$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)$.

由一阶线性微分方程解的公式，得 $f(t)=e^{\int 8\pi tdt}(\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{\int 8\pi tdt}dt+C)$

即 $f(t)=(4\pi t^2+C)e^{4\pi t^2}$，又 $f(0)=1$，解出 C=1，因此 $f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$

8. 求微分方程$(x-2xy-y^2)\frac{dy}{dx}+y^2=0$ 的通解.

解：把 x 看成因变量，y 看成自变量，原方程可化为$\frac{dx}{dy}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)x=1$，运用公式，得通解 $x=e^{-\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)dy}\left[\int e^{\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)dy}dy+C\right]=y^2+Cy^2e^{\frac{1}{y}}$.

9. 微分方程 $xy'+y=xe^x$满足 $y(1)=1$ 的特解是_______.

解：（法一）直接代公式

（法二）因为 $xy'+y=(xy)'$，所以有 $xy=\int xe^x dx=(x-1)e^x+C$,由 $y(1)=1$，得 C=1，故特解为 $y=\frac{(x-1)e^x+1}{x}$

10. 求微分方程 $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4$满足初始条件$y|_{x=0}=\frac{1}{2}$的特解.

解：方程两边同时除以 $3(1+x^2)y^4$，得$y^{-4}y'+\frac{2x}{3(1+x^2)}y^{-3}=\frac{2x}{3(1+x^2)}$，令 $z=y^{-3}$

则$\frac{dz}{dx}=-3y^{-4}\frac{dy}{dx}$，代入上面的方程，得$\frac{dz}{dx}-\frac{2x}{1+x^2}z=-\frac{2x}{1+x^2}$，利用公式，得通解为 $z=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int(-\frac{2x}{1+x^2})e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx\right]=1+C(1+x^2)=y^{-3}$,又 $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$

解得 C=7，故特解为$y^3=(7x^2+8)^{-1}$

11. 设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x)$和 $g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足以下条件：

$f'(x)=g(x), g'(x)=f(x), f(0)=0, f(x)+g(x)=2e^x$.

(1) 求 $F(x)$所满足的一阶微分方程；

(2) 求出 $F(x)$的表达式.

解：（1）对 $F(x)$求导，有$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)=[g(x)+f(x)]^2-2f(x)g(x)=4e^{2x}-2F(x)$，即满足的方程为$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$

（2）利用公式，求得 $F(x)=e^{2x}+Ce^{-2x}$，又 F(0)=0，解得 C=-1，所以 F(x)的表达式为 $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$，

考点四：可降阶的高阶微分方程

\# $y^{(n)}=f(x)$型　直接积分

\# $y''=f(x,y')$型　令$y'=p$,则$y''=\frac{dp}{dx}$

\# $y''=f(y,y')$型

令$y'=p$，由于方程右端不含自变量 x，因此$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

12. 求方程 $xy''=y'+x\sin\frac{y'}{x}$的通解.

解: 令$y'=p$, 则原方程化为 $xp'+p=x\sin\frac{p'}{x}$, 再令$\frac{p}{x}=u$, 则方程化为 $x\frac{du}{dx}=\sin u$，

积分得$\tan\frac{u}{2}=C_1x$，即$\frac{dy}{ax}=2x\arctan C_1x$，再次积分得原方程的通解为：

$$\begin{cases} y=x^2\arctan C_1x-\frac{x}{C_1}+\frac{1}{C_1^2}\arctan C_1x+C_2, (C_1\neq 0) \\ y=C_2 \qquad (C_1=0) \end{cases}$$

13. 求微分方程$(1+x^2)y''=2xy$ 满足初始条件$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$ 的特解.

解： 令$y'=p$,则$y''=\frac{dp}{dx}$，代入原方程得$(1+x^2)\frac{dp}{dx}=2xp$，分离变量再积分可得：

$\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln C_1$,即$y'=C_1(1+x^2)$，代入$y'|_{x=0}=3$，得$C_1=3$，再对 $y'=3(1+x^2)$积分得，$y=x^3+3x+C_2$，代入$y|_{x=0}=1$，解得$C_2=1$，所以原方程的特解为 $y=x^3+3x+1$

14. 求微分方程$y''(1-y)+2(y')^2=0$ 的通解.

解：令$y'=p$，$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，于是原方程化为$p\frac{dp}{dy}(1-y)=-2p^2$，分离变量并积分得$\ln|p|=2\ln(1-y)+\ln(C_1)$，即$\frac{dy}{dx}=C_1(1-y)^2$，再次分离变量积分，得原方程的通解为$\frac{1}{1-y}=C_1x+C_2$

15. 求微分方程$y''+\frac{(y')^2}{1-y}=0$的通解.

解：令$y'=p$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程可化为$p\frac{dp}{dy}+\frac{p^2}{1-y}=0$，当 p=0 时，y=C（C≠1）是上述方程的特解；当p≠0时，分离变量再积分，得到$\frac{dy}{dx}=C_1(y-1)$，解得$y=1+C_2e^{C_1x}$（$C_2\neq0$），注意到$C_1=0$包含了 y=C（C≠1）的情况，从而得原方程的通解为$y=1+C_2e^{C_1x}$（$C_2\neq0$）

16. 微分方程$yy''+(y')^2=0$满足初始条件$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$的特解为________.

解：令$y'=p$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，则原方程可化为$p\left(y\frac{dp}{dy}+p\right)=0$，由已知条件，$y'(0)\neq0$，固有$y\frac{dp}{dy}+p=0$，解得$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{y}$，代入$y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$，得$C_1=\frac{1}{2}$，对$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$积分得$y^2=x+C_2$，代入$y|_{x=0}=1$，得$C_2=1$，所以特解为$y^2=x+1$

17. 设函数$y(x)(x\geq0)$二阶可导且$y'(x)>0,y(0)=1$.过曲线上任意一点$P(x,y)$做该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两条直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为S_1，在区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积记为S_2，并设$2S_1-S_2$恒为 1，求该曲线的方程.

解：曲线$y=y(x)$上点$P(x,y)$处的切线方程为$Y-y=y'(x)(X-x)$，令 y=0，得切线与 x 轴的交点为$(x-\frac{y}{y'},0)$，由$y'(x)>0,y(0)=1$知，交点在$(x,0)$的左侧，于是$S_1=\frac{1}{2}y\left[x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right]=\frac{y^2}{2y'}$，而$S_2=\int_0^x y(t)dt$，由$2S_1-S_2=1$，得关系式$\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)dt=1$，两边对 x 求导并化简得$yy''=(y')^2$

令$y'=p$，则上述方程可化为$yp\frac{dp}{dy}=p^2$，解得$\frac{dy}{dx}=C_1y$，于是$y=e^{C_1x+C_2}$，因为$y(0)=1$，由$\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)dt=1$得$y'(0)=1$，从而解得$C_1=1,C_2=0$，故所求

曲线为 $y=e^x$.

考点五：二阶线性微分方程解的结构

\# 二阶线性微分方程

$$\begin{cases} y''+P(x)y'+Q(x)y=0 & ① \\ y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) & ② \end{cases}$$

- ✧ （解的叠加原理）若 $y_1(x),y_2(x)$ 是齐次方程①的两个解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是方程①解；
- ✧ 若 $y_1(x),y_2(x)$ 是齐次方程①的两个线性无关的解（即 $y_1(x),y_2(x)$ 两函数的比值不为常数），则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程①的通解；
- ✧ 设 y^* 为线性非齐次方程②的一个特解，$Y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是对应齐次方程①的通解，则 $y=y^*+Y$ 是非齐次方程②的通解.

\# 设 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$（即线性非齐次方程右端为两个函数之和），若 $y_1(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 的特解，$y_2(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

18. 设非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 有两个不同的特解 $y_1(x),y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的解通解为__________.

A. $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　B. $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

C. $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　D. $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

解：对于非齐次线性微分方程，由解的结构定理知其通解为对应齐次的通解与非齐次的特解的和，将 $y_1(x),y_2(x)$ 代入原方程中作差，知 $C[y_1(x)-y_2(x)]$ 为对应齐次方程的通解，从而原微分方程的通解为 $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$，选 B.

19. 设 $y_1(x),y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个特解，则 $y_1(x),y_2(x)$ 能构成该方程的通解的条件为________.

A. $y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)=0$　　B. $y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)\neq 0$

C. $y_1(x)y_2'(x)+y_1'(x)y_2(x)=0$　　　D. $y_1(x)y_2'(x)+y_1'(x)y_2(x)\neq 0$

解： 由题意知$y_1(x),y_2(x)$应该线性无关，即$\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\neq C$，再求导可知 B 选项正确.

20. 证明函数 $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$为方程 $xy''+2y'-xy=e^x$的通解.

证： 记$y_1=\frac{1}{x}e^x,y_2=\frac{1}{x}e^{-x},y^*=\frac{e^x}{2}$，则$y_1'=e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right),y_2'=e^{-x}\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$；

$y_1''=x^{-1}e^x-2x^{-2}e^x+2x^{-3}e^x,y_2''=e^{-x}(x^{-1}+2x^{-2}+2x^{-3})$，代入后$y_1$，$y_2$均满足 $xy''+2y'-xy=0$，且$\frac{y_2}{y_1}$不为常数，故$\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})$是原方程对应齐次方程的通解.而$y^*=y^{*'}=y^{*''}=\frac{e^x}{2}$，有 $xy^{*''}+2y^{*'}-xy^*=\frac{e^x}{2}(x+2-x)=e^x$，即$y^*=\frac{e^x}{2}$是对应非齐次方程的特解，由线性微分方程解的结构定理知函数 $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}$为方程 $xy''+2y'-xy=e^x$的通解

21. 已知$y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶线性微分方程的三个解，求此微分方程.

解： 观察三个特解，可以得出 xe^x为非齐次方程的特解，而e^{2x}，e^{-x}为分别为相应齐次方程的特解，故 $y=xe^x+C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$是所求方程的通解，又$y'=(x+1)e^x+2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}$，$y''=(x+2)e^x+4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$，消去$C_1$、$C_2$，得所求方程为$y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

考点六：二阶常系数线性微分方程

\# 二阶常系数线性齐次方程：$y''+py'+qy=0$

其特征方程为：$r^2+pr+q=0$

特征方程为$r^2+pr+q=0$根的情况	微分方程$y''+py'+q=0$的通解
两个相异的实根r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的根r_1,r_2（$r_1=r_2=r$）	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
一对共轭复根$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x)$

\# 二阶常系数非齐次线性微分方程：$y''+py'+qy=f(x)$

由解的结构定理知，应先求出对应齐次方程的通解，再求出非齐次方程的特解，即可得到该二阶常系数线性非齐次方程的通解，常用的方法是待定系数法.

f(x) 为 $e^{\lambda x}P_n(x)$ 型（$P_n(x)$ 是最高次为n的多项式）	
λ 不是对应特征方程的根	设特解为 $y^* = e^{\lambda x}Q_n(x)$
λ 是对应特征方程的单根	设特解为 $y^* = xe^{\lambda x}Q_n(x)$
λ 是对应特征方程的二重根	设特解为 $y^* = x^2e^{\lambda x}Q_n(x)$
注解：$Q_n(x)$是与$P_n(x)$同型的多项式(即最高次都为n)，若$P_n(x)$=常数，可设$Q_n(x)$=A(A也为常数)；若$P_n(x)$=一次多项式(例如一次函数)，可设$Q_n(x)=ax+b$(a,b为任意常数)；若$P_n(x)$=二次多项式(例如二次函数)，可设$Q_n(x)=ax^2+bx+c$(a,b,c为任意常数)	

f(x) 为 $e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$ 型	
$\lambda+\beta i$ 不是特征方程的根	设特解 $y^* = e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x + R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$
$\lambda+\beta i$ 是特征方程的单根	设特解 $y^* = xe^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\beta x + R_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$
注解：特解中的$m=\max\{l,n\}$	

n 阶常系数系数齐次微分方程（了解）

形式：$y(n) + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = 0$

特征方程：$r^n + p_1r^{n-1} + p_2r^{n-2} + \dots + p_{n-1}r + p_n = 0$ (*)

如果 r 是方程(*)的 k 重根，那么通解为 $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_kx^{k-1})e^{rx}$

如果$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 方程(*)的 k 重根，那么通解为

$$y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_kx^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2x + D_3x^2 + \dots + D_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

22. 求下列微分方程的通解：

（1） $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = 0$；

（2） $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

解：（1）特征方程为$r^3 - 6r^2 + 3r + 10 = 0$，解得$r_1 =- 1, r_2 = 2, r_3 = 5$，故原方程的通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3e^{5x}$.

（2）特征方程为$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0$，即$(r^2 + 1)(r - 1)^2 = 0$，其解为二重根 1 和一对共轭复根$\pm i$，故方程的通解为：

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3\sin x + C_4\cos x$$

点评：对于第一题的一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$，其根有如下关系：$x_1 +$

$x_2+x_3=-\frac{b}{a};x_1x_2x_3=-\frac{d}{a};\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{c}{d}$

23. 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为__________.

解： 由通解的形式可知，该微分方程对应的特征根为 $r=1\pm i$，从而特征方程为 $r^2-2r+2=0$，故微分方程为$y''-2y'+2y=0$

24. 写出微分方程$y''+y=x^2+1+\sin x$的特解形式__________.

解： 微分方程的特征方程为$r^2+1=0$，故特征根为 $r=\pm i$. 对于$y''+y=x^2+1$，其$\lambda=0$，不是特征方程的根，从而 $k=0$，故设特解为$y_1^*=ax^2+bx+c$；对于$y''+y=\sin x$，其$\alpha=0,\beta=i$，即$\alpha+\beta i=i$ 是特征方程的单复根，从而 $k=1$，故设特解为$y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$，又由解的结构定理知，原微分方程的特解形式为$y^*=y_1^*+y_2^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$

25. 微分方程$y''+y=-2x$ 的通解为_________.

解： 微分方程的特征方程为$r^2+1=0$，故特征根为 $r=\pm i$.故齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$，设特解为$y^*=ax+b$，代入原方程后，对比两边的系数得 $a=-2,b=0$，即$y^*=-2x$，故原方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-2x$.

26. 设$\varphi(x)=e^x-\int_0^x(x-u)\varphi(u)du$，其中$\varphi(x)$为连续函数，求$\varphi(x)$.

解： 原方程可化为$\varphi(x)=e^x-x\int_0^x\varphi(u)du+\int_0^x u\varphi(u)du$，两边对 x 求两次导，可得关系式$\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$. 该微分方程对应的齐次方程的特征方程为$r^2+1=0$，其特征根为 $r=\pm i$.故齐次方程的通解为$C_1\cos x+C_2\sin x$. 设非齐次方程的特解为$y^*=Ae^x$，代入方程求得 $A=\frac{1}{2}$，从而$\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$. 由于是变上限积分，可得$\varphi(0)=1,\varphi'(0)=1$，于是$C_1=C_2=\frac{1}{2}$，所以$\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$.

27. 设函数 $f(x),g(x)$满足$f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0,g(0)=2$，求 $\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$.

解： $f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$，即$f''(x)+f(x)=2e^x$，又 $f(0)=0$，$f'(0)=\ g(0)=$

2，解得 $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$. 而 $\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^\pi\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^\pi d\frac{f(x)}{1+x}=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^\pi=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^\pi}{1+\pi}$

28. 设有级数 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(1) 求此级数的收敛域；

(2) 证明此级数满足微分方程$y''-y=-1$，并由此确定该级数的和函数 $y(x)$.

解：（1）对于任意的 x 有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+2)}=0$，故收敛域为$(-\infty,+\infty)$

（2）由和函数的性质：$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，$y''=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，从而得到$y''-y=-1$. 它的特征方程为$r^2-1=0$，得特征根 $r=\pm1$，于是对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^x$，易得$y^*=1$，故$y''-y=-1$ 为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+1$，由初始条件 $y(0)=2,y'(0)=0$，可知$C_1=C_2=\frac{1}{2}$，所以和函数为 $y=\frac{e^{-x}+e^x}{2}+1$

29. 设二阶常系数线性微分方程$y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，试确定常数α,β,γ，并求该方程的通解.

解： 由题设特解可知原微分方程的特征根为 1 和 2，从而得到特征方程为$r^2-3r+2=0$，于是$\alpha=-3,\beta=2$，再将$y^*=xe^x$代入原方程，可得$\gamma=-1$，而原微分方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$.

第十章　微分方程巩固提高练习

1. 微分方程 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$ 的通解为__________.
2. 求微分方程的初值问题：$\frac{dy}{dx} = (1 - y^2)\tan x$，$y(0) = 2$.
3. 求微分方程$(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$ 的通解.
4. 求方程 $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$ 的通解.
5. 求微分方程$y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy$ 的通解.
6. 已知$\int_0^1 f(\alpha t)d\alpha = \frac{1}{2}f(x) + 1$，且$f'(x)$存在，求 $f(x)$.
7. 求微分方程 $y\ln y\,dx + (x - \ln y)dy = 0$ 的通解.
8. 已知$\begin{cases} xy' + (1 - x)y = e^{2x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 1 \end{cases}$，求此微分方程的特解.
9. 求方程$y' + \frac{y}{x} = y^2 - \frac{1}{x^2}$的通解.
10. 求微分方程$y'' = (y')^2 + 1$ 的通解.
11. 求方程 $yy'' = 2\left[(y')^2 - y'\right]$满足 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的特解.
12. 验证 $y = C_1x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{9}\ln x$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2\ln x$的通解.
13. 求微分方程$y'' + ay = \sin x$的通解，其中常数 $a > 0$.
14. 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x - t)f(t)dt$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$.
15. 设函数 $y = y(x)$在$(-\infty, +\infty)$内具有二阶导数，且$y' \neq 0, x = x(y)$是 $y = y(x)$ 的反函数.

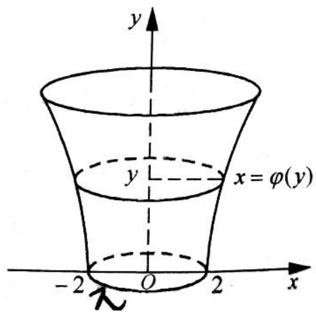
    (1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程$\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$满足的微分方程；

    (2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$的特解.
16. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x \geq 0$ 时，$f(x)F(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$. 已知 $F(0) = 1, F(x) > 0$，试求 $f(x)$.
17. 设为连续函数.

(1) 求初值问题$\begin{cases} y' + ay = f(x) \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$的解 y(x)，其中 a 是正常数；

(2) 若$|f(x)| \leq k$(k 为常数)，证明：当 $x \geq 0$ 时，有$|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

18. 有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y)(y \geq 0)$绕 y 轴旋转而成的旋转曲面（如图），容器的底面圆的半径为 2m，当以 $3m^3 / \min$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 π $m^2 / \min$ 的速率均匀扩大（假设注入液体前，容器内无液体）.



(1) 根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与$\varphi(y)$之间的表达式.

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$的方程.

19. 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x > 0)$到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点（$\frac{1}{2}$,0）.

(1) 试求曲线 L 的方程；

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标所围成的图形面积最小.

20. 已知某曲线在第一象限内且过原点，其上任一点 M 的切线 MT，M 的纵坐标 MP，x 轴所围成的三角形 MPT 与曲边三角形 OMP 的面积之比恒为常数 k（$k>\frac{1}{2}$），又已知 M 处的导数总为正值，求该曲线的方程.

第十章 微分方程巩固提高练习答案

1. $1.(x-4)y^4=Cx$
2. $y=\frac{3+\cos^2 x}{3-\cos^2 x}$
3. $xy^2-x^2y-x^3=C$
4. $1+\ln x-\ln y=Cy$
5. $y^2=x(\ln y^2+C)$(提示：令 $x=u^2$)
6. $f(x)=Cx+2$(提示：将所给条件变成变上限积分再求导)
7. $2x\ln y=(\ln y)^2+C$(利用$\frac{dx}{dy}$计算)
8. $y=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$
9. $\frac{xy-1}{xy+1}=Cx^2$(提示：令 $u=xy$)
10. $y=\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$
11. $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
12. 略（方法参见本章例题 20）
13. 当 $a\neq 1$ 时，通解为 $y=C_1\sin ax+C_2\cos ax+\frac{\sin x}{a^2-1}$

    当 $a=1$ 时，通解为 $y=C_1\sin ax+C_2\cos ax-\frac{1}{2}x\cos x$
14. $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$(本题可以由变线积分确定初始条件，所以为求特解)
15. $(1)y''-y=\sin x$；$(2)y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$
16. $f(x)=\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$(提示：对所给等式做积分运算)
17. $(1)y(x)=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt$(利用一阶非齐次方程的公式法求解)；(2)略(利用第一题的变上限积分结果的结论并结合定积分的有关性质，建立不等关系)
18. $(1)t=\varphi^2(y)-4;(2)x=e^{\frac{\pi}{6}y}$(利用体积关系)
19. $(1)y=\frac{1}{4}-x^2;(2)y=-\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{1}{3}$
20. $y=C_1x^{\frac{1}{2k-1}}$(画出图形即可列出关系式)