例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})$.

分析　将这类问题转化为定积分主要是确定被积函数和积分上下限.若对题目中被积函数难以想到，可采取如下方法：先对区间[0, 1] n 等分写出积分和，再与所求极限相比较来找出被积函数与积分上下限.

解　将区间[0, 1] n 等分，则每个小区间长为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，然后把 $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$ 的一个因子 $\frac{1}{n}$ 乘入和式中各项．于是将所求极限转化为求定积分．即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}})=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}.$$

例 2　$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx=$__________.

解法 1　由定积分的几何意义知，$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx$ 等于上半圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ （$y\ge0$）与 x 轴所围成的图形的面积．故 $\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

解法 2　本题也可直接用换元法求解．令 $x-1=\sin t$ （$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$），则

$$\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{\pi}{2}$$

例 3　比较 $\int_2^1 e^x dx$ ，$\int_2^1 e^{x^2}dx$ ，$\int_2^1(1+x)dx$.

分析　对于定积分的大小比较，可以先算出定积分的值再比较大小，而在无法求出积分值时则只能利用定积分的性质通过比较被积函数之间的大小来确定积分值的大小.

解法 1　在 $[1,2]$ 上，有 $e^x\le e^{x^2}$ ．而令 $f(x)=e^x-(x+1)$，则 $f'(x)=e^x-1$．当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $f(x)>f(0)$，可知在 $[1,2]$ 上，有 $e^x>1+x$．又 $\int_2^1 f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx$，从而有 $\int_2^1(1+x)dx>\int_2^1 e^x dx>\int_2^1 e^{x^2}dx$.

解法 2　在 $[1,2]$ 上，有 $e^x\le e^{x^2}$ ．由泰勒中值定理 $e^x=1+x+\frac{e^{\xi}}{2!}x^2$ 得 $e^x>1+x$．注意到 $\int_2^1 f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx$．因此

$$\int_2^1(1+x)dx>\int_2^1 e^x dx>\int_2^1 e^{x^2}dx .$$

例 4　估计定积分 $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$ 的值.

分析　要估计定积分的值，关键在于确定被积函数在积分区间上的最大值与最小值.

解　设 $f(x)=e^{x^2-x}$，因为 $f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$，令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x=\frac{1}{2}$，而

$$f(0)=e^0=1,\quad f(2)=e^2,\quad f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}},$$

故

$$e^{-\frac{1}{4}}\le f(x)\le e^2,\ x\in[0,2],$$

从而

$$2e^{-\frac{1}{4}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2,$$

所以

$$-2e^2\le\int_2^0 e^{x^2-x}dx\le -2e^{-\frac{1}{4}}.$$

例 5 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)\ge 0$，$f(x)>0$．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx$．

解 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m．由 $f(x)>0$ 知 $M>0$，$m>0$．又 $g(x)\ge 0$，则

$$\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx\le\sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)dx.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_a^b g(x)dx.$$

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$，$p,n$ 为自然数.

分析 这类问题如果先求积分然后再求极限往往很困难，解决此类问题的常用方法是利用积分中值定理与夹逼准则.

解法 1 利用积分中值定理

设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，显然 $f(x)$ 在 $[n,n+p]$ 上连续，由积分中值定理得

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p,\quad \xi\in[n,n+p],$$

当 $n\to\infty$ 时，$\xi\to\infty$，而 $|\sin\xi|\le 1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p=0.$$

解法 2 利用积分不等式

因为

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\int_n^{n+p}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\le\int_n^{n+p}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{n+p}{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+p}{n}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.$$

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

解法 1 由积分中值定理 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 可知

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx，\quad 0\le\xi\le 1.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \text{ 且 } \frac{1}{2}\le\frac{1}{1+\xi}\le 1，$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$$

解法 2 因为 $0\le x\le 1$，故有

$$0\le\frac{x^n}{1+x}\le x^n.$$

于是可得

$$0\le\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx.$$

又由于

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$$

例 8 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $4\int_{\frac{3}{4}}^1 f(x)dx = f(0)$. 证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

分析 由条件和结论容易想到应用罗尔定理，只需再找出条件 $f(\xi)=f(0)$ 即可.

证明 由题设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由积分中值定理，可得

$$f(0) = 4\int_{\frac{3}{4}}^1 f(x)dx = 4f(\xi)(1-\frac{3}{4}) = f(\xi)，$$

其中 $\xi\in[\frac{3}{4},1]\subset[0,1]$. 于是由罗尔定理，存在 $c\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使得 $f'(c)=0$. 证毕.

例 9 （1）若 $f(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$，则 $f'(x)=$____；（2）若 $f(x)=\int_0^x xf(t)dt$，求 $f'(x)=$____.

分析 这是求变限函数导数的问题，利用下面的公式即可

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f[v(x)]v'(x) - f[u(x)]u'(x).$$

解 （1） $f'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$；

（2） 由于在被积函数中 x 不是积分变量，故可提到积分号外即 $f(x) = x\int_0^x f(t)dt$，则

可得

$$f'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x).$$

例 10　设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=x$，则 $f(26)=$_________.

解　对等式 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=x$ 两边关于 x 求导得

$$f(x^3-1)\cdot 3x^2=1,$$

故 $f(x^3-1)=\frac{1}{3x^2}$，令 $x^3-1=26$ 得 $x=3$，所以 $f(26)=\frac{1}{27}$.

例 11　函数 $F(x)=\int_1^x (3-\frac{1}{\sqrt{t}})dt\ (x>0)$ 的单调递减开区间为_________.

解　$F'(x)=3-\frac{1}{\sqrt{x}}$，令 $F'(x)<0$ 得 $\frac{1}{\sqrt{x}}>3$，解之得 $0<x<\frac{1}{9}$，即 $(0,\frac{1}{9})$ 为所求.

例 12　求 $f(x)=\int_0^x (1-t)\arctan t dt$ 的极值点.

解　由题意先求驻点．于是 $f'(x)=(1-x)\arctan x$．令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，$x=0$．列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	－	0	＋	0	－

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，$x=0$ 为极小值点.

例 13　已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，其中

$$g(x)=\int_0^{\arcsin x} e^{-t^2}dt,\quad x\in[-1,1],$$

试求该切线的方程并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{3}{n})$.

分析　两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，隐含条件 $f(0)=g(0)$，$f'(0)=g'(0)$.

解　由已知条件得

$$f(0)=g(0)=\int_0^0 e^{-t^2}dt=0,$$

且由两曲线在 $(0,0)$ 处切线斜率相同知

$$f'(0)=g'(0)=\left.\frac{e^{-(\arcsin x)^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=0}=1.$$

故所求切线方程为 $y=x$．而

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{3}{n})=\lim_{n\to\infty} 3\cdot\frac{f(\frac{3}{n})-f(0)}{\frac{3}{n}-0}=3f'(0)=3.$$

例 14　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^2 tdt}{\int_x^0 t(t-\sin t)dt}$；

分析　该极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，可用洛必达法则.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin^2 tdt}{\int_x^0 t(t-\sin t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(\sin x^2)^2}{(-1)\cdot x\cdot(x-\sin x)}=(-2)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2)^2}{x-\sin x}=(-2)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3}{1-\cos x}$

$$=(-2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{\sin x}=0\ .$$

注　此处利用等价无穷小替换和多次应用洛必达法则.

例 15　试求正数 a 与 b，使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-b\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立.

分析　易见该极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式，可用洛必达法则.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-b\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{1-b\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-b\cos x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-b\cos x}=1,$$

由此可知必有 $\lim\limits_{x\to 0}(1-b\cos x)=0$，得 $b=1$．又由

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a}}=1,$$

得 $a=4$．即 $a=4$，$b=1$ 为所求.

例 16 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）.

A．等价无穷小．　B．同阶但非等价的无穷小．　C．高阶无穷小．　D．低阶无穷小.

解法 1　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin^2 x)\cdot\cos x}{3x^2+4x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3+4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{3}\ .$$

故 $f(x)$ 是 $g(x)$ 同阶但非等价的无穷小．选 B.

解法 2　将 $\sin t^2$ 展成 t 的幂级数，再逐项积分，得到

$$f(x)=\int_0^{\sin x}[t^2-\frac{1}{3!}(t^2)^3+\cdots]dt=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{42}\sin^7 x+\cdots,$$

则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x(\frac{1}{3}-\frac{1}{42}\sin^4 x+\cdots)}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{42}\sin^4 x+\cdots}{1+x}=\frac{1}{3}\ .$$

例 17　证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单调增加，则有

$$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx .$$

证法 1　令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，当 $t\in[a,x]$ 时，$f(t)\le f(x)$，则

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$$

$$\ge\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(x)dt=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f(x)=0 .$$

故 $F(x)$ 单调增加．即 $F(x)\ge F(a)$，又 $F(a)=0$，所以 $F(x)\ge 0$，其中 $x\in[a,b]$．从而

$$F(b)=\int_a^b xf(x)dx-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx\ge 0 .$$ 证毕.

证法 2　由于 $f(x)$ 单调增加，有 $(x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]\ge 0$，从而

$$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})[f(x)-f(\frac{a+b}{2})]dx\ge 0 .$$

即

$$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\ge\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(\frac{a+b}{2})dx=f(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx=0 .$$

故

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx .$$

例 18　计算 $\int_{-1}^2 |x|dx$．

分析　被积函数含有绝对值符号，应先去掉绝对值符号然后再积分.

解　$\int_{-1}^2 |x|dx=\int_{-1}^0(-x)dx+\int_0^2 xdx=[-\frac{x^2}{2}]_{-1}^0+[\frac{x^2}{2}]_0^2=\frac{5}{2}$．

注　在使用牛顿－莱布尼兹公式时, 应保证被积函数在积分区间上满足可积条件．如 $\int_{-2}^3\frac{1}{x^2}dx=[-\frac{1}{x}]_{-2}^3=\frac{1}{6}$，则是错误的．错误的原因则是由于被积函数 $\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处间断且在被积区间内无界.

例 19　计算 $\int_0^2\max\{x^2,x\}dx$．

分析　被积函数在积分区间上实际是分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 1<x\le 2\\ x & 0\le x\le 1\end{cases}.$$

解　$\int_0^2\max\{x^2,x\}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^2dx=[\frac{x^2}{2}]_0^1+[\frac{x^3}{3}]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{17}{6}$

例 20　设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+3\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x)=$________．

分析　本题只需要注意到定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是常数（a, b 为常数）.

解 因 $f(x)$ 连续，$f(x)$ 必可积，从而 $\int_0^1 f(t)dt$ 是常数，记 $\int_0^1 f(t)dt = a$，则

$$f(x) = x + 3a\text{，且} \int_0^1 (x+3a)dx = \int_0^1 f(t)dt = a\ .$$

所以

$$[\frac{1}{2}x^2 + 3ax]_0^1 = a\text{，即} \frac{1}{2} + 3a = a\text{，}$$

从而 $a = -\frac{1}{4}$，所以 $f(x) = x - \frac{3}{4}$.

例 21 设 $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x < 1 \\ 5-2x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$，$F(x) = \int_0^x f(t)dt$，$0 \le x \le 2$，求 $F(x)$，并讨论 $F(x)$ 的连续性.

分析 由于 $f(x)$ 是分段函数，故对 $F(x)$ 也要分段讨论.

解 （1）求 $F(x)$ 的表达式.

$F(x)$ 的定义域为 $[0,2]$. 当 $x \in [0,1]$ 时，$[0,x] \subset [0,1]$，因此

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 3t^2 dt = [t^3]_0^x = x^3\ .$$

当 $x \in (1,2]$ 时，$[0,x] = [0,1] \cup [1,x]$，因此，则

$$F(x) = \int_0^1 3t^2 dt + \int_1^x (5-2t)dt = [t^3]_0^1 + [5t - t^2]_1^x = -3 + 5x - x^2\text{，}$$

故

$$F(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \le x < 1 \\ -3+5x-x^2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

(2) $F(x)$ 在 $[0,1)$ 及 $(1,2]$ 上连续，在 $x=1$ 处，由于

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} (-3+5x-x^2) = 1\text{，} \lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 = 1\text{，} F(1) = 1\ .$$

因此，$F(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续.

错误解答 （1）求 $F(x)$ 的表达式,

当 $x \in [0,1)$ 时，

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 3t^2 dt = [t^3]_0^x = x^3\ .$$

当 $x \in [1,2]$ 时，有

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (5-2t)dt = 5x - x^2\ .$$

故由上可知

$$F(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \le x < 1 \\ 5x - x^2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

(2) $F(x)$ 在 $[0,1)$ 及 $(1,2]$ 上连续，在 $x=1$ 处，由于

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} (5x-x^2) = 4\text{，} \lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 = 1\text{，} F(1) = 1\ .$$

因此，$F(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，从而 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上不连续.

错解分析 上述解法虽然注意到了 $f(x)$ 是分段函数，但（1）中的解法是错误的，因为当 $x\in[1,2]$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 中的积分变量 t 的取值范围是 $[0,2]$，$f(t)$ 是分段函数，

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$$

才正确.

例 22 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$.

分析 由于积分区间关于原点对称，因此首先应考虑被积函数的奇偶性.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$. 由于 $\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，而 $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，有 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=0$，于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx=4\int_0^1 dx-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

由定积分的几何意义可知 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$，故

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1 dx-4\cdot\frac{\pi}{4}=4-\pi.$$

例 23 计算 $\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

分析 被积函数中含有 $\frac{1}{x}$ 及 $\ln x$，考虑凑微分.

解 $\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}=\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{2d(\sqrt{\ln x})}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$

$$=[2\arcsin(\sqrt{\ln x})]_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}=\frac{\pi}{6}.$$

例 24 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos x}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx$$

$$=[\frac{1}{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{4}}-[\tan x-x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-2+\sqrt{2}.$$

注 此题为三角有理式积分的类型，也可用万能代换公式来求解，请读者不妨一试.

例 25　计算 $\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}dx$，其中 $a>0$.

解　$\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}dx=\int_0^{2a} x\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx$，令 $x-a=a\sin t$，则

$$\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}dx=a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 tdt$$

$$=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt+0=\frac{\pi}{2}a^3.$$

注　若定积分中的被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，一般令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$.

例 26　计算 $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$，其中 $a>0$.

解法 1　令 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\frac{(\sin t+\cos t)'}{\sin t+\cos t}]dt$$

$$=\frac{1}{2}\big[t+\ln|\sin t+\cos t|\big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

解法 2　令 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt.$$

又令 $t=\frac{\pi}{2}-u$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\sin u+\cos u}du.$$

所以，

$$\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt]=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{4}.$$

注　如果先计算不定积分 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$，再利用牛顿－莱布尼兹公式求解, 则比较复杂，由此可看出定积分与不定积分的差别之一.

例 27　计算 $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

分析　被积函数中含有根式，不易直接求原函数，考虑作适当变换去掉根式.

解　设 $u=\sqrt{e^x-1}$，$x=\ln(u^2+1)$，$dx=\frac{2u}{u^2+1}du$，则

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\int_0^2\frac{(u^2+1)u}{u^2+4}\cdot\frac{2u}{u^2+1}du=2\int_0^2\frac{u^2}{u^2+4}du=2\int_0^2\frac{u^2+4-4}{u^2+4}du$$

$$=2\int_0^2 du-8\int_0^2\frac{1}{u^2+4}du=4-\pi\ .$$

例 28　计算 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$，其中 $f(x)$ 连续.

分析　要求积分上限函数的导数，但被积函数中含有 x，因此不能直接求导，必须先换元使被积函数中不含 x，然后再求导.

解　由于

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)dt^2\ .$$

故令 $x^2-t^2=u$，当 $t=0$ 时 $u=x^2$；当 $t=x$ 时 $u=0$，而 $dt^2=-du$，所以

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)(-du)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du\ ,$$

故

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=\frac{d}{dx}[\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du]=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2)\ .$$

错误解答　$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=xf(x^2-x^2)=xf(0)$.

错解分析　这里错误地使用了变限函数的求导公式，公式

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

中要求被积函数 $f(t)$ 中不含有变限函数的自变量 x，而 $f(x^2-t^2)$ 含有 x，因此不能直接求导，而应先换元.

例 29　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin xdx$.

分析　被积函数中出现幂函数与三角函数乘积的情形，通常采用分部积分法.

解　$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} xd(-\cos x)=[x\cdot(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\cos x)dx$

$$=-\frac{\pi}{6}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos xdx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\ .$$

例 30　计算 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(3-x)^2}dx$.

分析　被积函数中出现对数函数的情形，可考虑采用分部积分法.

解　$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(3-x)^2}dx=\int_0^1\ln(1+x)d(\frac{1}{3-x})=[\frac{1}{3-x}\ln(1+x)]_0^1-\int_0^1\frac{1}{(3-x)}\cdot\frac{1}{(1+x)}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\int_0^1(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3-x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 3\ .$$

例 31　计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

分析　被积函数中出现指数函数与三角函数乘积的情形通常要多次利用分部积分法.

解　由于$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x de^x = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx , \qquad (1)$$

而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x de^x = [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot (-\sin x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx - 1 , \qquad (2)$$

将（2）式代入（1）式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - [\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx - 1],$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) .$$

例 32　计算$\int_0^1 x \arcsin x dx$.

分析　被积函数中出现反三角函数与幂函数乘积的情形，通常用分部积分法.

解　$\int_0^1 x \arcsin x dx = \int_0^1 \arcsin x d(\frac{x^2}{2}) = [\frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} d(\arcsin x)$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx . \qquad (1)$$

令 $x = \sin t$ ，则

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} d\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = [\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} . \qquad (2)$$

将（2）式代入（1）式中得

$$\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{\pi}{8} .$$

例 33　设 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上具有二阶连续导数， $f'(\pi) = 3$ 且$\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \cos x dx = 2$ ，求 $f'(0)$.

分析　被积函数中含有抽象函数的导数形式，可考虑用分部积分法求解.

解　由于$\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \cos x dx = \int_0^{\pi} f(x) d\sin x + \int_0^{\pi} \cos x df'(x)$

$$= \{[f(x)\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\sin x dx\} + \{[f'(x)\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\sin x dx\}$$

$$=-f'(\pi)-f'(0)=2.$$

故 $f'(0)=-2-f'(\pi)=-2-3=-5$.

例 34（97 研） 设函数 $f(x)$ 连续，

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt\text{，且}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A\text{（}A\text{为常数），}$$

求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

分析 求 $\varphi'(x)$ 不能直接求，因为 $\int_0^1 f(xt)dt$ 中含有 $\varphi(x)$ 的自变量 x，需要通过换元将 x 从被积函数中分离出来，然后利用积分上限函数的求导法则，求出 $\varphi'(x)$，最后用函数连续的定义来判定 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，而 $f(x)$ 连续，所以 $f(0)=0$，$\varphi(0)=0$.

当 $x\neq 0$ 时，令 $u=xt$，$t=0$，$u=0$；$t=1$，$u=x$．$dt=\dfrac{1}{x}du$，则

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x},$$

从而

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad (x\neq 0).$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$，即 $\varphi'(0)=\dfrac{A}{2}$．所以

$$\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0).$$

从而知 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注 这是一道综合考查定积分换元法、对积分上限函数求导、按定义求导数、讨论函数在一点的连续性等知识点的综合题．而有些读者在做题过程中常会犯如下两种错误：

（1）直接求出

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2},$$

而没有利用定义去求 $\varphi'(0)$，就得到结论 $\varphi'(0)$ 不存在或 $\varphi'(0)$ 无定义，从而得出 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$

处不连续的结论.

（2）在求 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)$ 时，不是去拆成两项求极限，而是立即用洛必达法则，从而导致

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\frac{xf'(x)+f(x)-f(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f'(x).$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 用洛必达法则得到 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=A$，出现该错误的原因是由于使用洛必达法则需要有条件：$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内可导. 但题设中仅有 $f(x)$ 连续的条件，因此上面出现的 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 是否存在是不能确定的.

例 35（00 研） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=0\text{，}\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=0\text{.}$$

试证在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

分析 本题有两种证法：一是运用罗尔定理，需要构造函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，找出 $F(x)$ 的三个零点，由已知条件易知 $F(0)=F(\pi)=0$，$x=0$，$x=\pi$ 为 $F(x)$ 的两个零点，第三个零点的存在性是本题的难点. 另一种方法是利用函数的单调性，用反证法证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 之间存在两个零点.

证法 1 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,\ 0\le x\le\pi$，则有 $F(0)=0,\ F(\pi)=0$. 又

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos xdx=\int_0^{\pi}\cos xdF(x)=[\cos xF(x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx$$

$$=\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx=0\text{，}$$

由积分中值定理知，必有 $\xi\in(0,\pi)$，使得

$$\int_0^{\pi}F(x)\sin xdx=F(\xi)\sin\xi\cdot(\pi-0)\text{.}$$

故 $F(\xi)\sin\xi=0$. 又当 $\xi\in(0,\pi),\ \sin\xi\ne 0$，故必有 $F(\xi)=0$.

于是在区间 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上对 $F(x)$ 分别应用罗尔定理，知至少存在

$$\xi_1\in(0,\xi)\text{，}\quad \xi_2\in(\xi,\pi)\text{，}$$

使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0\text{，即 }f(\xi_1)=f(\xi_2)=0\text{.}$$

证法 2 由已知条件 $\int_0^{\pi}f(x)dx=0$ 及积分中值定理知必有

$$\int_0^{\pi}f(x)dx=f(\xi_1)(\pi-0)=0\text{，}\quad \xi_1\in(0,\pi)\text{，}$$

则有 $f(\xi_1)=0$.

若在 $(0,\pi)$ 内，$f(x)=0$ 仅有一个根 $x=\xi_1$，由 $\int_0^{\pi}f(x)dx=0$ 知 $f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内

异号，不妨设在$(0,\xi_1)$内$f(x)>0$，在(ξ_1,π)内$f(x)<0$，由

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=0\,,\quad \int_0^{\pi} f(x)dx=0\,,$$

以及$\cos x$在$[0,\pi]$内单调减，可知：

$$0=\int_0^{\pi} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx+\int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx>0\,.$$

由此得出矛盾．故$f(x)=0$至少还有另一个实根ξ_2，$\xi_1\neq\xi_2$且$\xi_2\in(0,\pi)$使得

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

例 36 计算$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+3}$．

分析 该积分是无穷限的的反常积分，用定义来计算．

解 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+3}=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{dx}{x^2+4x+3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^t(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3})dx$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}[\ln\frac{x+1}{x+3}]_0^t=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln\frac{t+1}{t+3}-\ln\frac{1}{3})$$

$$=\frac{\ln 3}{2}\,.$$

例 37 计算$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}}$．

解 $$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x}}=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{(x-1)^2-1}}\overset{x-1=\sec\theta}{=\!=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta\tan\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

例 38 计算$\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$．

分析 该积分为无界函数的反常积分，且有两个瑕点，于是由定义，当且仅当$\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$和$\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$均收敛时，原反常积分才是收敛的．

解 由于

$$\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}=\lim_{a\to2^+}\int_a^3\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}=\lim_{a\to2^+}\int_a^3\frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}}$$

$$=\lim_{a\to2^+}[\arcsin(x-3)]_a^3=\frac{\pi}{2}\,.$$

$$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}} = \lim_{b\to 4^-}\int_3^b \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}} = \lim_{b\to 4^-}\int_3^b \frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}}$$

$$= \lim_{b\to 4^-}[\arcsin(x-3)]_3^b = \frac{\pi}{2}.$$

所以 $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

例 39 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^5}}$.

分析 此题为混合型反常积分，积分上限为$+\infty$，下限 0 为被积函数的瑕点.

解 令$\sqrt{x}=t$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^5}} = \int_0^{+\infty}\frac{2tdt}{t(t^2+1)^{\frac{5}{2}}} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}},$$

再令$t=\tan\theta$，于是可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan\theta}{(\tan^2\theta+1)^{\frac{5}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^5\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sec^3\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$$

$$= [\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

例 40 计算$\int_{-\sqrt{2}}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

解 由于

$$\int_{-\sqrt{2}}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \int_{-\sqrt{2}}^1\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int_{-\sqrt{2}}^1\frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2},$$

可令$t=x-\frac{1}{x}$，则当$x=-\sqrt{2}$时，$t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；当$x\to 0^-$时，$t\to+\infty$；当$x\to 0^+$时，$t\to-\infty$；当$x=1$时，$t=0$；故有

$$\int_{-\sqrt{2}}^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \int_{-\sqrt{2}}^0\frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2} + \int_0^1\frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2}$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty}\frac{d(t)}{2+t^2} + \int_{-\infty}^0\frac{dt}{2+t^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\pi+\arctan\frac{1}{2}) \quad .$$

注 有些反常积分通过换元可以变成非反常积分，如例 32、例 37、例 39；而有些非反常积分通过换元却会变成反常积分，如例 40，因此在对积分换元时一定要注意此类情形.

例 41 求由曲线 $y=\frac{1}{2}x$，$y=3x$，$y=2$，$y=1$ 所围成的图形的面积.

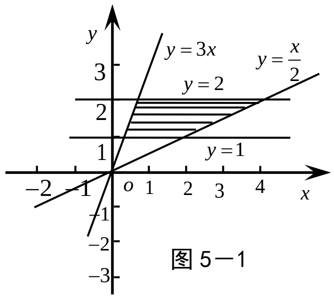

图 5－1

分析 若选 x 为积分变量，需将图形分割成三部分去求，如图 5－1 所示，此做法留给读者去完成. 下面选取以 y 为积分变量.

解 选取 y 为积分变量，其变化范围为 $y\in[1,2]$，则面积元素为

$$dA=|2y-\frac{1}{3}y|dy=(2y-\frac{1}{3}y)dy \, .$$

于是所求面积为

$$A=\int_1^2(2y-\frac{1}{3}y)dy=\frac{5}{2} \, .$$

例 42 抛物线 $y^2=2x$ 把圆 $x^2+y^2=8$ 分成两部分，求这两部分面积之比.

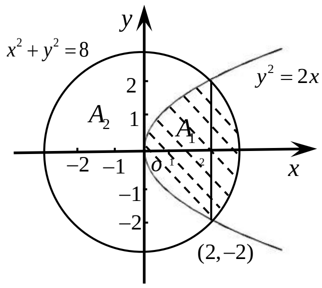

图 5－2

解 抛物线 $y^2=2x$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 的交点分别为 $(2,2)$ 与 $(2,-2)$，如图所示 5－2 所示，抛物线将圆分成两个部分 A_1，A_2，记它们的面积分别为 S_1，S_2，则有

$$S_1=\int_{-2}^2(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2})dy=8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}+2\pi \, , \quad S_2=8\pi-A_1=6\pi-\frac{4}{3} \, ,$$ 于是

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{4}{3}+2\pi}{6\pi-\frac{4}{3}}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2} \, .$$

例 43 求心形线 $\rho=1+\cos\theta$ 与圆 $\rho=3\cos\theta$ 所围公共部分的面积.

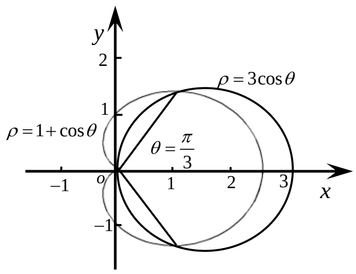

图 5－3

分析 心形线 $\rho=1+\cos\theta$ 与圆 $\rho=3\cos\theta$ 的图形如图 5－3 所示. 由图形的对称性，只需计算上半部分的面积即可.

解 求得心形线 $\rho=1+\cos\theta$ 与圆 $\rho=3\cos\theta$ 的交点为 $(\rho,\theta)=(\frac{3}{2},\pm\frac{\pi}{3})$，由图形的对称性得心形线 $\rho=1+\cos\theta$ 与圆 $\rho=3\cos\theta$ 所围公共部分的面积为

$$A=2[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2d\theta]=\frac{5}{4}\pi \, .$$

例 44 求曲线 $y=\ln x$ 在区间 $(2,6)$ 内的一条切线，使得该切线与直线 $x=2$，$x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围成平面图形的面积最小（如图 5－4 所示）.

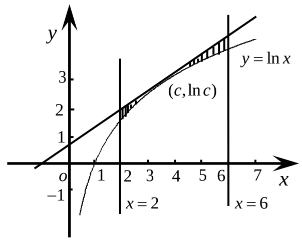

图 5－4

分析　要求平面图形的面积的最小值，必须先求出面积的表达式.

解　设所求切线与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $(c,\ln c)$，则切线方程为 $y-\ln c=\dfrac{1}{c}(x-c)$．又切线与直线 $x=2$，$x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围成的平面图形的面积为

$$A=\int_2^6[\frac{1}{c}(x-c)+\ln c-\ln x]dx=4(\frac{4}{c}-1)+4\ln c+4-6\ln 6+2\ln 2\ .$$

由于

$$\frac{dA}{dc}=-\frac{16}{c^2}+\frac{4}{c}=-\frac{4}{c^2}(4-c)\ ,$$

令 $\dfrac{dA}{dc}=0$，解得驻点 $c=4$．当 $c<4$ 时 $\dfrac{dA}{dc}<0$，而当 $c>4$ 时 $\dfrac{dA}{dc}>0$．故当 $c=4$ 时，A 取得极小值．由于驻点唯一．故当 $c=4$ 时，A 取得最小值．此时切线方程为：

$$y=\frac{1}{4}x-1+\ln 4\ .$$

例 45　求圆域 $x^2+(y-b)^2\le a^2$（其中 $b>a$）绕 x 轴旋转而成的立体的体积.

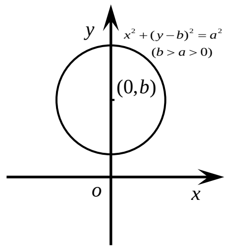

图 5－5

解　如图 5－5 所示，选取 x 为积分变量，得上半圆周的方程为

$$y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}\ ,$$

下半圆周的方程为

$$y_1=b-\sqrt{a^2-x^2}\ .$$

则体积元素为

$dV=(\pi y_2^2-\pi y_1^2)dx=4\pi b\sqrt{a^2-x^2}dx$．于是所求旋转体的体积为

$$V=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=8\pi b\cdot\frac{\pi a^2}{4}=2\pi^2a^2b\ .$$

注　可考虑选取 y 为积分变量，请读者自行完成.

例 46（03 研）　过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

（1）求 D 的面积 A；

（2）求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

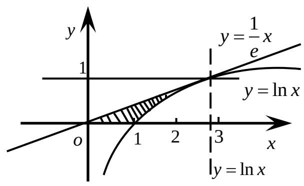

图 5－6

分析　先求出切点坐标及切线方程，再用定积分求面积 A，旋转体积可用大的立体体积减去小的立体体积进行

计算，如图 5－6 所示.

解 （1）设切点横坐标为 x_0，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=e$，所以该切线的方程是 $y=\frac{1}{e}x$. 从而 D 的面积

$$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{e}{2}-1.$$

（2）切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 围成的三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2,$$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 围成的图形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy=\pi(-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{1}{2}).$$

因此，所求体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3).$$

例 47 有一立体以抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=2$ 所围成的图形为底，而垂直于抛物线的轴的截面都是等边三角形，如图 5－7 所示. 求其体积.

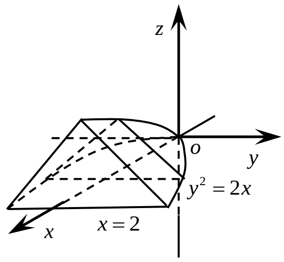

图 5－7

解 选 x 为积分变量且 $x\in[0,2]$. 过 x 轴上坐标为 x 的点作垂直于 x 轴的平面，与立体相截的截面为等边三角形，其底边长为 $2\sqrt{2x}$，得等边三角形的面积为

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2x})^2=2\sqrt{3}x.$$

于是所求体积为 $V=\int_0^2 A(x)dx=\int_0^2 2\sqrt{3}xdx=4\sqrt{3}$.

例 48（03 研） 某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层，汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功，设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 k，$k>0$），汽锤第一次击打进地下 a（m），根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 r（$0<r<1$）. 问：

（1）汽锤打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

（2）若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？（注：m 表示长度单位米）

分析 本题属于变力作功问题，可用定积分来求.

解 （1）设第 n 次击打后，桩被打进地下 x_n，第 n 次击打时，汽锤所作的功为 W_n（$n=1$，2，…）. 由题设，当桩被打进地下的深度为 x 时，土层对桩的阻力的大小为 kx，所以

$$W_1=\int_0^{x_1}kxdx=\frac{k}{2}{x_1}^2=\frac{k}{2}a^2\text{，}\quad W_2=\int_{x_1}^{x_2}kxdx=\frac{k}{2}({x_2}^2-{x_1}^2)=\frac{k}{2}({x_1}^2-a^2)\ .$$

由 $W_2=rW_1$ 得

$${x_2}^2-{x_1}^2=ra^2\text{，即}\quad {x_2}^2=(1+r)a^2\text{，}$$

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3}kxdx=\frac{k}{2}({x_3}^2-{x_2}^2)=\frac{k}{2}[{x_3}^2-(1+r)a^2]\ .$$

由 $W_3=rW_2=r^2W_1$ 得

$${x_3}^2-(1+r)a^2=r^2a^2\text{，即}\quad {x_3}^2=(1+r+r^2)a^2\ .$$

从而汽锤击打 3 次后，可将桩打进地下 $x_3=a\sqrt{1+r+r^2}$ （m）.

（2）问题是要求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，为此先用归纳法证明：$x_{n+1}=a\sqrt{1+r+\cdots+r^n}$.

假设 $x_n=\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}a$，则

$$W_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}}kxdx=\frac{k}{2}({x_{n+1}}^2-{x_n}^2)=\frac{k}{2}[{x_{n+1}}^2-(1+r+...+r^{n-1})a^2]\ .$$

由

$$W_{n+1}=rW_n=r^2W_{n-1}=...=r^nW_1\text{，}$$

得

$${x_{n+1}}^2-(1+r+...+r^{n-1})a^2=r^na^2\ .$$

从而

$$x_{n+1}=\sqrt{1+r+\cdots+r^n}a\ .$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}}a=\dfrac{a}{\sqrt{1-r}}$.

若不限打击次数，汽锤至多能将桩打进地下 $\dfrac{a}{\sqrt{1-r}}\ (m)$.

例 49　有一等腰梯形水闸．上底为 6 米，下底为 2 米，高为 10 米．试求当水面与上底相接时闸门所受的水压力．

解　建立如图 5－8 所示的坐标系，选取 x 为积分变量．则过点 $A(0,\ 3)$，$B(10,\ 1)$ 的直线方程为 $y=-\dfrac{1}{5}x+3$.

于是闸门上对应小区间 $[x,x+dx]$ 的窄条所承受的水压力为 $dF=2xy\rho gdx$. 故闸门所受水压力为 $F=2\rho g\int_0^{10}x(-\dfrac{1}{5}x+3)dx=\dfrac{500}{3}\rho g$，其中 ρ 为水密度，g 为重力加速度.

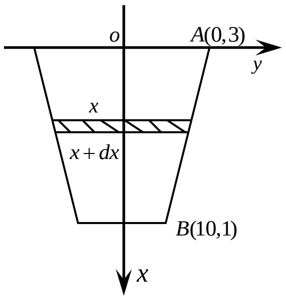

图 5—8