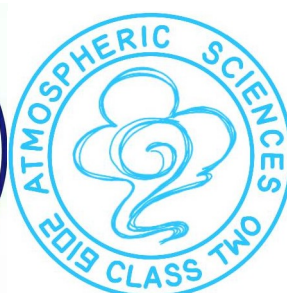
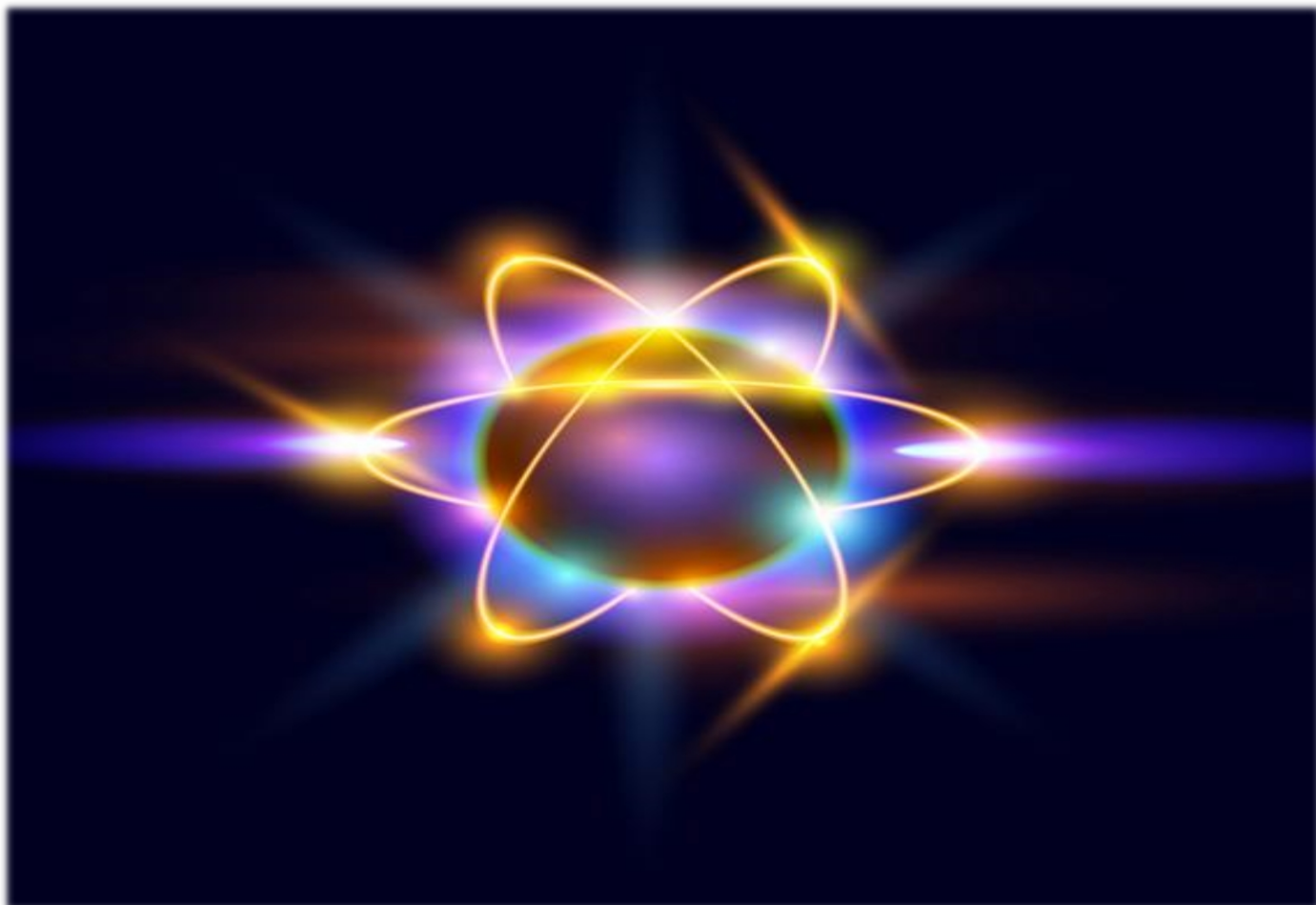


大学物理 I3 · 复习资料

电磁学&光学&近代物理

整理：2019 级大气科学 蒋斌



前言

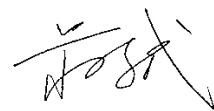
大学物理 I3 的复习资料终于和大家见面啦~本资料主要分为六章（见下面的目录），主要是把课本上的写典型例题进行了整理，同时，也把一些比较简单而又典型的例题作为练习题放在每章的最后。本资料的第六章只给出了思维导图，没有整理相应的例题、章节练习。

大学物理的重点内容为前四章，其中大题、综合题又以第二章和第四章的难度较大，所以复习时一定要对这两章多花一点时间，对它们的内容有一个清晰的逻辑。复习的时候需要注意：（1）对基本概念的理解，尤其是每个章节的重要公式，能够写出表达式、清楚物理含义和适用范围等；（2）基本概念的应用，这就需要做题，这主要通过把书上的例题吃透，还有把老师布置过课后习题再过一遍。

在资料的使用过程中如发现有误之处，欢迎指正，联系邮箱：

lesnow_bin@163.com

最后，大家期末考试加油！



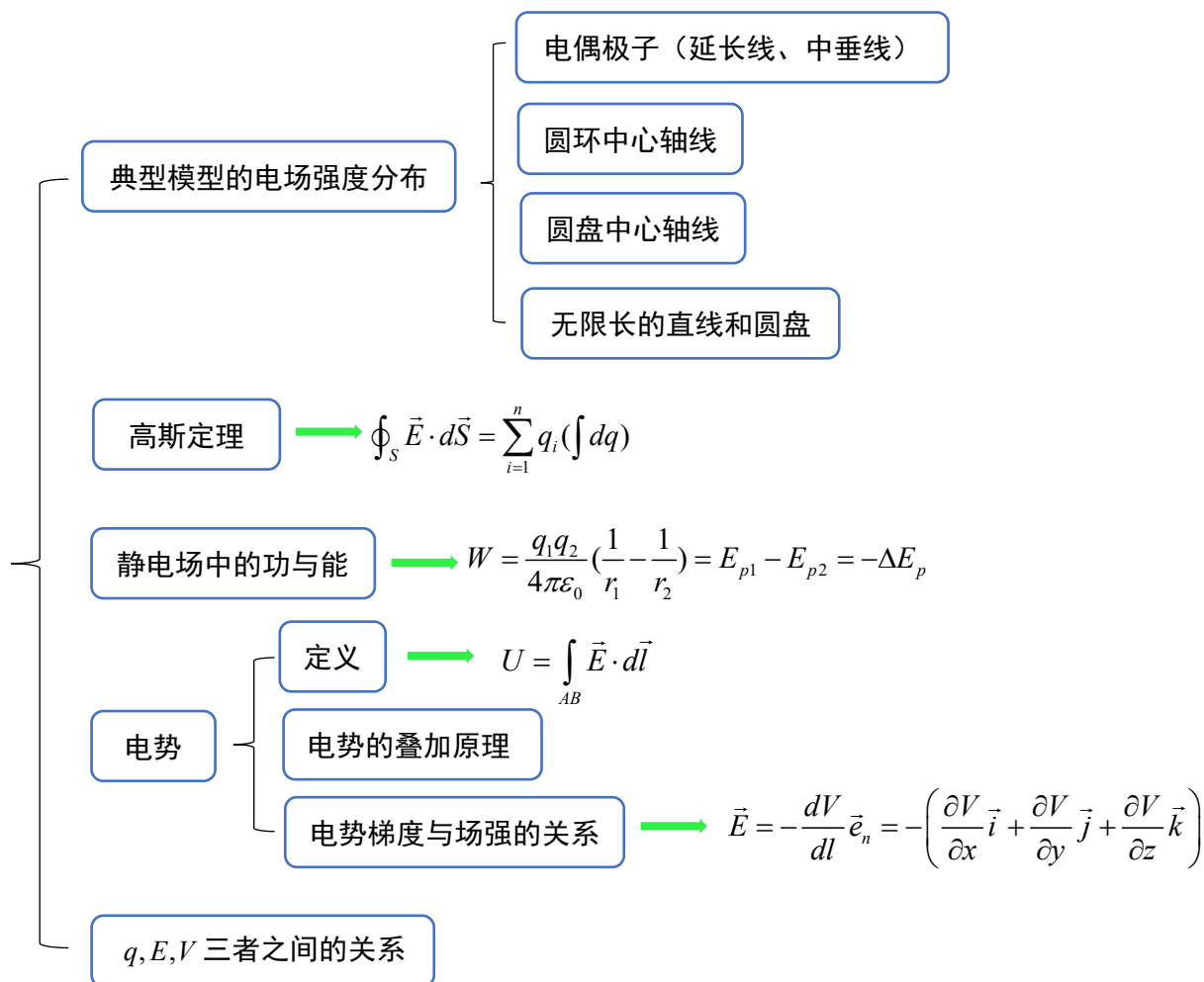
2021 年 6 月 25 日

目录

第一章 静电场.....	2
第二章 静电场中的导体与电解质.....	11
第三章 恒定磁场.....	26
第四章 电磁感应 电磁场	34
第五章 光学.....	42
第六章 相对论和量子力学.....	64

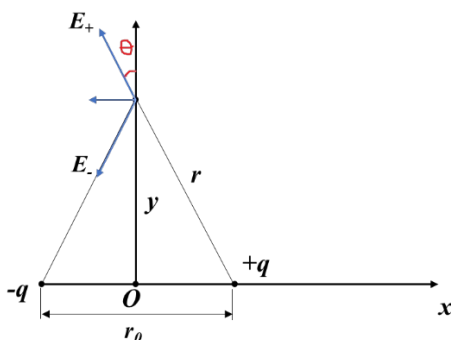
第一章 静电场

➤ 章节知识体系



➤ 典型例题

1. 求电偶极子中垂线方向上任意一点电场强度的表达式.



解: 建立如上图所示的坐标系。

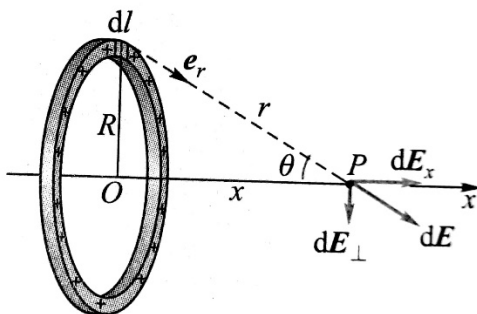
由库仑定律, 在中垂线上一点 y 处, 有: $\vec{E}_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, $\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

由场强叠加原理, $E = \frac{2q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r_0}{r} = \frac{qr_0}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, 式中 $r = \sqrt{y^2 + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}$

电偶极矩大小为: $p = qr_0$, 其方向由 $-q \rightarrow +q$, 故中垂线上任一点的场强矢

量形式可写为: $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{\left(\sqrt{y^2 + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}\right)^{3/2}}$, 当 $y \gg r_0$ 时, $\vec{E} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{y^3}$

2. 正电荷
- q
- 均匀地分布在半径为
- R
- 的圆环上. 计算通过环心点
- O
- , 并垂直圆环平面的轴线上的任意一点
- P
- 的场强与电势.



解: 建立如上图所示的 Ox 坐标系, 易求电荷线密度 $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$

在环上取一线元 dl , 其在 P 处产生的场强为: $d\vec{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

根据对称性, 有: $\int d\vec{E}_\perp = 0$, 从而 $E = \int dE_x = \int dE \cos \theta$

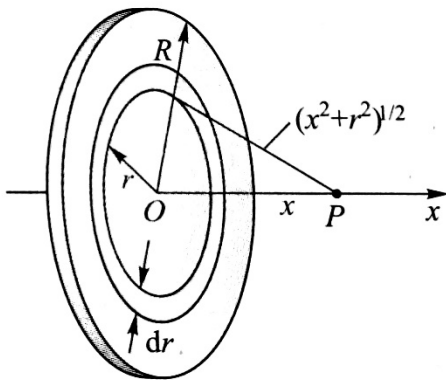
$$\text{其中 } \cos \theta = \frac{x}{r}, \text{ 故 } \vec{E} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{i} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\lambda 2\pi R x}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$$

当 $x \gg R$ 时, 有 $\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \vec{i}$, 即足够远时, 可以看成点电荷处理.

[思考] (1) 圆环中心处的场强如何?

(2) 试确定 Ox 轴上场强最大的位置.

3. 一半径为 R , 电荷均匀分布的薄圆盘的电荷面密度为 σ , 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度.



解 建立图上图所示的直角坐标系。把圆盘看成许多个圆环的叠加, 由第 2 题的结论, 在距离盘心 r 处的厚度为 dr 的圆环对 P 点产生的电场强度为:

$$d\vec{E} = \frac{x dq}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} \vec{i} = \frac{x \cdot 2\pi r dr \sigma}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} \vec{i} = \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \vec{i}$$

$$\text{于是 } \vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \vec{i}$$

当 $x \ll R$ 时, 圆盘可看作无限大平面, 有 $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$

当时 $x \gg R$ 时, 有 $1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \approx \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}$, 所以 $\vec{E} = \frac{\sigma\pi R^2}{2\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i}$, 即可以

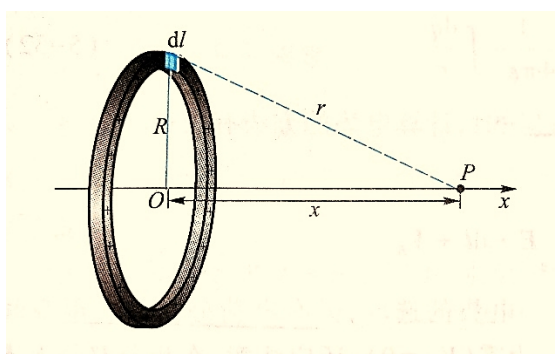
看成是点电荷.

[注]: 本题最后用到的泰勒展开公式为:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

4. 正电荷均匀地分布在半径为 R 的细圆环上，细圆环总的带电量为 q ，环心在点 O ，试计算在环心轴线上坐标为 x 处的电势，进而利用该结论求带同样电量的圆盘中轴线上的电势.

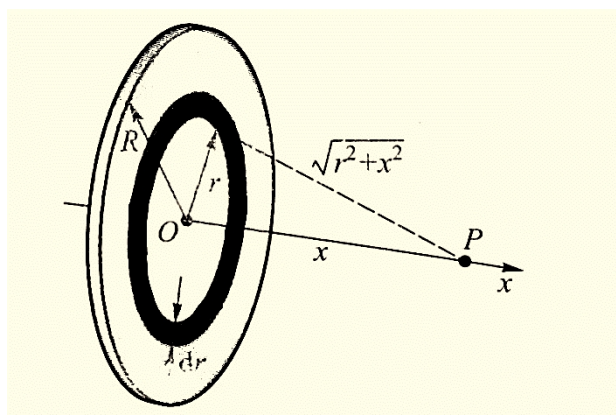
解：细圆环的电荷线密度为： $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ 建立如图所示的坐标系：



在环上任取一微元 dl ，有 $dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi R} dl$ ，该微元在 x 处产生的电势为（看成

点电荷）： $dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$ ，从而整个圆环在 x 处产生的电势为：

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi R} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2\pi R} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$



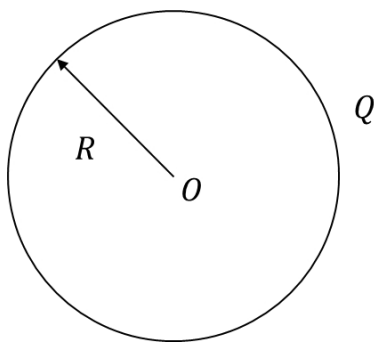
对于带同样电量的圆盘，其电荷面密度为： $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ ，把它看成许多小圆环，则每个小圆环在 x 处产生的电势为：

$$dV_p = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\text{从而: } V_p = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2+R^2} - x)$$

$$\text{当 } x \gg R \text{ 时, 有 } \sqrt{x^2+R^2} - \sqrt{x^2} \approx x + \frac{R^2}{2x} - x = \frac{R^2}{2x}, \text{ 故 } V_p = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{\pi R^2}{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x}$$

5. 在真空中有一电荷为 Q , 半径为 R 的均匀带电球面. 求整个空间的电势分布.

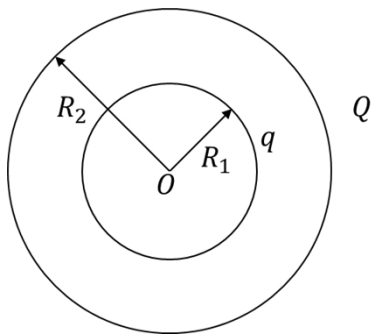


解: 均匀带电球壳的电场分布为: $E = \begin{cases} 0, & 0 < r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$, 由电势定义: $U = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\text{当 } 0 < r < R \text{ 时, 有: } V_1 = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$\text{当 } r > R \text{ 时, 有: } V_2 = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

[注]也就是说, 对于薄球壳, 壳内的电势为一常量, 壳外的电势为呈非线性减小, 上述的结论应该牢记, 便于快速做题, 例如, 写出内球壳的电势_____.

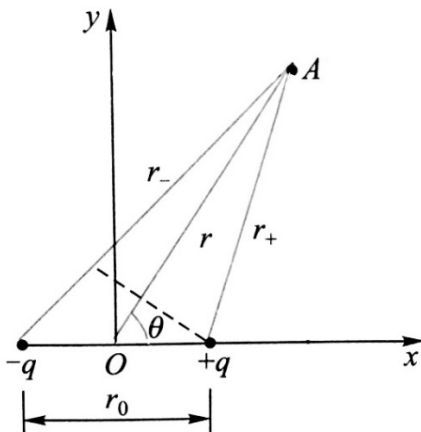


答案: $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$, 利用上述, 采用电势叠加即可

6. 求电偶极子的空间中任意一点的电势和电场强度.

解: 建立如下图所示的 Oxy 坐标系, 点 A 为 Oxy 中的一点, 到 $-q, q$ 的距离分别为 r_-, r_+ , 到电偶极子中心 O 的距离为 r , 电偶极子的电偶极矩为 $\vec{p} = q\vec{r}_0$.

$-q, q$ 在点的电势分别为: $V_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+}$, $V_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-}$



根据电势叠加原理: $V_A = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right)$

在电偶极子中, 由于 $r_0 \ll r$, 所以 $r_- - r_+ \approx r_0 \cos \theta$, $r_+ r_- \approx r^2$, 故上式可写成:

$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0 \cos \theta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

若把上式写成直角坐标的形式, 则有:

$$V_A = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

当 $x=0$ 时, 有 $V_A=0$, 即中垂线上的电势为零

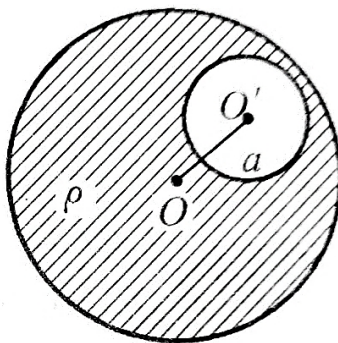
若分别对 x, y 求偏导, 分别有:

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial V_A}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \vec{i}, \vec{E}_y = -\frac{\partial V_A}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \vec{j}$$

在电偶极子延长线上, 即 $y=0$, 有 $\vec{E}_x = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3} \vec{i}, \vec{E}_y = 0$

在电偶极子中垂线上, 即 $x=0$, 有 $\vec{E}_x = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \vec{i}, \vec{E}_y = 0$

7. 如下图所示, 在一电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体中, 挖去一个小球体, 形成一球形空腔, 两球心之间的距离为 a , 求空腔内任意一点的电场强度.



解: 采用补偿法求解. 可以设想带电的空腔等效于腔内有体密度相同的等值异号的两种电荷, 这样本题就可以归结为一个体密度为 ρ 的均匀带电大球体和一个体密度也为 ρ 的均匀带电小球体在空腔内产生的场强的叠加.

由于球的场强分布具有对称性, 由高斯定理, 分别以 O 和 O' 为球心, 以 r 和 r' 为半径 (均通过点), 做高斯面 S 和 S' , 于是:

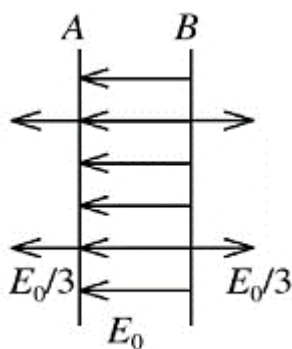
$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}, E_2 \cdot 4\pi r'^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3}{\epsilon_0}$$

从而 $\vec{E}_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r, \vec{E}_2 = -\frac{\rho r'}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$, 根据场强叠加原理:

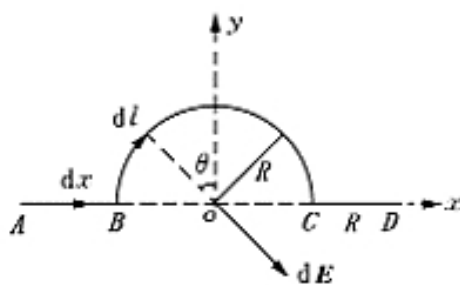
$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r\vec{e}_r - r'\vec{e}_r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a} = \text{常矢量}$$

➤ 章节小练习

1. A、B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面，已知两平面间的电场强度大小为 E_0 ，两平面外侧电场强度大小都为 $\frac{E_0}{3}$ ，方向如下图所示。则 A、B 两平面上的电荷面密度 $\sigma_A = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\sigma_B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

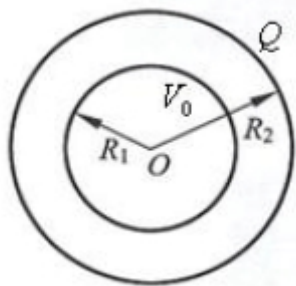


(第 1 题图)

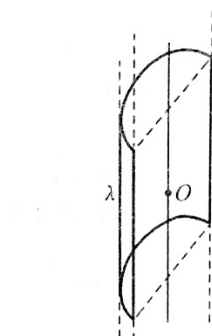


(第 2 题图)

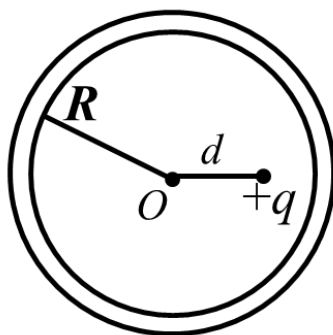
2. 如图所示，绝缘细线上均匀的分布着线密度为 λ 的正电荷，两直导线的长度和半圆环的半径都等于 R 。则环中心点 O 处的场强为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 如图所示，一导体球半径为 R_1 ，外罩一半径为 R_2 的同心薄导体球壳，外球壳所带总电荷为 Q ，而内球的电势为 V_0 ，则导体球和球壳之间的电势差为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



4. 如下图所示，一半径 R 为的无限长半圆柱薄筒，其上均匀带电，单位长度的带电量为 λ ，求其轴线上的电场强度。



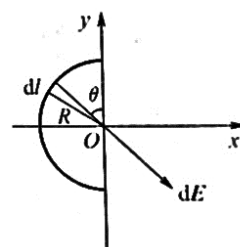
5. 一个未带电的空腔导体球壳，内半径为 R ，在腔内离球心的距离为 d 处 ($d < R$)，固定一电量为 $+q$ 的点电荷，用导线把球外壳接地后，再把地线撤去，选无穷远处为电势零点，则球心 O 处的电势为_____.



答案:

1. $\sigma_A = -\frac{2\varepsilon_0 E_0}{3}, \sigma_B = \frac{4\varepsilon_0 E_0}{3}$ 2. $-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \vec{j}$ 3. $\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \left(V_0 - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\right)$

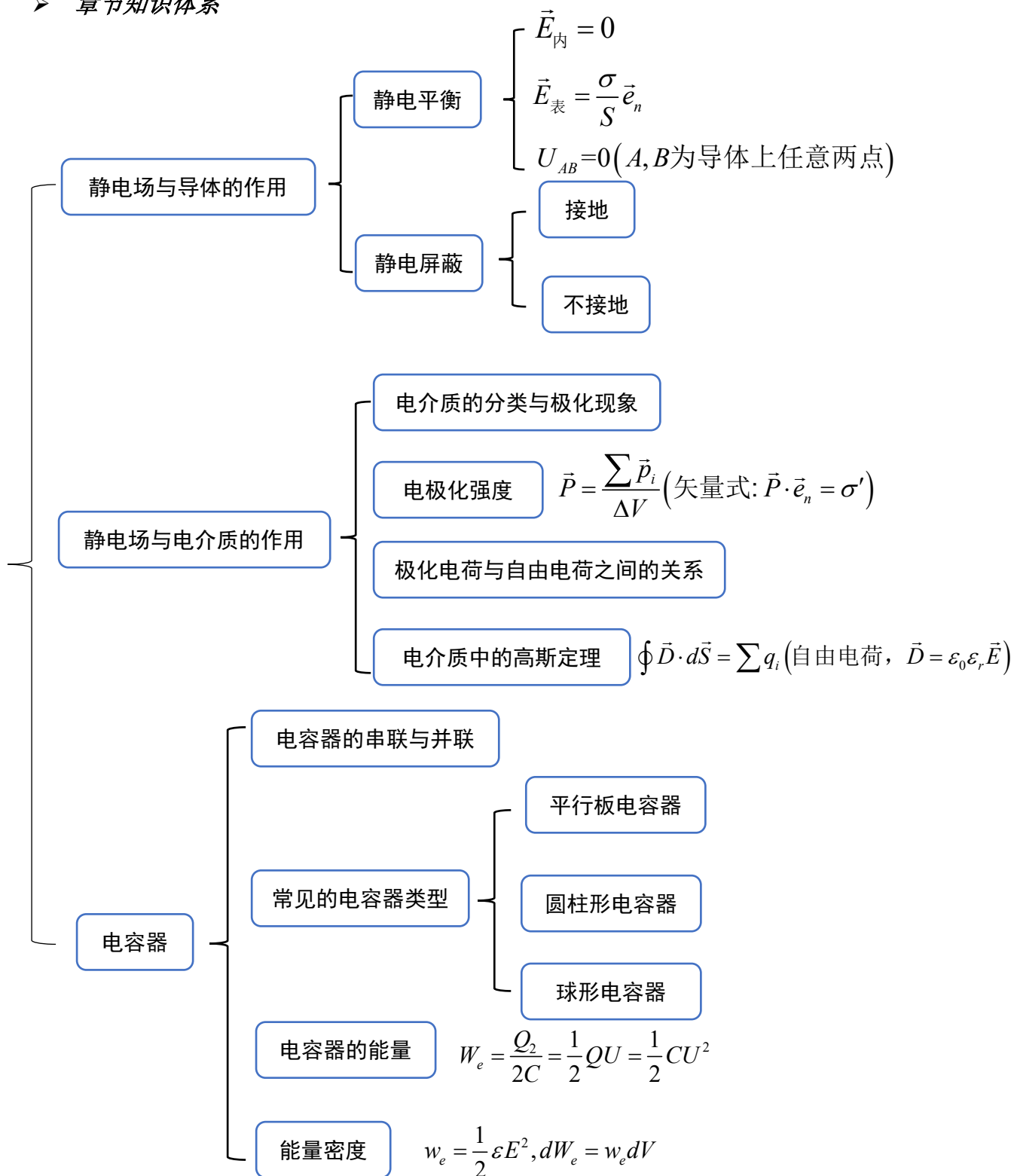
4. $\vec{E} = \frac{\lambda}{\pi^2 \varepsilon_0 R} \vec{i}$ (提示: 将薄筒看成由许多无限长直导线组成, 再利用场强叠加原理, 在坐标系下进行计算)



5. $U_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

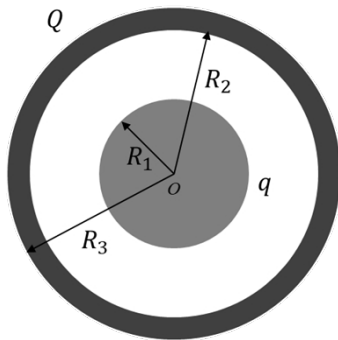
第二章 静电场中的导体与电解质

➤ 章节知识体系



➤ 典型例题

1. 半径为 R_1 的导体球带电荷 q ，球外有一个内半径为 R_2 ，外半径为 R_3 的同心导体球壳，其带电量为 Q 。试求：



- (1) 导体球电势 U_1 和球壳电势 U_2 及二者的电势差 ΔU ；
- (2) 若用导线将球与壳相连，求 $U_1, U_2, \Delta U$ ；
- (3) 若外球壳接地，求 $U_1, U_2, \Delta U$ ；
- (4) 若内球接地，求 $U_1, U_2, \Delta U$ 。

解：(1) $U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$

$$U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} \text{ (外球壳电势)}$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(球壳为一等势体，计算外球壳与内球壳的结果相同)

- (2) 用导线连接后，球与球壳在达到静电平衡后成为一等势体，电荷分布在球壳的外表面，即外表面带电量为 $Q+q$ ，而内球壳与球上的电量均为 0，将此新的电荷分布值代入(1)中的表达式，可以求得：

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

(3) 接地后, 接地的导体的电势为 0, 利用此条件确定接地后的电荷分布情况

若将外球壳接地, 假设外球壳的电荷量为 0, 而导体球和内球壳的带电量仍为 $q, -q$, 代入 U_2 的表达式中有 $U_2 = 0$, 故该电荷分布满足要求, 从而:

$$U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_3} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

(4) 假设导体球接地后带电量为 0, 而内外球壳的电荷分布不变, 代入 U_1 的表达式中有 $U_1 \neq 0$, 所以接地后导体球带电量不为 0, 设为 q' , 则内球壳带

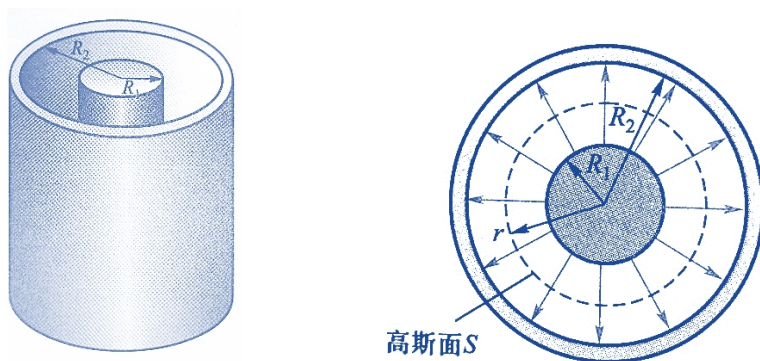
电量为 $-q'$, 外球壳带电量为 $Q - q'$, 由: $U_1 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q+q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$,

$$\text{解得 } q' = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_3 - R_1 R_2 - R_2 R_3} Q$$

$$\text{从而 } -\Delta U = U_2 = \frac{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 R_3 - R_1 R_2 - R_2 R_3}}{R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_3 - R_1 R_2 - R_2 R_3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

2. 如下图所示为的由半径为 R_1 长直圆柱导体和同轴的半径为 R_2 的薄导体圆筒组成, 在二者之间充以相对电容率为 ϵ_r 的电介质. 设长直导体和圆筒沿轴线

方向的电荷线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ ，求：(1) 电介质中的 $\vec{D}, \vec{P}, \vec{E}$ ；(2) 电介质内外表面的极化电荷面密度。



解 (1) 电荷分布是均匀对称的, 所以电介质中的电场也是柱对称的, 在 $R_1 < r < R_2$

内取一段长为 l 的高斯圆柱面, 根据电介质中的高斯定理, 有:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l = \lambda l, \quad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\text{再根据 } D = \epsilon_0 \epsilon_r E, P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E, \text{ 求得 } E = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 \epsilon_r \pi r}, P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\lambda}{2\pi r}$$

其中 $\vec{D}, \vec{P}, \vec{E}$ 三者同向, 均由内表面指向外表面

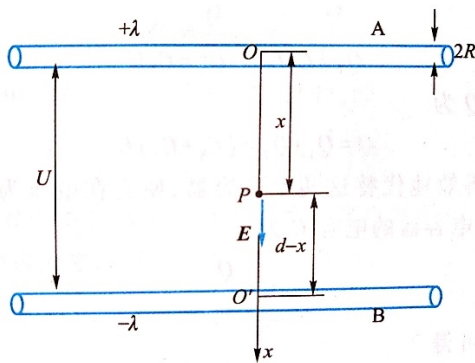
(2) 由公式 $\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$, 其中 $\vec{e}_n$ 为电介质的外法线方向, 有:

$$\text{内表面的电荷面密度 } \sigma'_1 = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\lambda}{2\pi R_1}$$

$$\text{外表面的电荷面密度 } \sigma'_2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\lambda}{2\pi R_2}$$

从上面的结果可知, 极化电荷的分布虽然不同, 但是其内外表面带的电荷量一样

3. 设有两根半径都为 R 的平行长直导线, 它们中心之间相距为 d , 且 $d \gg R$. 求单位长度的电容.



解：如上图所示，设导线 A 、 B 间的电势差为 U ，它们的电荷线密度分别为 $+\lambda, -\lambda$ 。两导线中心 OO' 连线上，距 O 为 x 处点 P 的电场强度 E 的大小为：

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x} \right) (R < x < d-R)$$

E 的方向沿 x 轴正向，两导线之间的电势差为：

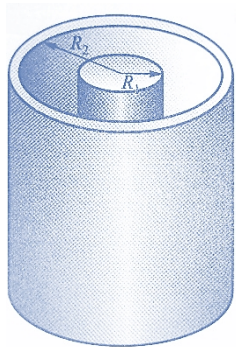
$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_R^{d-R} \left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x} \right) dx = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-R}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{R}$$

则单位长度的电容为：

$$C_l = \frac{\lambda}{U} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{R}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}}$$

4. 圆柱形电容器是由半径分别为 R_1, R_2 的两同轴圆柱导体面所构成，且圆柱体的长度 l 比半径 R_2 大得多，两圆柱面之间充满相对电容率为 ϵ_r 的电介质，内外表面的电荷线密度分别为 $+\lambda, -\lambda$ 。

- (1) 求此圆柱形电容器单位长度上的电容；
- (2) 求该电容器单位长度上所储存的能量；
- (3) 现撤去电介质，使长直导体和圆筒之间充满空气，在保证空气不被击穿的情况下，当 R_2 取何值时，该电容器储存的能量最多？并求出此时的电势差 U_m 。（已知空气的击穿场强为 E_b ）



解: (1) 电解质中的电场为: $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$

$$\text{内外表面的电势差为: } U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{于是单位长度上的电容 } C_l = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

(2) 能量密度为 $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$, 对电介质取一体积元: $dV = 2\pi r dr$

于是单位长度储存的能量为:

$$W_e = \int w_e dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(3) 若介质为空气, 内外表面之间的场强为: $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, 即 $E \propto \frac{1}{r}$

所以在内表面处场强最大, 为 $E_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R_1}$, 从而只需要保证内表面的空气不

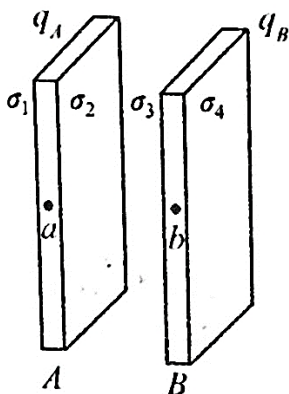
会被击穿即可 (注意此时的 R_1 为变量). 再根据(2)中的计算结果, 可以得到

$$\text{介质为空气时电容器储存的能量: } W'_e = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \pi\epsilon_0 E_b^2 R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

根据数学上取得最值的必要条件, 有 $\frac{dW'_e}{dR_1} = 0$

$$\text{即 } \pi\epsilon_0 E_b^2 R_1 \left(2 \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) = 0, R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{e}}, \text{ 从而 } U_m = \frac{E_b R_2}{2\sqrt{e}}$$

5. 如下图所示, 两个平行等大的导体板 A, B , 板长比板的厚度和两极板间距大很多, 两板分别带电 q_A 和 q_B , 求两导体板各面的电荷分布.



解 由导体的静电平衡可知, 导体上的电荷只能分布在两极板的四个表面, 设四个表面的电荷面密度分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, 根据电荷守恒定律:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_2)S &= q_A \\ (\sigma_3 + \sigma_4)S &= q_B \end{aligned} \right\} \text{ (①)}$$

在板内部分别取 a, b 两点, 由静电平衡条件可知 $E_a = E_b = 0$, 再根据场强叠加原理, 有(假设均带正电, 并规定向右为正):

$$\left. \begin{aligned} E_a &= \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \\ E_b &= \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ (②)}$$

联立①②; 两个方程可得: $\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A + q_B}{2S}, \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_A - q_B}{2S}$

即两板相对的两面总是带等量异号电荷, 而外侧的两面总是带等量同种电荷. 这一结论对两个无限大平行导体薄板上电荷的分布规律具有普遍性, 不论 q_A 和 q_B 带何种电荷, 在静电平衡条件下均成立. 下面就几种特殊的情况做出讨论:

① 两个板带等量异号电荷, 即 $q_A = -q_B = q$, 则由上面的结论可知:

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0, \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q}{S}$$

平行板电容器充电后，两板所带的电荷全部集中在相对的两面上，电场也只存在两极板间的区域；

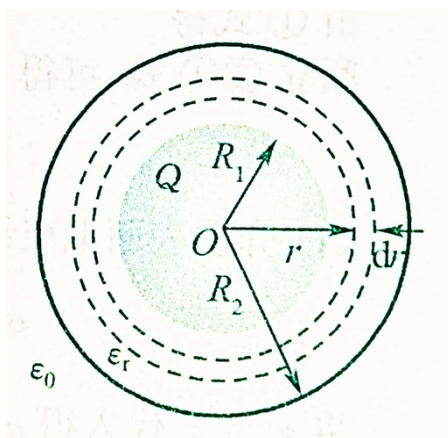
- ② 两个板带等量同种电荷，即 $q_A = q_B = q$ ，则由上面的结论可知：

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q}{S}, \sigma_2 = -\sigma_3 = 0$$

此时电荷集中在相背的两面上，两板间的区域的场强处处为零；

- ③ 只有一板带电荷，设 $q_B = 0$ ，则有 $\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A}{2S}, \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_A}{2S}$ ，此时带电板的电荷均匀分布在极板的两面，不带电的板因静电感应使板的两侧出现正负电荷。

6. 在紧贴着半径为 R_1 的金属球外同心地包着一层半径为 R_2 、相对电容率为 ϵ_r 的均匀介质球，介质球外为真空，如下图所示，已知金属球带电量为 Q ，求其电场的能量。



解：金属球所在空间的场强分布为：

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} (R_1 < r < R_2) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r > R_2) \end{cases}$$

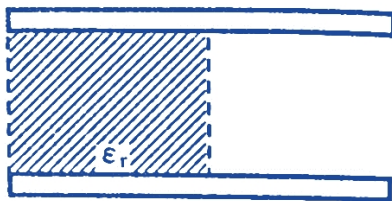
空间场的能量密度分布为：

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \begin{cases} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^4} (R_1 < r < R_2) \\ \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} (r > R_2) \end{cases}, \text{ 于是:}$$

$$\begin{aligned}
 W_e &= \int_V w_e dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^4} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{R_2} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_r R_1} - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r R_2} \right)
 \end{aligned}$$

7. 一空气平行板电容器的电容是 C_0 ，极板面积为 S ，充电时两极板的电势差为 U_0 ，而后断开电源。今将相对介电常数为 $\epsilon_r = 5$ 的介质插入电容器中，其填充宽度恰好为电容器空间的一半，如下图所示，忽略边缘效应，求：

- (1) 电容器的电容；
- (2) 电容器的能量；
- (3) 极板上的自由电荷面密度；
- (4) 电介质表面的极化电荷面密度。



解：(1) 此时的电容器可以看成是空气、介质两个电容器并联，已知平行板电容

器电容的表达式为： $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$ ，则 $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ ，于是：

$$C_{\text{介}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{2}}{d} = \frac{\epsilon_r C_0}{2}, C_{\text{空}} = \frac{\epsilon_0 \frac{S}{2}}{d} = \frac{C_0}{2}$$

总电容为： $C = C_{\text{介}} + C_{\text{空}} = \frac{\epsilon_r C_0}{2} + \frac{C_0}{2} = 3C_0$

(2) 断电后，电容器的带电量不变，所以根据公式 $W = \frac{Q^2}{2C}$ ，可以得到：

$$W = \frac{(C_0 U_0)^2}{2 \times 3C_0} = \frac{1}{6} C_0 U_0^2$$

(3) 空气和介质的两个电容器是并联的，故二者的电势差相同，又极板间距相同，故场强也相同，即 $E_{\text{空}} = E_{\text{介}} = \frac{U}{d}$

根据有电解质的高斯定理, 有: $E_{\text{空}} = \frac{\sigma_{\text{空}}}{\varepsilon_0}, E_{\text{介}} = \frac{\sigma_{\text{介}}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$, 解得 $\sigma_{\text{介}} = \varepsilon_r \sigma_{\text{空}}$

另外, 再根据电荷守恒定律, 有: $(\sigma_{\text{介}} + \sigma_{\text{空}}) \frac{S}{2} = Q = C_0 U_0$

联立可解得 $\sigma_{\text{介}} = \frac{2C_0 U_0 \varepsilon_r}{(1 + \varepsilon_r) S} = \frac{5C_0 U_0}{3S}, \sigma_{\text{空}} = \frac{2C_0 U_0}{(1 + \varepsilon_r) S} = \frac{C_0 U_0}{3S}$, 可见插入电介质

后的极板所在的自由电荷密度要大, 因为本身电介质插入后被极化后产生的电场对原电场产生一种削减, 为了维持电压 (电场) 相等的条件, 极板上的电荷便重新分布.

(4) 介质表面的束缚电荷面密度大小为:

$$\sigma' = P = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_r E = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{5C_0 U_0}{3S} = \frac{4C_0 U_0}{3S}$$

注: 关于电容器类的问题, 主要涉及下面几个方面:

(1) 电容器的电容的计算:

- ① 定义式——已知带电量涉及求电势差
- ② 串、并联算法——电介质不完全充满平行板电容器

(2) 计算电场的能量

- ① 平行板电容器—— $W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$ (结合具体条件选择公式)
- ② 其他情况, 采用能量密度的算法—— $W_e = \int_V w_e dV$ (注意体积元的选取)

(3) 计算插入电解质 (未充满) 后的电荷分布

① 极板自由电荷的分布情况

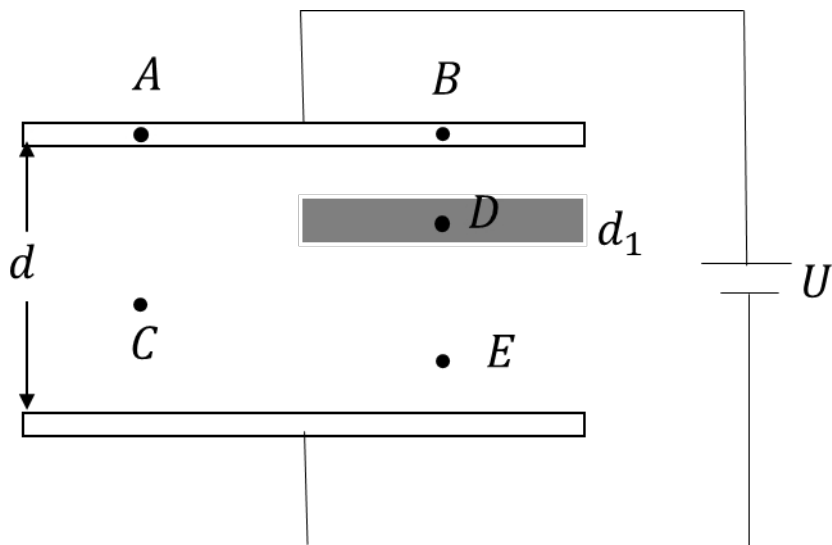
i. 如果平行板电容器断电, 即此时 Q 不变, 则首先想到的一条定律为: **电荷守恒定律**. 其次, 再观察电介质的插入情况. 如果二者的面积不等, 则可以看成两个电容器并联, 且它们的电势差相同, 再加上距离不变, 两边的电场强度也相等.

ii. 如果平行板电容器接有电源, 即此时 U 不变, 其次, 再观察电介质的插入情况. 如果二者的面积不等, 则可以看成两个电容器并联, 此时它们的

电势差相同。

② 极化电荷密度的求法: $\sigma = P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E$

8. 一平行板电容器, 其两极板间的间距为 d , 面积为 S , 其中放有厚度为 d_1 、面积为 $\frac{S}{2}$ 、相对电容率为 ϵ_r 的电介质, 已知极板间的电压为 U , 试求:



(1) A, B 两点的电荷面密度;

(2) C, D, E 处的电场强度;

解: (1) C 点的场强为: $E_C = \frac{U}{d}$

插入电介质的一侧, 分别作两个高斯圆柱面, 分别包含 B, D 和 B, E , 有:

$$D \cdot S = \sigma_B S, D_D = \epsilon_0 \epsilon_r E_D, D_E = \epsilon_0 E_E, \text{ 从而 } E_D = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0 \epsilon_r}; E_E = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0}$$

根据关系式:
$$\begin{cases} U = E_C d = \frac{\sigma_A}{\epsilon_0} \\ U = E_D d_1 + E_E (d - d_1) = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0 \epsilon_r} d_1 + \frac{\sigma_B}{\epsilon_0} (d - d_1) \end{cases}, \text{ 解得:}$$

$$\begin{cases} \sigma_A = \frac{U \epsilon_0}{d} \\ \sigma_B = \frac{U \epsilon_0 \epsilon_r}{\epsilon_r d + (1 - \epsilon_r) d_1} \end{cases}$$

$$\text{显然, } \sigma_B = \frac{U \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\varepsilon_r d + (1 - \varepsilon_r) d_1} = \frac{U \varepsilon_0}{d} \cdot \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + (1 - \varepsilon_r) \frac{d_1}{d}} = \frac{U \varepsilon_0}{d} \left(1 + \frac{(\varepsilon_r - 1) \frac{d_1}{d}}{\varepsilon_r + (1 - \varepsilon_r) \frac{d_1}{d}} \right),$$

即在插有电介质对应的面板上的自由电荷密度更大(可与例 7(4)的结果比较)

(2) 由(1)可得, C, D, E 处的电场强度分别为:

$$\begin{cases} E_C = \frac{U}{d} \\ E_D = \frac{U}{\varepsilon_r d + (1 - \varepsilon_r) d_1} \\ E_E = \frac{U \varepsilon_r}{\varepsilon_r d + (1 - \varepsilon_r) d_1} \end{cases}$$

9. 共轴的两导体圆筒, 内筒的外半径为 R_1 , 外筒的内半径为 R_2 ($R_2 < 2R_1$), 其间有两层均匀电介质, 内层电介质的电容率为 ε_1 , 外层电介质的电容率为 $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}$, 两层介质的交界面是半径为 R 的圆柱面. 已知两种电介质的击穿场强相等, 都为 E_m . 试证明: 两导体圆筒间的最大电势差为 $U_m = \frac{1}{2} R E_m \ln \frac{R_2^2}{R R_1}$.

证明: 由有介质的高斯定理, 得介质中的电位移矢量为 $\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r$, 则场强分布:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_1 r} \vec{e}_r & (R_1 < r < R) \\ \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_2 r} \vec{e}_r & (R < r < R_1) \end{cases}$$

对两种介质的击穿场强做一个比较, 有: $\frac{E_{2m}}{E_{1m}} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_2 R} \cdot \frac{2\pi \varepsilon_1 R_1}{\lambda} = \frac{\varepsilon_1 R_1}{\varepsilon_2 R} = \frac{2R_1}{R}$

已知 $R_2 < 2R_1$, 所以有 $E_{2m} > E_{1m}$, 也即当 $E_{2m} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_2 R} < E_m$ 时, 两层介质

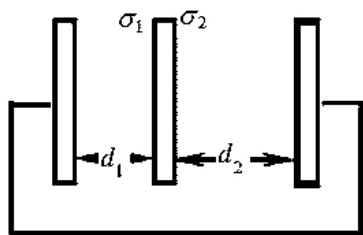
都

不会被击穿, 故最大线密度为 $\lambda_m = 2\pi \varepsilon_2 R E_m$, 于是两圆筒间的电势差为:

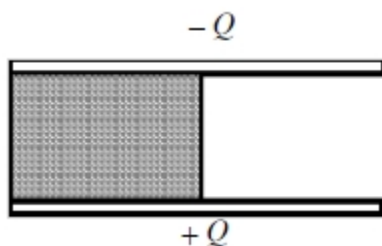
$$\begin{aligned}
 U_m &= \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^R \frac{\lambda_m}{2\pi\epsilon_1 r} \cdot dr + \int_R^{R_2} \frac{\lambda_m}{2\pi\epsilon_2 r} \cdot dr \\
 &= \frac{1}{2} RE_m \ln \frac{R}{R_1} + \frac{1}{2} RE_m \ln \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} RE_m \ln \frac{R_2^2}{RR_1}
 \end{aligned}$$

➤ 章节小练习

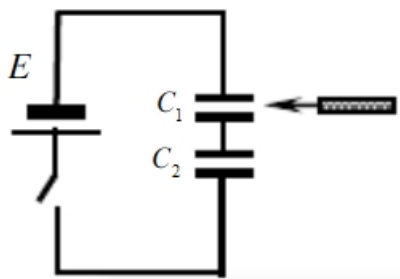
1. 三块互相平行的导体板之间的距离 d_1, d_2 比板面积线度小得多, 如果 $d_2 = 2d_1$, 外面二板用导线连接, 中间板上带电。设左右两面上电荷面密度分别为 σ_1, σ_2 , 如下图所示, 则 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



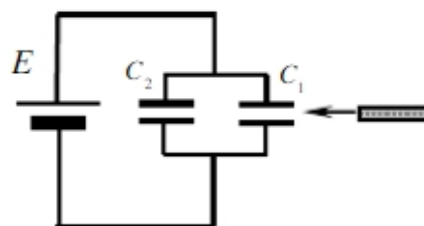
2. 两个同心薄金属球壳, 半径分别为 R_1, R_2 ($R_1 < R_2$), 已知内球壳带上电荷 Q , 则两者的电势分别为 $V_1 = \underline{\hspace{2cm}}, V_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, (选无穷远处为电势零点)。现用导线将两球壳相连接, 则它们的电势为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(结果用 V_1, V_2 表示)
3. 当平行板电容器充电后, 去掉电源, 在两极板间充满电介质, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (A) 极板上自由电荷减少
(B) 两极板间电势差变大
(C) 两极板间电场强度变小
(D) 两极板间电场强度不变
4. 一个大平行板电容器水平放置, 两极板间的一半空间充有各向同性均匀电介质, 另一半为空气, 如下图所示。当两极板带上恒定的等量异号电荷时, 其正确的结果是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



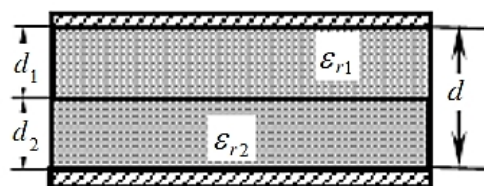
- (A) 极板左半边电荷面密度大
 (B) 左半边电介质内电场强度大
 (C) 极板右半边电荷面密度大
 (D) 左半边电介质内电场强度小
5. 一个平行板电容器, 充电后断开电源, 使电容器两极板间距离变小, 则两极板间的电势差 U , 电场强度的大小 E , 电场能量 W_e 将_____.
- (A) U 减小, E 减小, W_e 减小
 (B) U 增大, E 增大, W_e 增大
 (C) U 增大, E 不变, W_e 增大
 (D) U 减小, E 不变, W_e 减小
6. 两空气电容器电容分别为 C_1, C_2 , 串联起来接上电源充电。充满后将电源断开, 再把一电介质板插入 C_1 中, 如图所示, 则_____.
- (A) C_1 极板上电荷增加, C_2 极板上电荷减少
 (B) C_1 极板上电荷减少, C_2 极板上电荷增加
 (C) C_1 极板上电荷增加, C_2 极板上电荷增加
 (D) C_1 极板上电荷不变, C_2 极板上电荷不变
7. 电容分别为 C_1, C_2 的两空气电容器并联以后接电源充电, 在电源保持连接的情况下, 在 C_1 中插入一电介质板, 如图所示, 则_____.



- (A) C_1 极板上电荷不变, C_2 极板上电荷减少
 (B) C_1 极板上电荷不变, C_2 极板上电荷增加
 (C) C_1 极板上电荷增加, C_2 极板上电荷不变
 (D) C_1 极板上电荷减少, C_2 极板上电荷不变



8. 一平行板电容器, 其极板面积为 S , 两极的距离为 $d (d \ll S)$, 中间充有两种各向同性的均匀电介质, 其界面与极板平行, 相对电容率分别为 $\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}$, 厚度分别为 d_1, d_2 , 且 $d_1 + d_2 = d$. 如下图所示, 设两极



板上所带电荷分别为 $+Q, -Q$, 求: (1) 电容器的电容: (2) 电容器储存的能量.

答案:

1. 2 (提示: 相连的两个极板电势相同, $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{d_2}{d_1}$)
 2. $V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}, V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}, V_2$ (注意: 达到静电平衡后电荷只分布在外表面)
 3. C 4. A 5. D 6. D 7. C 8. $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S}{d_1 \epsilon_{r1} + d_2 \epsilon_{r2}}, W_e = \frac{(d_1 \epsilon_{r1} + d_2 \epsilon_{r2})^2 Q^2}{2 \epsilon_0 \epsilon_{r1} \epsilon_{r2} S}$

◆ 电介质中的几个物理量之间的关系式:

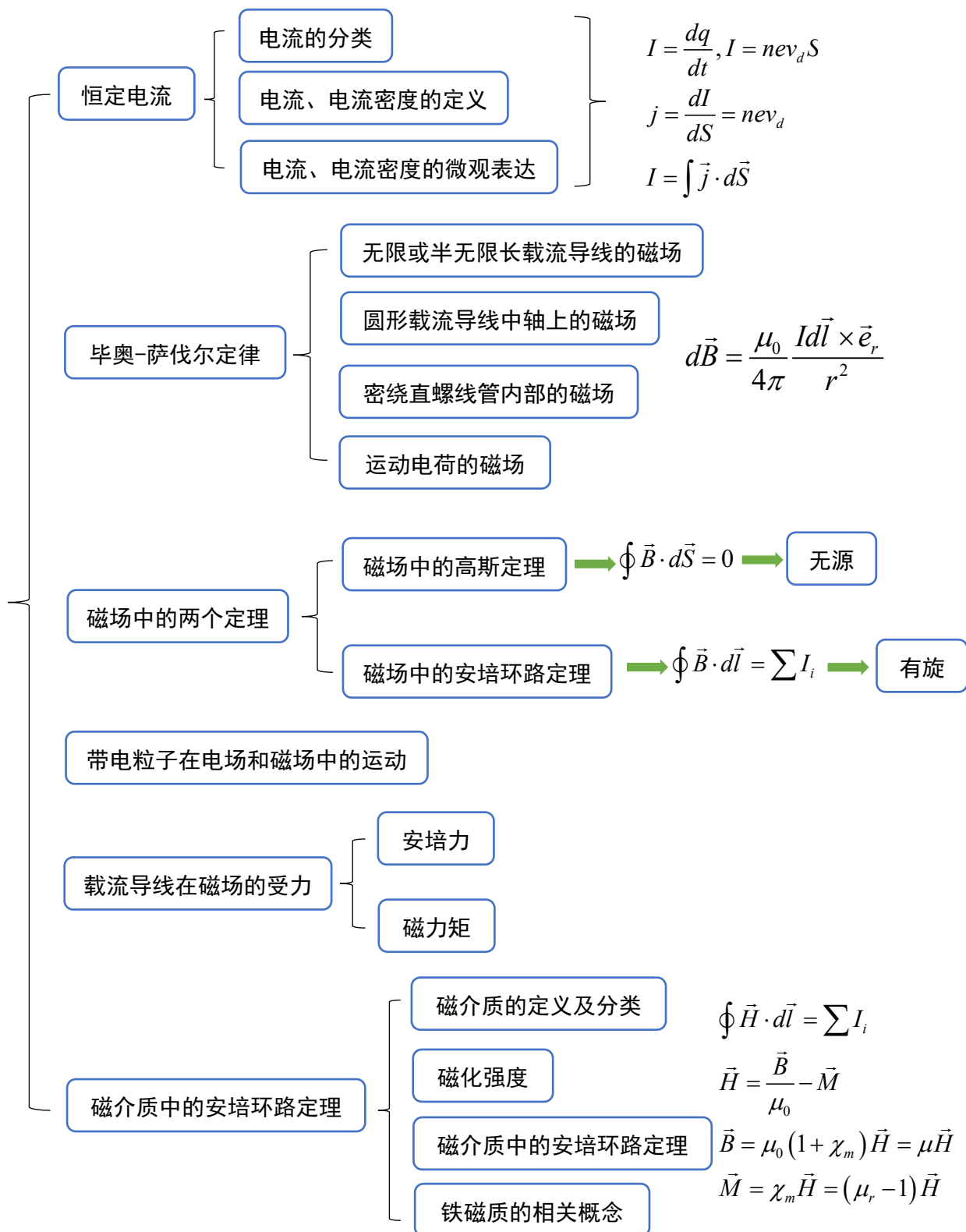
$$\begin{array}{ccc} \vec{E} & \xrightarrow{\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}} & \vec{P} \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' & & \downarrow \sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n \\ E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} & \uparrow \vec{E}' & \sigma' (q') \\ & \leftarrow E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} & \end{array}$$

◆ 平行板电容器中所涉及到的公式

$$C = \frac{Q}{U}, E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}, C = \frac{\epsilon S}{d}, U = Ed, W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

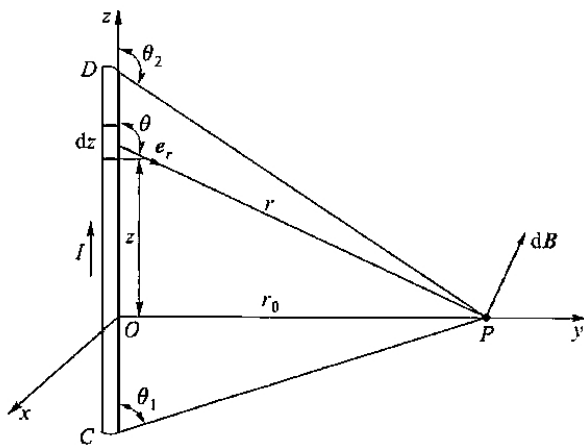
第三章 恒定磁场

➤ 章节知识体系



➤ 典型例题

1. 在真空中有一通有电流 I 的长直导线 CD , 试求此长直导线附近任意一点 P 处的磁感强度 B . 已知点 P 与长直导线间的垂直距离为 r_0 .



解: 建立如上图所示的 $Oxyz$ 空间直角坐标系, 在直线上取一电流元 Idz , 根据毕奥-萨伐尔定律, 有:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{z} \times \vec{e}_r}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \sin \theta}{r^2} \vec{i}$$

上式中 θ, r, z 均为变量, 不便于积分, 可利用几何关系对其简化.

从图中可知: $\tan \theta = -\frac{r_0}{z}, r \sin \theta = r_0$

从而 $r = \frac{r_0}{\sin \theta}, dz = d(-r_0 \cot \theta) = r_0 \csc^2 \theta d\theta$, 代入上式, 有:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(r_0 \csc^2 \theta) \sin \theta}{\left(\frac{r_0}{\sin \theta}\right)^2} \vec{i} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \sin \theta d\theta \vec{i}$$

做积分运算, 得: $\vec{B} = \int d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \vec{i} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{i}$

下面就特殊情况做出讨论:

(1) 无限长的直导线, 则有 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 那么此时空间中任意一点的磁感

应强度大小为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$;

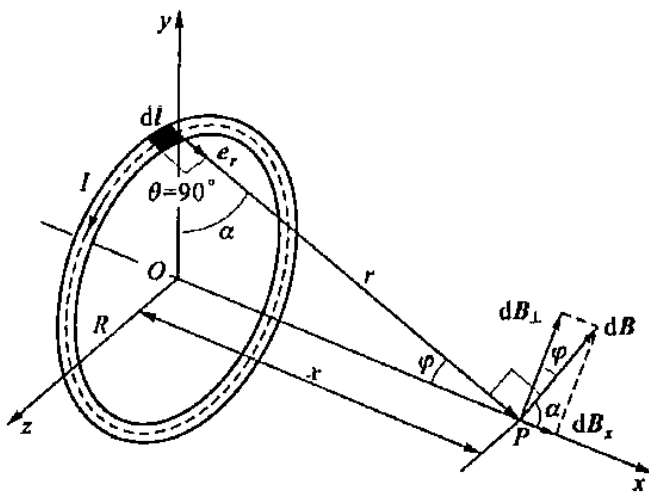
(2) 半无限长的直导线, 则有 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \pi$, 那么此时空间中任意一点的磁

$$\text{感应强度大小为 } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0};$$

对于有限长的直导线, 则应找出相应的 θ_1, θ_2 , 利用上述的公式求解.

2. 设在真空中, 有一半径为 R 的载流导线, 通过的电流为称为圆电流. 试求通过圆心并垂直于圆形导线平面的轴线上任意点 P 处的磁感强度.

解: 根据题意建立如下的空间直角坐标系.



在直导线上取一电流元 $Id\vec{l}$, 根据毕奥-萨伐尔定律, 有:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2} (\cos \alpha \vec{e}_{\parallel} + \sin \alpha \vec{e}_{\perp})$$

根据对称性, 垂直 x 轴方向的积分为 0, 从而上述的积分可化为:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2} \cos \alpha \vec{e}_{\parallel} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2} \cos \alpha \vec{i}$$

由几何关系: $\cos \alpha = \frac{R}{r} \left(r = \sqrt{R^2 + x^2} \right)$, 代入上式, 有:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \vec{i} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} \vec{i} = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi r^3} \vec{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^3} \vec{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{r^3}$$

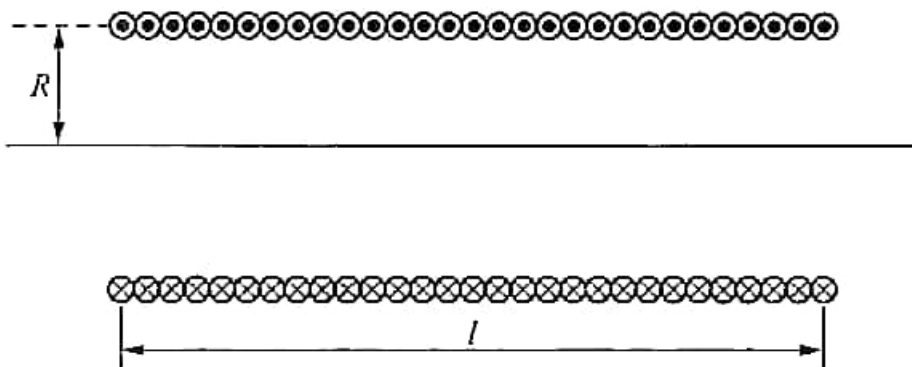
就几种情况做出讨论:

- (1) 在圆环中心处, $x = 0$, 则中心点的磁感应强度大小为: $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, 对于

一段不完整的圆弧，其中心的磁感应强度满足： $B = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R}$

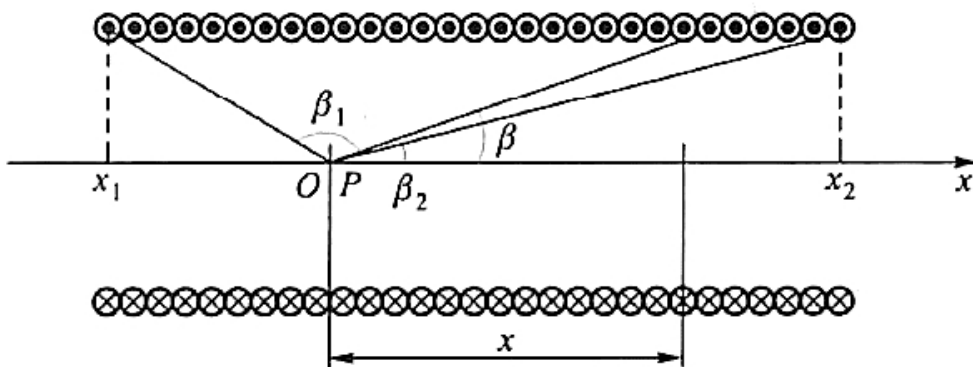
(2) 当 $x \gg R$ 时，有 $B \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{x^3}$ ，这种表达形式与电偶极矩中垂线上的电场分布表达式在形式上是一致的

3. 如下图所示，有一长为 l ，半径为 R 的载流密绕直螺线管，螺线管的总匝数为 N ，通有电流 I 。设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度。



解：建立如下图所示的 Ox 坐标系，在距离原点 O 处取一小匝长度为 dx 的线圈，它具有的匝数为 ndx ，其中 $n = \frac{N}{l}$ 表示单位长度线圈的匝数，根据例题二中的结果，这一小匝线圈在原点处产生的磁感应强度大小为：

$$dB_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{InR^2 dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



于是 $B = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0}{2} \frac{InR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx = \frac{In\mu_0}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx$ ，又根据几何知识：

$x = R \cot \beta$ ，从而 $dx = -R \csc^2 \beta d\beta$ ，上述积分可化简为： $B = -\frac{In\mu_0}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta$

从而 $B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$, 下面就几种特殊的情况进行讨论:

① 如果 P 点处于螺线管中心处:

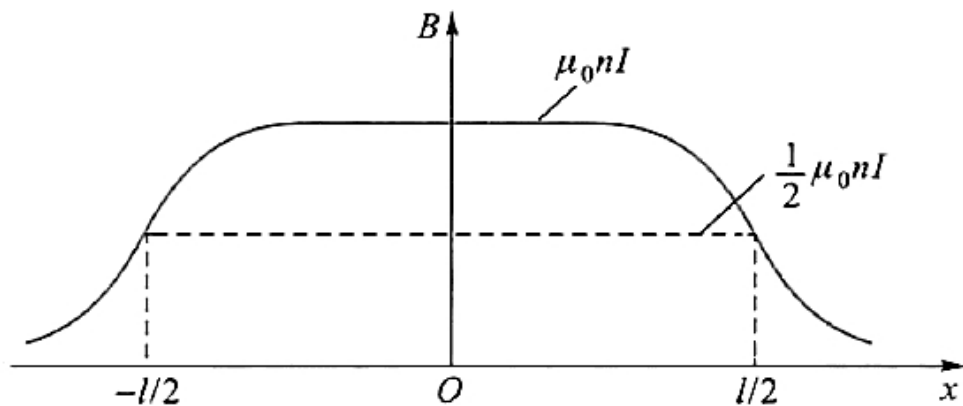
$$\beta_1 = \pi - \beta_2, \quad B = \mu_0 n I \cos \beta_2 = \mu_0 n I \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + R^2}} \xrightarrow{l \gg R \text{ 时}} \mu_0 n I$$

② 无限长情况:

$$\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0, \quad B = \mu_0 n I$$

③ 半无限长情况:

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = 0; \beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{\mu_0 n I}{2}$$



4. 设半径为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为 σ (带正电), 并以角速率 ω 绕通过盘心且垂直盘面的轴转动, 求圆盘中心处的磁感强度.

解 (方法一) 把圆盘看成一圈圈的圆电流. 在圆盘上取一半径分别为 r 和 $r + dr$ 的细环带, 其所含有的电荷量为 $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$, 则细环带上的等效电流为:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \sigma \cdot 2\pi r dr = \omega \sigma r dr$$

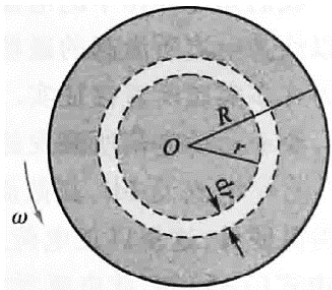
由例 2 的结论, 细环带在中心的磁感应强度为: $dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} dr$

故圆盘中心的磁感应强度为: $B = \int dB = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2}$

(方法二) 利用公式 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2}$

由题意 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dq v}{r^2} \vec{k}$ ($\vec{k}$ 垂直纸面向外), $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr, v = \omega r$

从而 $dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} dr$ ，结果同方法一



注：带电体运动类的题目（圆盘转动、微观粒子绕核运动等），主要考查对等效电流的理解

5. 如图为一螺绕环，环内为真空. 环上均匀地密绕有 N 匝线圈，线圈中的电流为 I . 由于环上的线圈绕得很密集，环外的磁场很微弱，可以略去不计，磁场几乎全部集中在螺绕环内. 求螺绕环内部的磁感应强度.



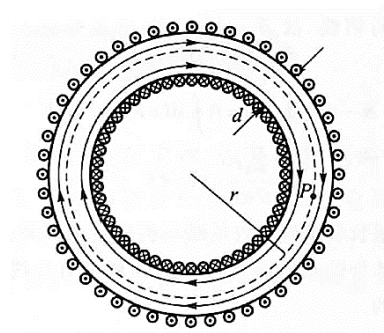
解：螺绕环内部的磁感应强度分布如右图所示：

现通过环内点 P ，以半径 r 作一圆形闭合路径. 显然闭合路径上各点的磁感强度方向都和闭合路径相切，各点 B 的值都相等. 根据安培环路定理有：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI \Leftrightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

解得 $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ 如果用 L 表示螺绕环中心线所在的圆形闭合路径的长度，那么，

圆环中心线上一点处的磁感强度为： $B = \frac{\mu_0 NI}{L} = \mu_0 nI$ (n 表示环上单位长度线圈的匝数)，当 $2r \gg d$ 时，可认为磁感应强度为该值



6. 一无限长载流直导线与一半径为 R 的圆电流处于同一平面内，它们的电流分别为 I_1 和 I_2 ，直导线与圆心相距为 d ，且 $R < d$. 求作用在圆电流上的磁场力.

解 建立如图所示的坐标系. 在圆电流上取如图所示的电流元 $I_2 d\vec{l}$. 圆电流所在处的磁感强度的方向垂直纸面向外, 电流元 $I_2 d\vec{l}$ 所在处的磁感强度的大小为:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d + R \cos \theta}$$

故电流元受到的磁场力大小为:

$$dF = BI_2 dl = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d + R \cos \theta} dl, \text{ 方向垂直 } I_2 d\vec{l} \text{ 指向}$$

圆电流外侧. 又 y 方向上的分量具有对称性, 故积分后为 0, 所以只需考虑 x 方向上的积分, 即圆电流的受力为:

$$F = \int dF_x = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{\cos \theta}{d + R \cos \theta} dl = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi} \frac{\cos \theta}{d + R \cos \theta} d\theta = \mu_0 I_1 I_2 \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}} \right)$$

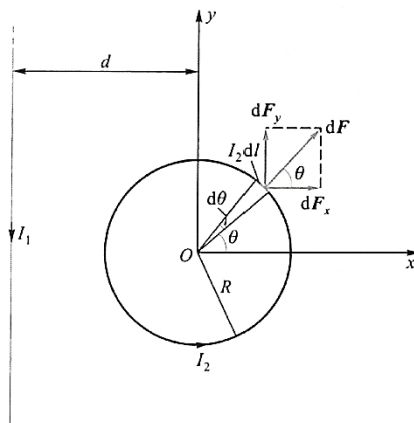
因为 $R < d$, 所以 $1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - R^2}} < 0$, 即受力指向载流直导线.

▲ 关于 $\int_0^{2\pi} \frac{R \cos \theta}{d + R \cos \theta} d\theta$ 的积分提示:

$$\int_0^{2\pi} \frac{R \cos \theta}{d + R \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d + R \cos \theta - d}{d + R \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{d}{d + R \cos \theta} d\theta, \text{ 然后关于}$$

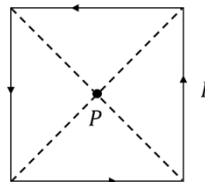
$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d + R \cos \theta} d\theta \text{ 的积分, 可以利用三角函数的积分代换万能公式, 或者转化}$$

为复变函数积分求解 (在复变函数中, 有结论: $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$)

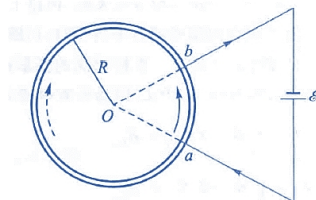


➤ 章节小练习

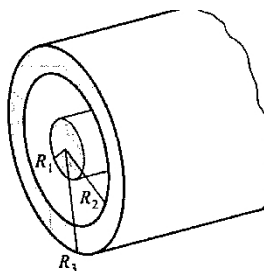
1. 如图所示, P 点到正方形各边的距离为 r_0 , 则 P 点的磁感应强度大小为_____.



2. 如图所示, 有两根导线沿半径方向接到铁环的 a, b 两点, 并与很远处的电源相连接. 则环心 O 点的磁感强度为_____.



3. 有一个半径为 R 的单匝圆线圈, 通以电流 I , 若将该导线弯成匝数 $N=2$ 的平面圆线圈, 导线长度不变, 并通以同样的电流, 则线圈中心的磁感应强度和线圈的磁矩分别是原来的_____.
- A. 4 倍和 $1/8$ B. 4 倍和 $1/2$ C. 2 倍和 $1/4$ D. 2 倍和 $1/2$
4. 某一正电荷 q 在空间中以速度 $\vec{v}$ 做匀速直线运动, 在距离该电荷 r 处的空间中任意一点 P 处的磁感应强度大小为_____.
5. 有一同轴电缆, 其尺寸如图所示. 两导体中的电流均为 I , 但电流的流向相反, R_2, R_3 之间充满相对磁导率为 μ_r 的磁介质, 求空间内的磁感应强度分布.
6. 在安培环路定理中, $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$, 其中 $\sum I_i$ 是指_____ ; $\vec{B}$ 是指_____ ; 它是由_____ 决定的.



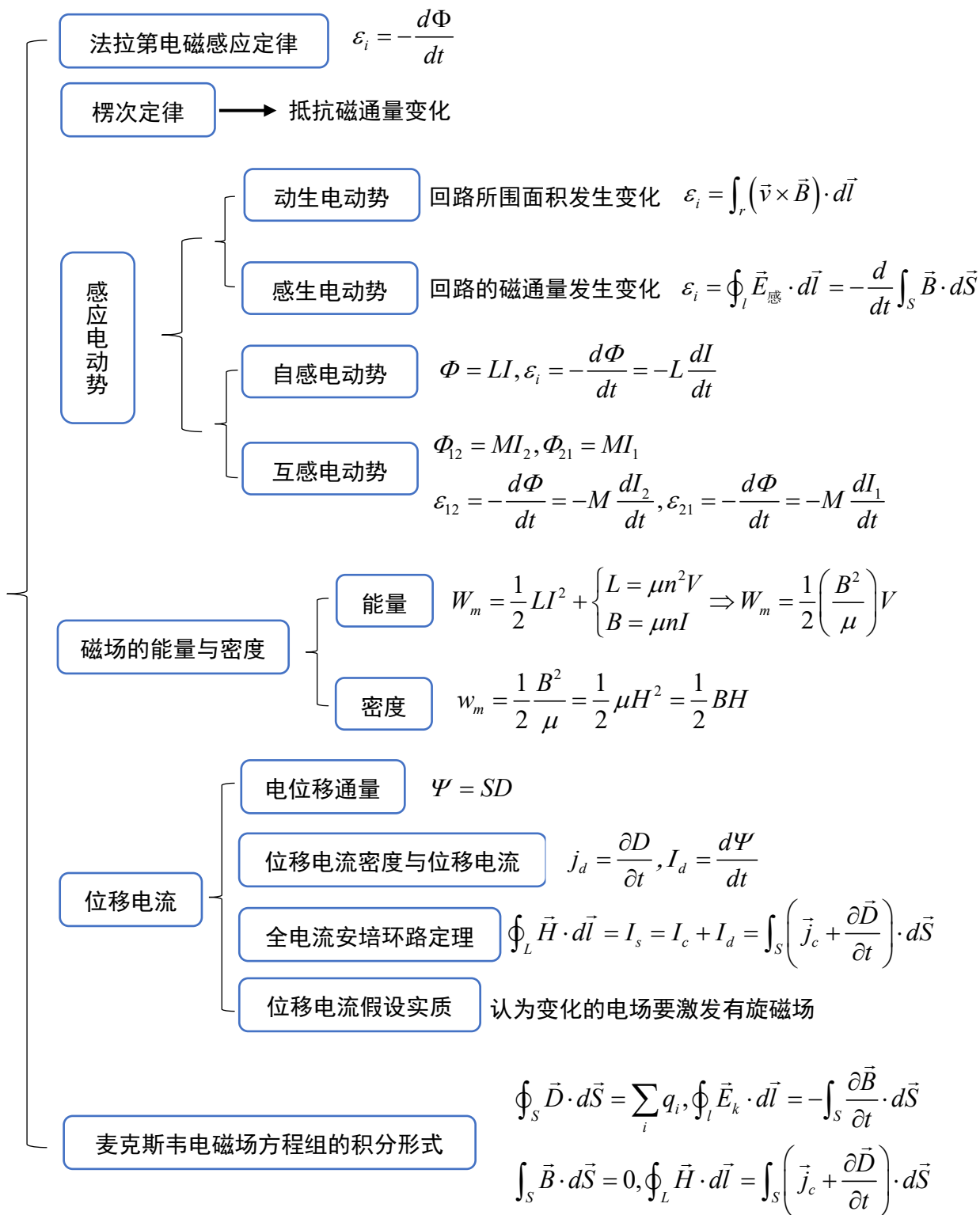
答案:

1. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi r_0}$ 2. 0 3. B 4. $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qv \sin \theta}{r^2}$
- $0 < r < R_1, B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}; R_1 < r < R_2, B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$
5. $R_2 < r < R_3, B = \frac{\mu_0 I (R_3^2 - r^2)}{2\pi r (R_3^2 - R_2^2)}, r > R_3, B = 0$

6. 环路所包围的各种稳恒电流的代数和; 环路上的磁感应强度; 环路内外全部电流所产生磁场的叠加

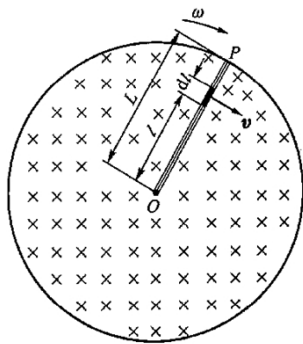
第四章 电磁感应 电磁场

➤ 章节知识体系



➤ 典型例题

1. 一根长度为 L 的铜棒，在磁感强度为 B 的均匀磁场中，以角速度 ω 在与磁场方向垂直的平面上绕棒的一端 O 作匀速转动(如下图所示)，试求在铜棒两端的感应电动势。



解：如上图所示，在铜棒上取极小的一段线元 $d\vec{l}$ ，根据动生电动势的定义，有：

$$d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = Bvdl = Bl\omega dl$$

所以 $\varepsilon_i = \int_r^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^L Bl\omega dl = \frac{1}{2}BL^2\omega$ ，动生电动势的方向由 O 指向 P ，

O 端带负电， P 端带正电，或者：

构造一个扇形虚拟回路，经过 Δt 时间转过了 $\Delta\theta$ 角度，磁通量的变化为：

$$\Delta\Phi = B\Delta S = B \cdot \frac{1}{2}L^2\Delta\theta$$

根据法拉第电磁感应定律，有 $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \cdot \frac{1}{2}L^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\frac{1}{2}BL^2\omega$

负号表示与正绕行方向相反（正绕行方向为与磁场方向构成右手螺旋）

2. 有一长直密绕螺线管，长度为 l ，横截面积为 S ，线圈的总匝数为 N ，管中磁介质的磁导率为 μ 试求其自感。

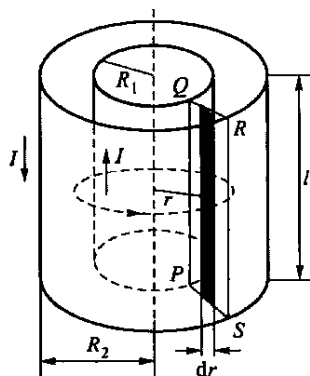
解：可以把长直密绕螺线管内的磁场近似看作是均匀的，有 $B = \mu nI$ （ n 为单位长度上线圈的匝数），于是穿过螺线管每一匝线圈的磁通量 Φ 为

$$\Phi = BS = \mu nIS$$

穿过螺线管的磁通匝数为 $N\Phi = N\mu nIS$ ，由 $N\Phi = LI$ 得自感系数

$$L = \frac{N\Phi}{I} = N\mu nS = \mu n^2 lS = \mu n^2 V$$

3. 如下图所示, 有两个同轴圆筒形导体, 其半径分别为 R_1 和 R_2 , 通过它们的电流均为 I , 但电流的流向相反. 设在两圆筒间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质. 试求其单位长度的自感.



解: 由安培环路定理, 两圆筒之间磁感应强度为: $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$

如上图所示, 在两圆筒之间取一长为 l 的面 $PQRS$, 并将此面积分成许多小

面积元, 穿过面积元 $dS = ldr$ 的磁通量为 $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bldr$

于是, 穿过面 $PQRS$ 的磁通量就为 $\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu Il}{2\pi r} dr = \frac{\mu Il}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

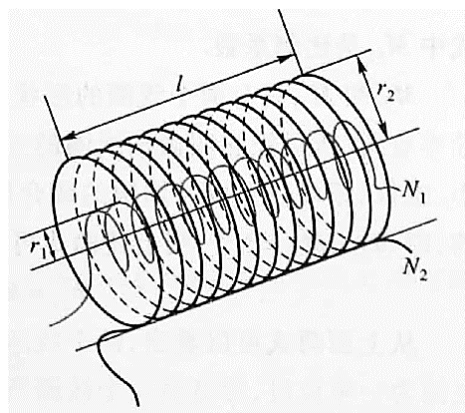
根据自感定义 $\Phi = LI$, 得单位长度的自感为: $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

4. 如图所示, 有两个长度均为 l , 半径分别为 r_1 和 r_2 (且 $r_1 < r_2$), 匝数分别为 N_1 和 N_2 的同轴长直密绕螺线管. 试计算它们的互感.

解: (1) 先计算 1 对 2 的互感. 设有电流 I_1 通过半径为 r_1 的螺线管, 此螺线管内的磁感强度为:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

因为是密绕, 所以螺线管以外的磁感应强度都为 0, 则通过 2 的磁通匝数为:



$$N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 S_1 = N_2 \mu_0 n_1 I_1 \cdot (\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 I_1 l \cdot (\pi r_1^2)$$

由互感定义得 $M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l \cdot (\pi r_1^2)$

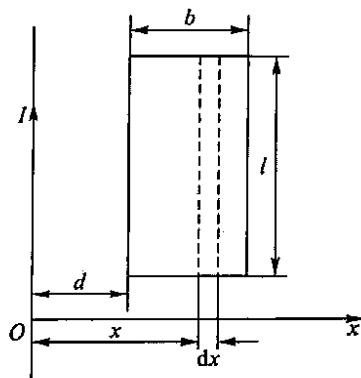
(2) 再计算 2 对 1 的互感. 设有电流 I_2 通过半径为 r_2 的螺线管, 此螺线管内的磁感强度为:

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} I_2 = \mu_0 n_2 I_2$$

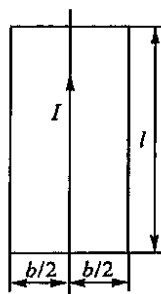
则通过 2 的磁通匝数为 $N_1 \Phi_{12} = N_1 B_2 S_1 = N_1 \mu_0 n_2 I_2 \cdot (\pi r_1^2) = \mu_0 n_1 n_2 I_2 l \cdot (\pi r_1^2)$

所以 $M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} = \mu_0 n_1 n_2 l \cdot (\pi r_1^2)$

5. 如图(a)所示, 在磁导率为 μ 的均匀无限大的磁介质中, 有一无限长直导线, 与一宽、长分别为 b 和 l 的矩形线圈处在同一平面内, 直导线与矩形线圈的一侧平行, 且相距为 d . 求它们的互感. 若将长直导线与矩形线圈按如图(b)放置, 它们的互感又为多少?



(a)



(b)

解: 在距长直导线垂直距离为 x 处的磁感强度为: $B = \frac{\mu I}{2\pi x}$

于是, 穿过矩形线圈的磁通量为

$$\Phi = \int_S B \cdot dS = \int_d^{d+a} \frac{\mu I l}{2\pi x} dx = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

故它们之间的互感为: $M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$

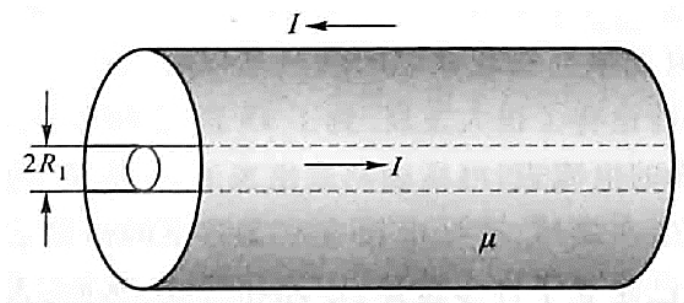
如果是图(b)的情形, 由于 $\Phi = 0$, 所以它们之间的互感为 0. 由此可见, 互感 M 与相对位置有关, 这正是在定义互感的时候所指出的.

▲ 本题可进行多种变形 (有矩形回路、三角形回路):

- ① 回路静止, 电流变化 (如 $I = I_0 \sin \omega t$);
- ② 电流不变, 回路以速率 v 向右平移;
- ③ 前两种情况均在.

(无论怎么变, 关键就是求磁通量, 对于非匀强磁场, 应该要使用 $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$)

6. 如下图所示, 同轴电缆中金属芯线的半径为 R_1 , 共轴金属圆筒的半径为 R_2 , 中间充以磁导率为 μ 的磁介质. 若芯线与圆筒分别和电池两极相接, 芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反. 设可略去金属芯线内的磁场, 求此同轴电缆芯线与圆筒之间单位长度上的磁能和自感.



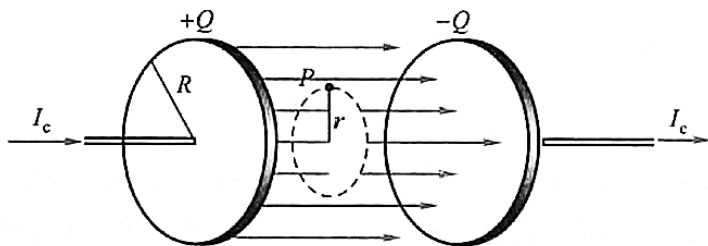
解: 由例题 3 可知, 同轴电缆芯线与圆筒之间单位长度上的自感为 $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

所以磁能 $W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ (本题也可以利用安培环路定理求出 H , 然

后利用公式 $w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$ 和 $W_m = \int_V w_m dV$ 求出磁能, 再根据 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 求出自感)

7. 有一半径为 R 的圆形平行平板空气电容器. 现对该电容器充电, 使极板上的电荷随时间的变化率, 即充电电路上的传导电流 $I_c = \frac{dQ}{dt}$. 若略去电容器的边

缘效应, 求: (1) 两极板间的位移电流; (2) 两极板间离开轴线的距离 r 处的点 P 处的磁感强度.



解: (1) 全电流是连续的, 也就是说因为电容器中有位移电流的存在, 使得电路中电流连续, 即 $I_d = I_c$.

(2) 平行板的电荷密度 $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$, 又平行板电容器之间的电场为匀强电场, 所以其电位移为 $D = \epsilon_0 E = \sigma$, 则穿过以 r 为半径的圆面积的电位移通量为:

$$\Psi = SD = \sigma \pi r^2 = Q \frac{r^2}{R^2}$$

这样, 通过圆面积的位移电流为 $I_d = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$, 而电容器之间没有传导电流, 故根据全电流的安培环路定理, 有:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_d \Leftrightarrow H \cdot 2\pi r = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt} r$$

➤ 章节小练习

- 如图 1 所示, 一根半径为 R 的无限长圆柱形载流导线, 电流 I 沿其截面均匀流过, 求长为 l 的一段导线的自感和磁能.
- 如图 2 所示, 在两平行长直载流导线内放置一矩形线圈, 两导线均通有电流

$I = I_0 \sin \omega t$, 其中 I_0, ω 均为常数, t 表示时间. 求导线框中的感应电动势.

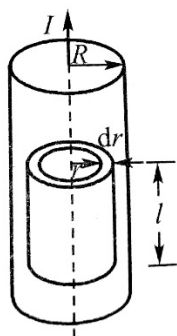


图 1

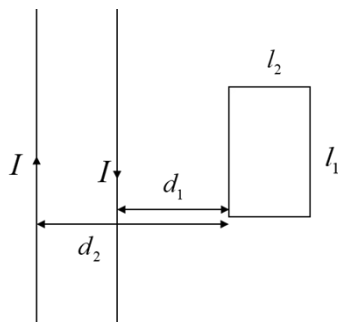
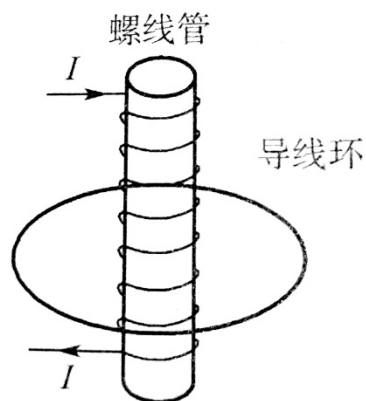


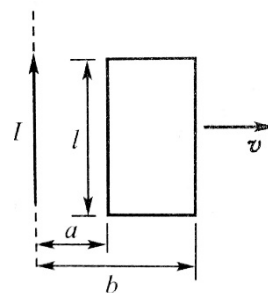
图 2

3. 如图所示, 半径为 r 的长直密绕空心螺线管, 单位长度上绕线的匝数为 n , 所加交变电流为 $I = I_0 \sin \omega t$. 今在管的垂直平面内放置一个半径为 $2r$, 电阻为 R 的导线环, 其圆心恰好在螺线管的轴心上. 求:

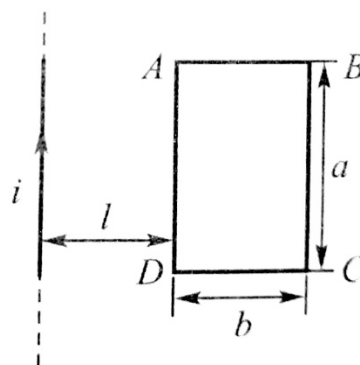
- (1) 导线环上感生电场 E_k ;
- (2) 导线环上的感应电流 I ;
- (3) 导线环与螺线管之间的互感 M .



4. 如图所示, 有一根长直载流直导线, 附近有一个与其共面且两长边与导线平行的矩形框, 以速率 v 沿远离导线的方向运动. 设 $t = 0$ 时处于图示的位置, 求
- (1) 任意时刻通过矩形框的磁通量 Φ ;
 - (2) 在图示位置矩形线圈的电动势.



5. 如图所示，一无限长的载流直导线中通有交变电流 $i = I_0 \sin \omega t$ ，旁边有一个与其共面的长方形线圈 $ABCD$ ，长为 a ，宽为 b 。求：
- (1) 穿过回路的磁通量；(2) 回路中的感应电动势。



答案：

$$1. L = \frac{\mu_0 l}{8\pi}, W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

$$2. \varepsilon_i = \frac{\mu_0 l_1}{2\pi} \left(\ln \frac{d_2 + l_2}{d_2} - \ln \frac{d_1 + l_2}{d_1} \right) I_0 \omega \cos \omega t$$

$$3. E_k = -\frac{1}{4} \mu_0 n r I_0 \omega \cos \omega t, I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\mu_0 n \pi r^2 I_0 \omega \cos \omega t}{R}, M = \mu_0 n \pi r^2$$

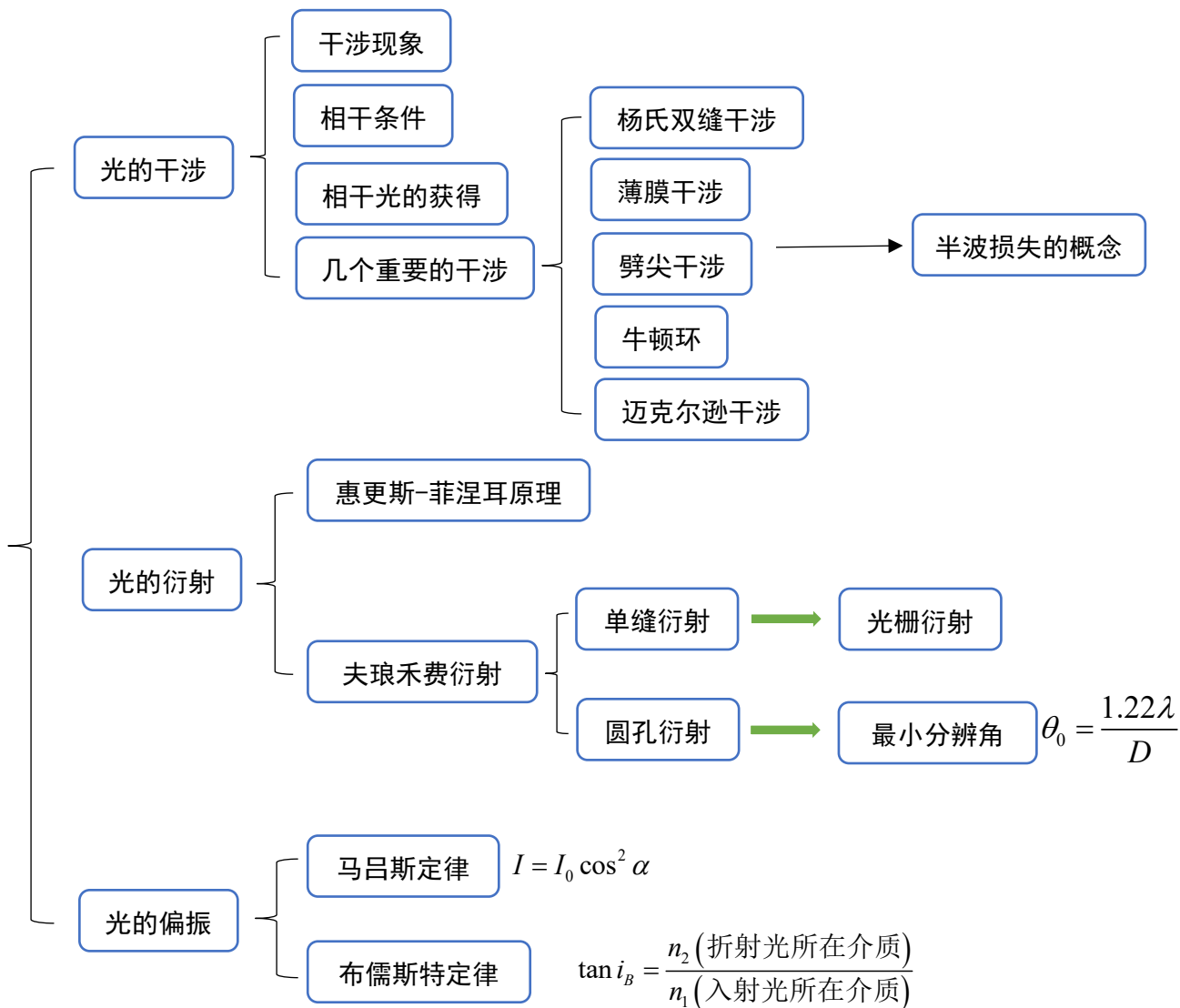
$$4. \Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{b+vt}{a+vt}, \varepsilon_i = \frac{\mu_0 I l v (b-a)}{2\pi a b}$$

$$5. \Phi = \frac{\mu_0 a I_0 \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{l+b}{l}, \varepsilon_i = \frac{\mu_0 a \omega I_0 \cos \omega t}{2\pi} \ln \frac{l+b}{l}$$

更多习题请点击：[大学物理电磁感应练习题 - 豆丁网 \(docin.com\)](http://docin.com)

第五章 光学

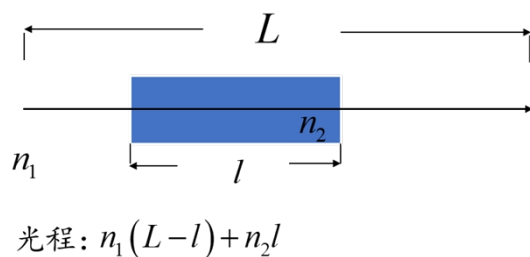
➤ 章节知识体系



➤ 原理回顾

- ◆ 获得相干光的两种方式：分振幅法和分波阵面法
- ◆ 光程的概念：考虑到在不同介质中的波长会发生变化（根据 $v = \lambda f$ ，波的频率与介质无关保持不变，而波速与介质有关会变，导致波长改变），定义光程为介质折射率 n 和几何路程 L 的乘积 nL 叫做光程，这样，就可以把单色光

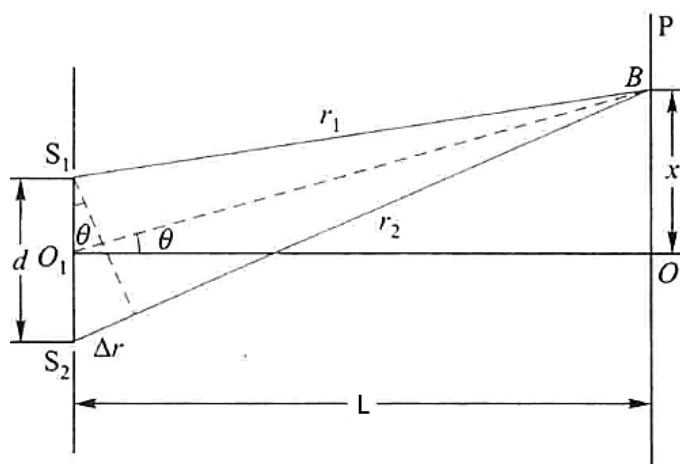
在不同介质中传播的路程都折算为其在真空中传播的光程。



- ◆ 半波损失的概念: 光从波疏介质 (折射率较小) 射入波密介质 (折射率较大) 时, 反射光的相位较入射光的相位跃变了 π (半个波长)

1. 杨氏双缝干涉

(1) 干涉原理图:



(2) 干涉结果:

S_1, S_2 两个孔发出的光到达屏上的 B 点, 它们的波程差为:

$$\Delta r = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$$

于是可得 $d \sin \theta = \begin{cases} \pm k\lambda (\text{明纹}) \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} (\text{暗纹}) \end{cases} (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ (正负号表示对称分布)

(3) 干涉特点:

① 条纹的位置与间隔

一般 θ 很小, 有近似关系: $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{L}$, 于是有:

$$x = \begin{cases} \pm \frac{L}{d} k \lambda (\text{明纹中心}) \\ \pm \frac{L}{d} (2k+1) \frac{\lambda}{2} (\text{暗纹中心}) \end{cases} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

由此还可以得到条纹间距: $\Delta x = \frac{L}{d} \lambda$

可见光的波段为 $400\text{nm} \sim 760\text{nm}$ (紫光-红光), 如果是白光入射, $x_{\text{紫光}} < x_{\text{红光}}$

② 杨氏双缝干涉是**等光强**的干涉 (明纹的光强相同)

光强: 一定时间内电场强度振幅平方的平均值。

设在杨氏双缝中两个狭缝发出的光波到达屏上任意一点 B 处的振幅分别为 A_1, A_2 , 光强为 I_1, I_2 , 那么两列光波叠加后的振幅为:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda}$$

而叠加后的光强为:

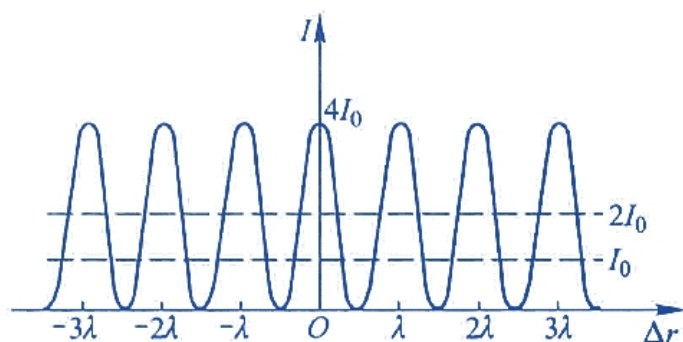
$$I = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) dt$$

$$\text{即: } I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

假设 $A_1 = A_2 = A_0, I_1 = I_2 = I_0$, 上式可以简化为:

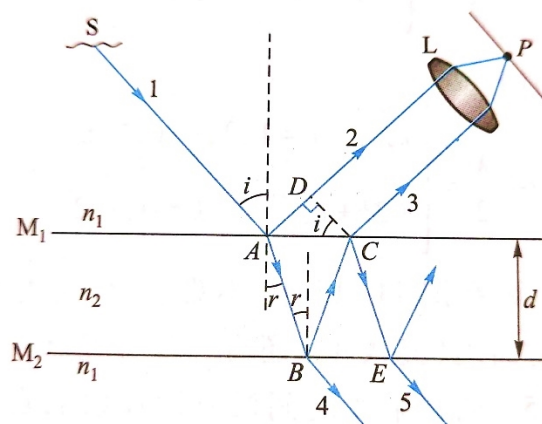
$$I = 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{\Delta r}{\lambda}\right)$$

所以由此可知, 在 $\Delta r = \pm k\lambda (k=0,1,2,\dots)$ 的地方, 光强 $I = 4I_0$, 是明条纹的最亮处; 而对应于 $\Delta r = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} (k=0,1,2,\dots)$ 的各处, 光强 $I = 0$, 是暗条纹的最暗处。



2. 薄膜干涉

(1) 干涉原理图 ($n_2 > n_1$) :



(2) 干涉结果

光线 2 和 3 的分点为 A 点, 则 2 和 3 的光程差为 (考虑半波损失) :

$$\Delta = n_2 (\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 \overline{AC} + \frac{\lambda}{2}$$

根据几何关系: $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos r}$, $\overline{AC} = 2d \tan r$

结合折射定律: $n_2 \sin r = n_1 \sin i$

所以光线 2 和 3 的光程差为: $\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$, 故:

$$2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{(明纹)} (k=1,2,3,\dots) \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{(暗纹)} (k=0,1,2,3,\dots) \end{cases}$$

对于透射光, 由于没有半波损失, 所以光程差 $\Delta' = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}$

(3) 干涉特点:

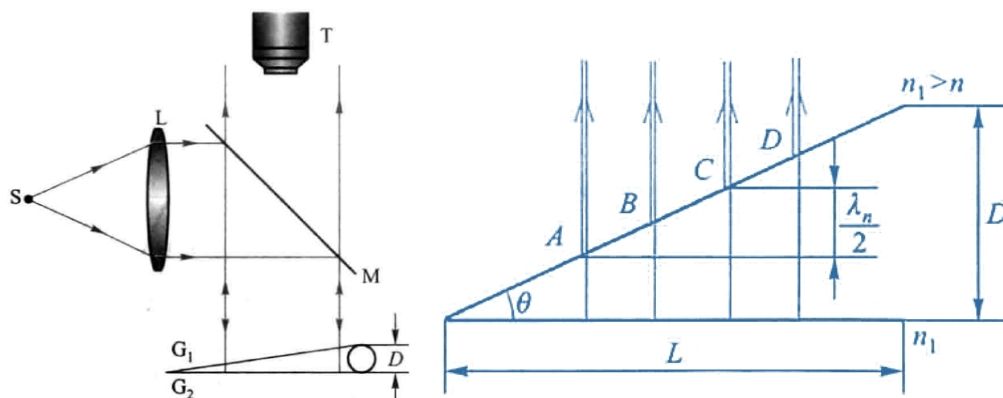
当光线垂直入射时, 有:

$$2n_2 d + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} \pm k\lambda & \text{(明纹)} (k=1,2,3,\dots) \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{(暗纹)} (k=0,1,2,3,\dots) \end{cases}$$

当 d 可变时, 视野中可以看到明暗交替变换

3. 劈尖干涉

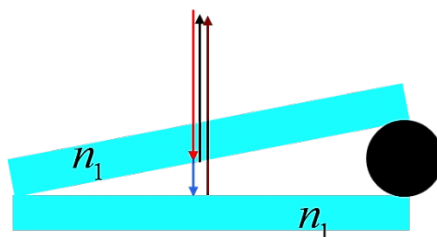
(1) 干涉原理图



(G_1, G_2 为折射率为 n_1 的玻璃板)

(2) 干涉结果

θ 实际很小, 所以在劈尖的上表面处反射的光线和在劈尖下表面处反射的光线都可看作垂直于劈尖表面, 它们在劈尖表面处相遇并相干叠加.



已知光程差为: $\Delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}$, 故干涉条纹满足

$$2nd + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & (\text{明纹}) (k=1, 2, 3, \dots) \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (\text{暗纹}) (k=0, 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

(3) 干涉特点

① 在两玻璃片相接触处(劈尖厚度 $d=0$), $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, 故在棱边处应为暗条纹;

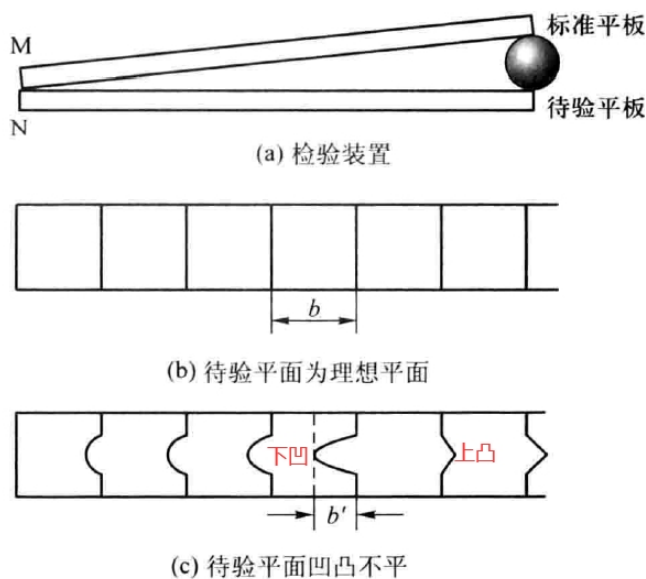
② 相邻亮(暗)条纹的纵向差:

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda_n}{2}$$

③ 相邻亮(暗)条纹的横向差:

$$\frac{\Delta d}{\Delta x} = \frac{D}{L} \Rightarrow \Delta x = \frac{L}{D} \Delta d = \frac{\lambda L}{2nD}$$

④ 可以检验精密仪器的不平整度

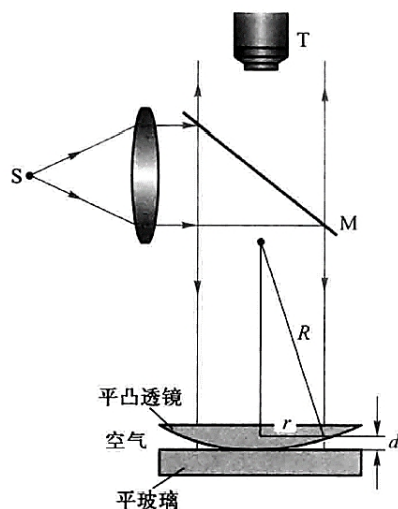


对于干涉条纹向左弯曲的部分,意味着原本应该出现某一级干涉条纹的地方,已被更高级次的干涉条纹所代替.

而干涉条纹的级次越高,对应处的薄膜厚度越大. 所以,平板上条纹向左弯曲处是下凹的. 下凹深度为 $\Delta y = \frac{b'}{b} \frac{\lambda}{2}$

4. 牛顿环

(1) 干涉原理 (与劈尖干涉类似)



(2) 干涉条纹

在厚度为 d 处, 两相干光的光程差为 $\Delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}$ (n 为空气折射率) 根据几

何关系 $(R-d)^2 + r^2 = R^2$ (R 为平凸透镜的曲率半径), 而 d 很小, 其二阶量为小

量可以忽略, 所以上式可写为: $r = \sqrt{2dR}$

结合薄膜干涉的特点, 可以得出明环半径和暗环半径:

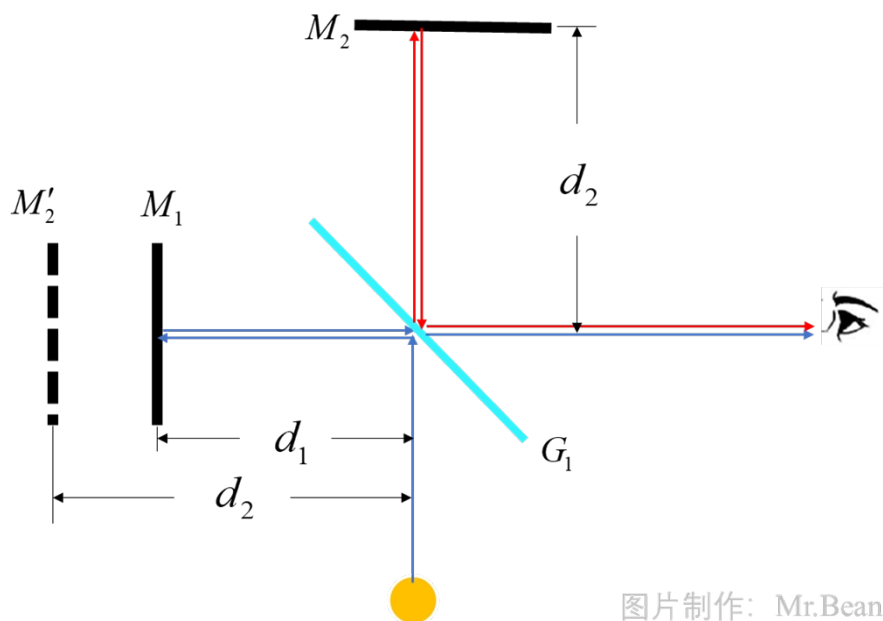
$$r = \sqrt{\left(\Delta - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{R}{n}} = \begin{cases} \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda R}{n}} \text{ (明环)} (k=1, 2, 3, \dots) \\ \sqrt{\frac{k \lambda R}{n}} \text{ (暗环)} (k=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

(3) 干涉特点

测定光波的波长、平凸透镜的曲率半径以及测定液态物质的折射率

5. 迈克尔逊干涉

(1) 干涉原理



图片制作: Mr.Bean

(2) 干涉结果

光程差为 $\Delta = 2n(d_2 - d_1)$, 所以 $2n(d_2 - d_1) = \begin{cases} k\lambda & \text{(明纹)} (k=1, 2, 3, \dots) \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{(暗纹)} (k=0, 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$

(3) 干涉特点

① 当 $M_1 \perp M_2$ 即 $M_2' \parallel M_1$ 时, 等效为薄膜干涉;

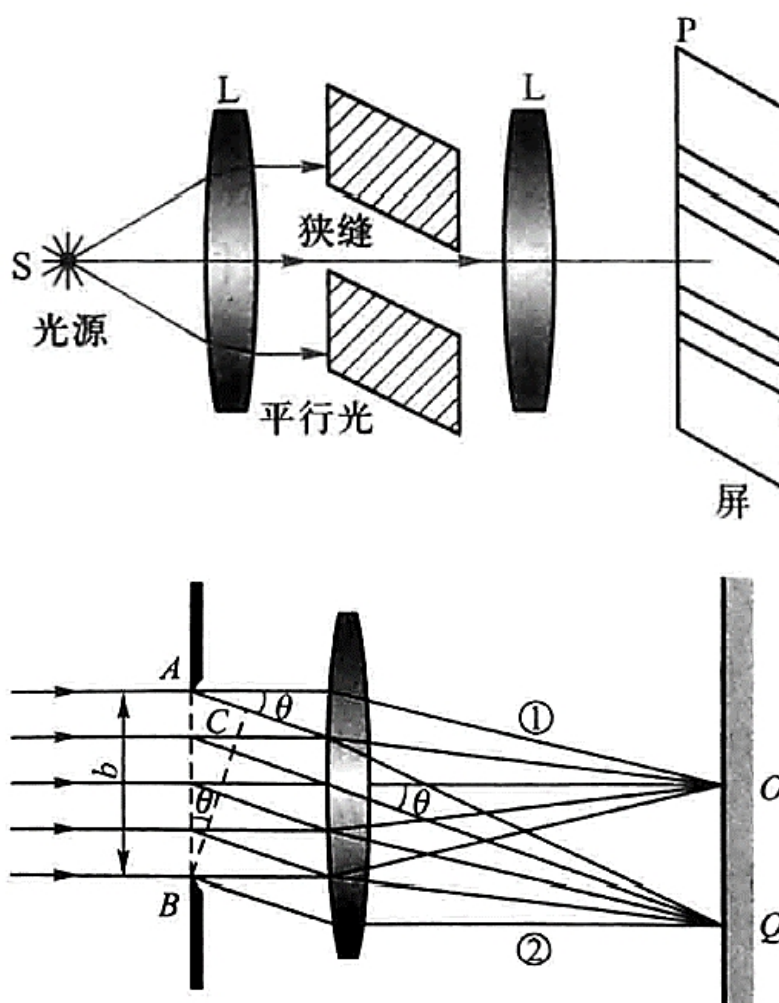
② 当 M_1, M_2 不垂直时, 等效为劈尖干涉;

③ 实验时一般固定 M_2 ($d_2 = \text{const}$), 移动 M_1 , 从而有 $\Delta d_1 = \frac{\lambda}{2n} \Delta k$ (Δd_1 为 M_1 移动的距离, Δk 为移动 M_1 过程中视场中条纹移动的数目)

6. 夫琅禾费衍射

(1) 单缝衍射

① 衍射原理



② 衍射结果分析

a) 最大光程差: $\Delta_{\max} = \overline{AC} = b \sin \theta$

b) 菲涅尔的半波带法

相邻两个波带着之间的光程相差 $\frac{\lambda}{2}$ (半个波长), 满足的关系为

$$b \sin \theta = \begin{cases} \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2} (\text{暗纹}) \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} (\text{亮纹}) \end{cases} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

偶数个半波带叠加的总效果为相消, 该结论与杨氏双缝干涉的结论相反

$k=1, 2, 3, \dots$ 是对应的条纹称为第一级明(暗)纹、第二级明(暗)纹、第三级明(暗)纹……, 没有第零级条纹的说法, 中央最亮的称为中央条纹或中央主极大。

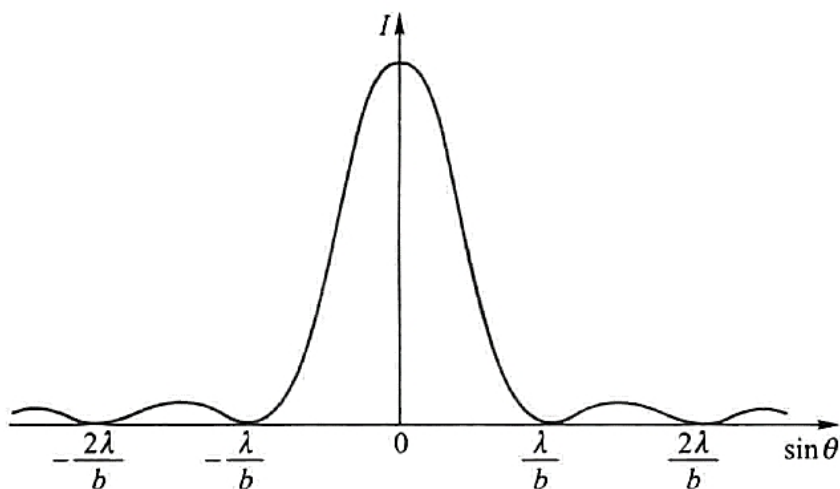
- ▲ 对于 $b \sin \theta = k\lambda$ 来说, $k=0$ 对应着 $\theta=0$, 但这却是中央明纹的中心, 不符合该式的含义. 而对于 $b \sin \theta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ 来说, $k=0$ 虽对应于一个半波带形成的亮点, 但仍处在中央明纹的范围内, 仅是中央明纹的一个组成部分, 呈现不出是个单独的明纹.

c) 条纹间距及衍射分布图

通常单缝衍射条纹的衍射角很小, $\sin \theta \approx \tan \theta$, 于是条纹在屏上距中心 O 的距离 x 可写为 $x = f \tan \theta$, 这样暗纹中心的坐标为: $x = \pm \frac{k\lambda f}{b} (k=1, 2, 3, \dots)$

两条第一级暗纹之间的宽度即为中央明纹的宽度: $\Delta x_0 = \frac{2\lambda f}{b}$

相邻暗(亮)纹之间的间距: $\Delta x = \frac{\lambda f}{b}$

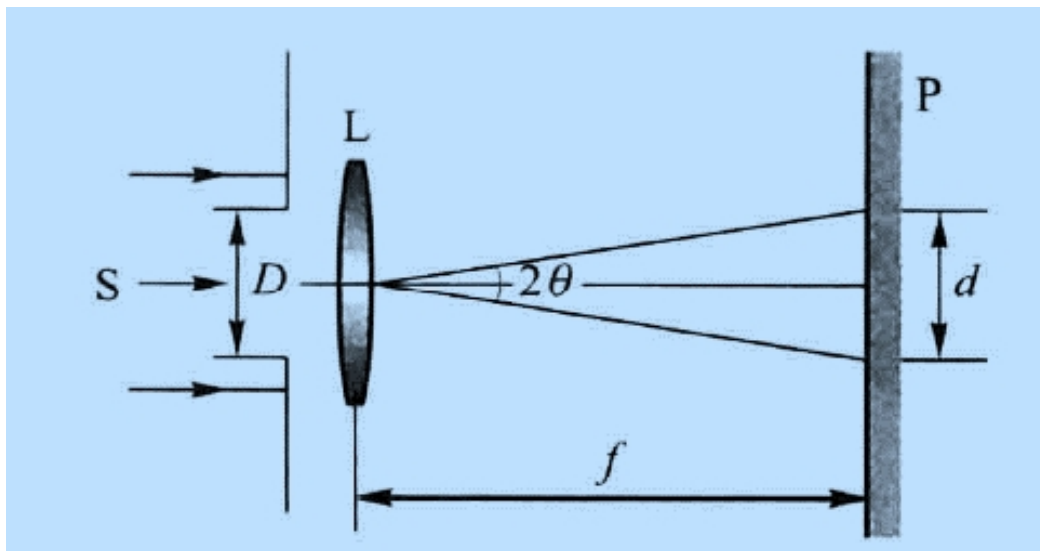
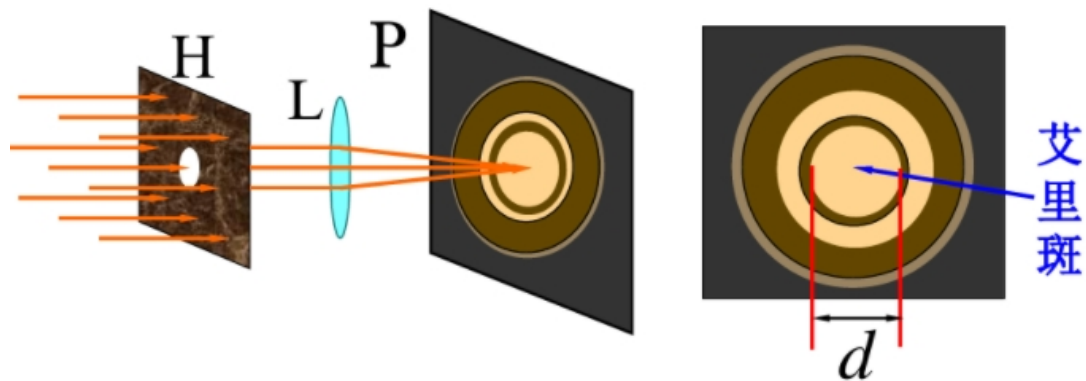


- d) 单缝的位置不会影响衍射条纹的位置和形状(屏上的中央明纹与透镜光心同

位置)

(2) 圆孔衍射

① 衍射原理



② 衍射结果分析

- a) 第一暗环所围成的中央亮光斑称为艾里斑,其能量占通过圆孔总能量的84%;
- b) 角半径: 艾里斑半径对透镜光心的张角 θ
- c) 角半径、圆孔直径、单色波长的关系: $\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$
- d) 瑞利 (Rayleigh) 判据

在恰能分辨时, 两个物点在透镜前所张的角度 θ_0 , 称为最小分辨角

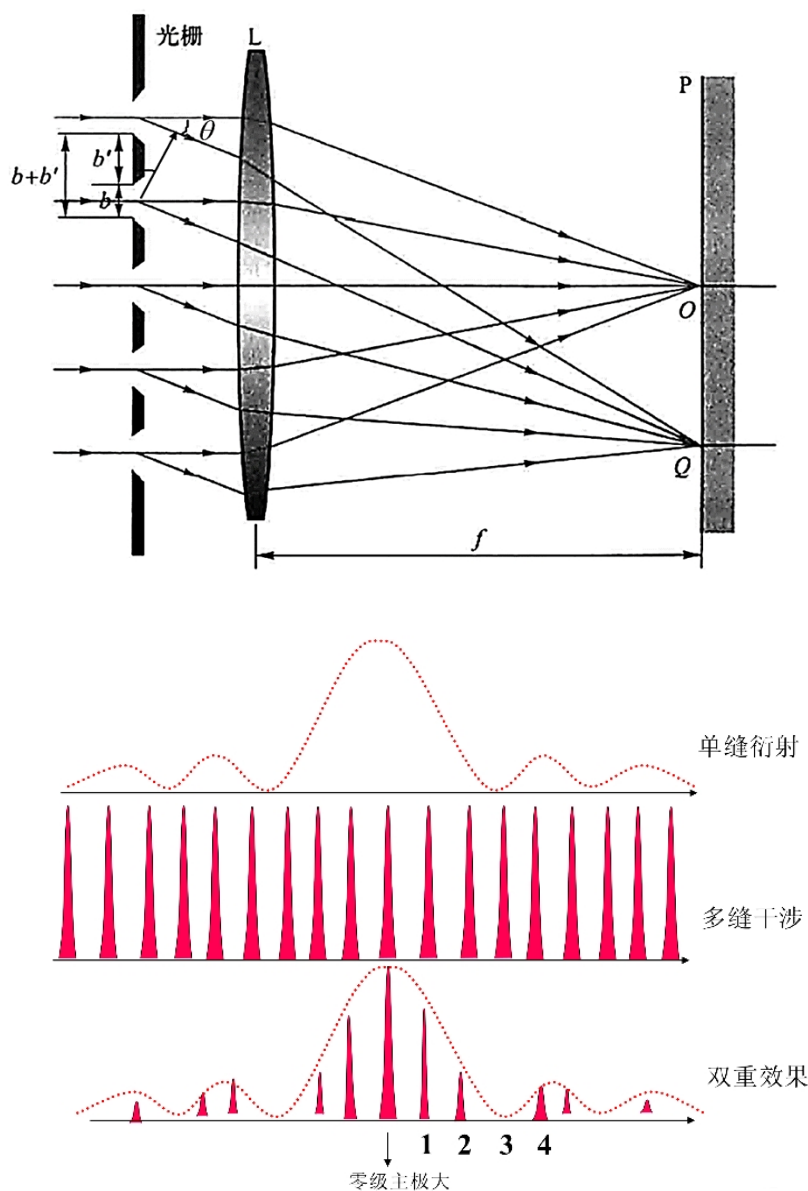
$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$R = \frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda}$ 称为光学仪器的分辨本领

由此可得提高分辨率的办法：一个是增大 D （望远镜），另一个是减小 λ （电子显微镜）

7. 光栅衍射（透射式光栅）

(1) 衍射原理——单缝衍射+缝间干涉



(2) 衍射结果分析

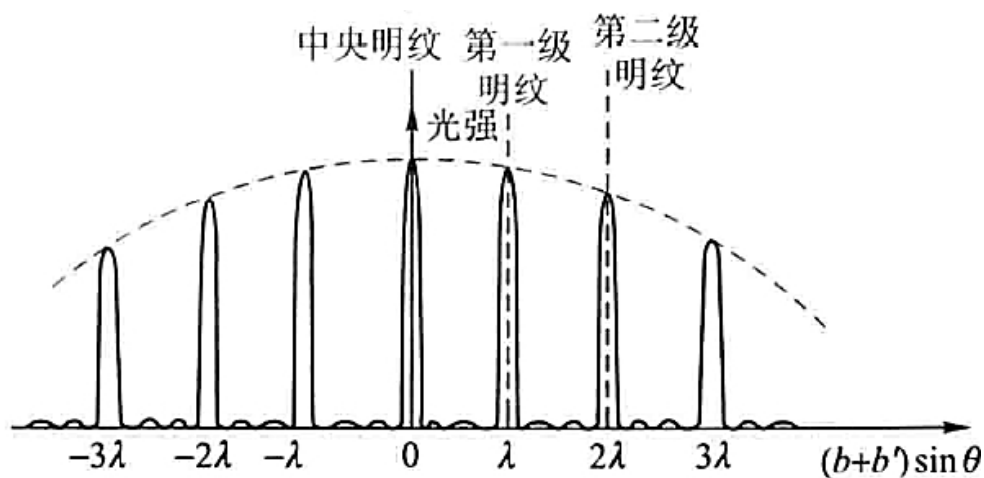
① 光栅方程

$$(b + b') \sin \theta = \pm k \lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$k = 0$ 的条纹称为中央明纹， $k = 1, 2, \dots$ 分别称为第一级、第二级……明纹，正

负号表示明纹对称分布在中央明纹两侧

② 光栅衍射的光强分布（了解）

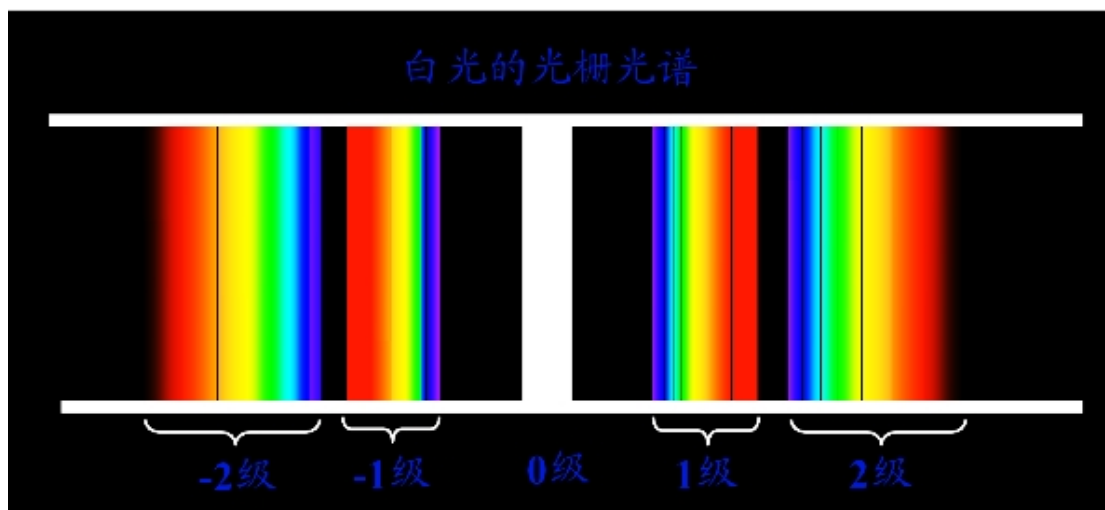


根据惠更斯-菲涅尔原理才采用积分法计算得出光栅衍射的光强表达式为：

$$I = I_0^2 \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 Nv}{v^2}$$

上式中 N 为缝数， $u = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$ ， $v = \frac{\pi (b+b') \sin \theta}{\lambda}$ ，其中 $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ 称为单缝衍射

因子， $\frac{\sin^2 Nv}{v^2}$ 称为缝间干涉因子



（白光光谱，紫色光离中央明纹近，红色光离中央明纹远）

③ 暗纹和次明纹（次级大）（了解）

假设 N 个狭缝的光振幅矢量叠加后刚好相消，采用半波带法，可知暗纹满足

的方程为: $N(b+b')\sin\theta = \pm k \frac{\lambda}{2} (k=1,2,\dots,N-1,N+1,\dots,2N-1,2N+1,\dots)$. 显

然, $k=0, N, 2N, \dots$ 为亮纹情形. 由上述方程可知, 相邻两个主极大之间有 $N-1$ 条暗纹, 然而两个暗纹之间必然不能是暗纹, 有一定光强, 叫做次极大, 可以推算出来, $N-1$ 条暗纹之间就会有 $N-2$ 个次极大.

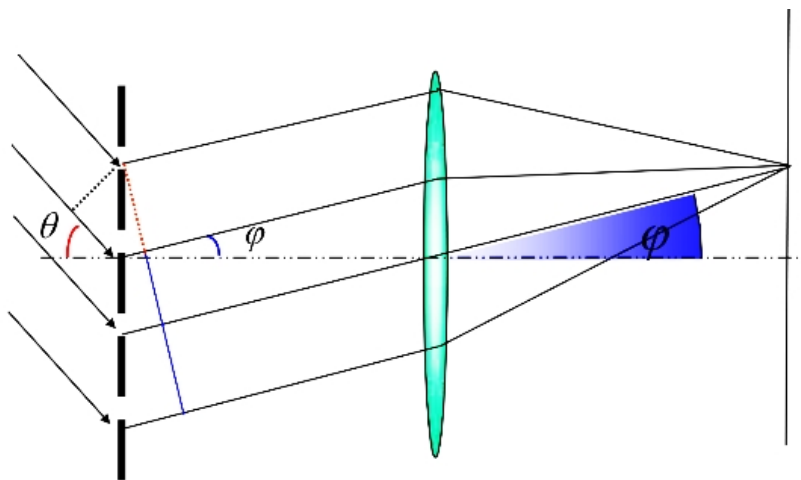
④ 光栅缺级 (考点)

当 θ 满足了光栅方程, 使干涉结果为一主明纹, 同时该 θ 恰又符合单缝衍射的暗纹条件式, 那么结果就只会是暗纹了. 这是因为, 在此方向上根本就没有衍射光射来. 所以在缺级处, 满足以下关系:

$$\begin{cases} (b+b')\sin\theta = \pm k\lambda, k=0,1,2,\dots \\ b\sin\theta = \pm k'\lambda, k=1,2,3,\dots \end{cases}$$

两式相除可得缺级条件为: $\frac{b+b'}{b} = \frac{k}{k'}$, 也就是说, 当光栅常数是缝宽的整数倍数时, 就会发生缺级现象.

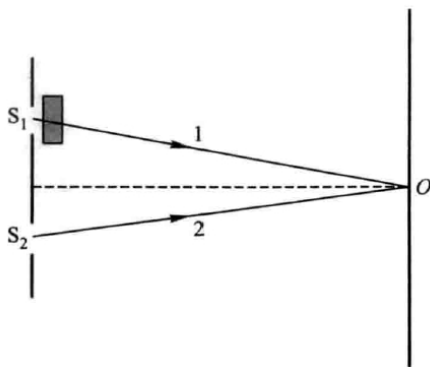
⑤ 斜入射时的光栅方程



$$\begin{cases} (b+b')(\sin\theta + \sin\phi) = \pm k\lambda, \text{法线同侧} \\ (b+b')(\sin\theta - \sin\phi) = \pm k\lambda, \text{法线异侧} \end{cases}$$

➤ 典型例题

1. 在杨氏双缝干涉实验中, 用波长 $\lambda = 550\text{nm}$ 的单色光垂直照射缝宽为 0.2mm 的双缝上. 若用一厚度为 $e = 6.6 \times 10^{-6}\text{m}$ 、折射率为 $n = 1.58$ 的云母片覆盖在上方的狭缝上, 问:



(1) 中央明纹的位置; (2) O 点出现的是明纹还是暗纹.

解: (1) 云母片厚度 e 很小, 近似认为光线在云母片中走过的几何路程是 e .

加入云母片后的光程差为:

$$\Delta = r_2 - [(r_1 - e) + ne] = r_2 - r_1 - (n-1)e = d \sin \theta - (n-1)e$$

中央明纹处 $k=0$, 且有 $\sin \theta \approx \frac{x}{L}$ 所以有 $x_{\text{中}} = \frac{(n-1)eL}{d} = 19.14\text{mm}$ (距离 O 点上方)

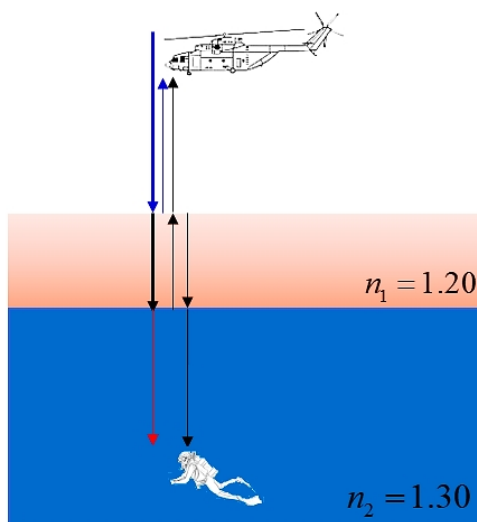
(2) 原本不加云母片, 光程差为 0, 加上云母片后, 在 O 点的光程多出了 $(n-1)e$, 令 $(n-1)e = k\lambda$, 解得 $k = 6.96 \approx 7$, 即附加的光程差为波长的整数倍, 所以 O 点仍然是亮纹

2. 有一油轮漏出的油(折射率 $n_1 = 1.20$)污染了某海域, 在海水($n_2 = 1.30$)表面形成一层薄薄的油污.

(1) 如果太阳正位于海域上空, 一直升机的驾驶员从机上向正下方观察, 他所正对的油层厚度为 460nm , 则他将观察到油层呈什么颜色?

(2) 如果潜水员恰在该区域水下, 并向正上方观察, 他看到油层呈什么颜色?

解: 这是一个薄膜干涉的问题. 太阳垂直照射在海面上, 驾驶员和潜水员所看到的分别是反射光的干涉结果和透射光的干涉结果.



- (1) 由于油层的折射率 n_1 小于海水的折射率 n_2 但大于空气的折射率, 所以在油层上、下表面反射的太阳光均发生 π 的相位跃变. 两反射光之间的光程差满足:

$$2n_1d = k\lambda \quad (k=1,2,3,\dots) \Leftrightarrow \lambda = \frac{2n_1d}{k}$$

此时反射光干涉加强, 干涉加强的波长有:

$$k=1, \lambda_1 = 2n_1d = 1104nm$$

$$k=2, \lambda_2 = n_1d = 552nm$$

$$k=3, \lambda_3 = \frac{2}{3}n_1d = 368nm$$

可见光的范围为 $400 \sim 760nm$, 而上述的 $552nm$ 在绿光可见范围内, 所以直升机驾驶员看到的是绿光

- (2) 潜水员看到的两束光的光程差满足的关系为:

$$2n_1d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (k=1,2,3,\dots) \Leftrightarrow \lambda = \frac{4n_1d}{2k-1}$$

$$k=1, \lambda_1 = 4n_1d = 2208nm$$

则 $k=2, \lambda_2 = \frac{4}{3}n_1d = 736nm$, $736nm$ 大约在红光范围, $441.6nm$ 大约在紫

$$k=3, \lambda_3 = \frac{4}{5}n_1d = 441.6nm$$

光范围, 所以潜水员看到的颜色是紫红色

3. 在圆盘形的玻璃器皿中有一薄层酒精, 其不断挥发. 用波长为 $632.8nm$ 的激光垂直照射酒精薄层, 测得其反射光强呈周期性变化, 每隔 $\Delta t = 1.0min$ 出现一

次极大值. 若玻璃器皿的半径为 5cm , 求单位时间内挥发的酒精体积. (已知酒精的折射率比玻璃大, 为 1.36)

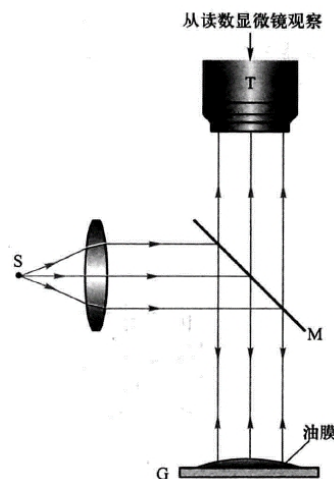
解: 由薄膜干涉的公式 $2nd + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, 两亮纹之间的距离满足 $\Delta d = \frac{\lambda}{2n}$

所以酒精薄层随时间厚度的变化率为 $-\frac{\Delta d}{\Delta t} = -\frac{\lambda}{2n\Delta t}$

故单位时间内挥发的酒精体积为

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\pi r^2 \Delta d}{\Delta t} = -\frac{\pi r^2 \lambda}{2n\Delta t} = \frac{3.14 \times 5^2 \text{cm}^2 \times 632.8 \text{nm}}{2 \times 1.36 \times 1 \text{min}} = 1.83 \times 10^{-3} \text{cm}^3 \cdot \text{min}^{-1}$$

4. 在平面玻璃片 G 上放一油滴, 并展开成球冠状油膜. 在波长 $\lambda = 600 \text{nm}$ 的单色光垂直入射下, 从反射光中可观察到油膜所形成的干涉条纹. 已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.50$, 油膜的折射率 $n_2 = 1.20$, 问当油膜中心最高点与玻璃片的上表面相距 $h = 800 \text{nm}$ 时, 干涉条纹是如何分布的? 可看到几条明纹? 明纹所在处的油膜厚度为多少?



解: 根据折射率的关系,, 可以得到两束反射光之间的光程差满足 $\Delta = 2n_2 d = k\lambda (k = 0, 1, 2, \dots)$, 因为 $d_{\max} = 800 \text{nm}$, 所以

$$k_{\max} = \left[\frac{2n_2 d_{\max}}{\lambda} \right] = 3, \text{ 故可以看到 4 条明纹, 明纹所在的厚度为:}$$

$$k = 0, d_0 = 0; \quad k = 1, d_1 = 250 \text{nm}; \quad k = 2, d_2 = 500 \text{nm}; \quad k = 3, d_3 = 750 \text{nm}$$

5. 在迈克耳孙干涉仪的两臂中, 分别插入 $l = 10.0 \text{cm}$ 长的玻璃管, 其中一个抽成真空另一个则储有压强为 $1.013 \times 10^5 \text{Pa}$ 的空气. 设所用光波波长为 546nm , 实验时, 向真空玻璃管中逐渐充入空气, 直至压强达到 $1.013 \times 10^5 \text{Pa}$ 为止. 在此过程中, 观察到 107.2 条干涉条纹的移动, 试求空气的折射率 n . (光在真空中的折射率为 1)

解: 未充空气前, 光程差为: $\Delta_1 = 2[n(d_2 - l) + l] - 2nd_1$

充入空气后，光程差为： $\Delta_2 = 2nd_2 - 2nd_1$

光程差为 $\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 = 2(n-1)l$

而干涉条纹每移动一条，对应的光程变换一个波长，由题意：

$$2(n-1)l = 107.2\lambda \Rightarrow n = 1 + \frac{107.2\lambda}{2l} = 1 + \frac{107.2 \times 546 \times 10^{-7} \text{ cm}}{2 \times 10 \text{ cm}} = 1.00029$$

6. 迎面而来的一辆汽车的两车头灯相距为 1.0 m ，问在汽车离人多远时，它们刚能为人眼所分辨？设瞳孔直径为 3.0 mm ，光在空气中的波长 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 。

解：两车灯相对瞳孔中心的张角为： $\theta = \frac{d}{s}$ ，其中 d 为两车灯之间的距离， s 为汽车与人之间的距离，根据瑞里判据，瞳孔的最小分辨角为： $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ，当 $\theta \geq \theta_0$ 时，人眼可分辨，所以临界距离：

$$s_{\min} = \frac{dD}{1.22\lambda} = \frac{1.0 \text{ m} \times 3.0 \text{ mm}}{1.22 \times 500 \text{ nm}} = 4918 \text{ m}$$

7. 波长为 600 nm 的单色光垂直入射到一平面透射光栅上，测得第 2 级主极大的衍射角为 30° ，且第三级缺级。问：

- (1) 该光栅的光栅常量 $b+b'$ 等于多少？
- (2) 透光缝的最小可能宽度 b 等于多少？
- (3) 在 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 范围内可观察到的主极大有哪些？

解：(1) 根据光栅方程

$$(b+b') \sin \theta = \pm k\lambda$$

将 $k=2, \theta=30^\circ$ 代入，求得 $b+b' = 2.4 \times 10^{-6} \text{ m}$

(2) 根据缺级条件， $\frac{b+b'}{b} = \frac{k}{k'}$ ，由题意， $k=3$ ，解得 $b = \frac{k'(b+b')}{3}$

当 $k'=1$ 时， $b_{\min} = \frac{b+b'}{3} = 8.0 \times 10^{-7} \text{ m}$

- (3) $k_{\max} = \frac{b+b'}{\lambda} = 4$ ，而第三级缺级，所以观测到的明纹为 $k = 0, \pm 1, \pm 2$
 ($k = \pm 4$ 在 $\pm \frac{\pi}{2}$ 处看不到)

8. 用 1mm 内有 500 条刻痕的平面透射光栅观察钠光谱($\lambda = 589\text{nm}$)，设透镜焦距 $f = 1.00\text{m}$ 。问：

- (1) 光线垂直入射时，最多能看到第几级光谱？
- (2) 光线以入射角 30° 入射时，最多能看到第几级光谱？
- (3) 若用白光垂直照射光栅，第一级光谱的线宽度是多少？

解：(1) 由题意可求光栅常数为： $b+b' = \frac{1\text{mm}}{500} = 2 \times 10^{-6}\text{m}$

根据光栅方程， $k_{\max} = \left[\frac{b+b'}{\lambda} \right] = 3$ ，故最多能看到 3 级光谱

(2) 斜入射时的光栅方程为： $(b+b')(\sin \theta \pm \sin \varphi) = \pm k\lambda$ ，令 $\sin \theta = 1$ ，有

$$\begin{cases} k_{\max 1} = \left[\frac{(b+b')(1+\sin \varphi)}{\lambda} \right] = 5 \text{ (法线同侧)} \\ k_{\max 2} = \left[\frac{(b+b')(1-\sin \varphi)}{\lambda} \right] = 1 \text{ (法线异侧)} \end{cases}$$

(3) 白光的波长范围为： $400 \sim 760\text{nm}$ ，根据光栅方程，有 $\theta = \arcsin \frac{\lambda}{b+b'}$

当 $\lambda_1 = 400\text{nm}$ 时， $\theta_1 = 11.5^\circ$ ；当 $\lambda_2 = 760\text{nm}$ 时， $\theta_2 = 22.3^\circ$

又 $x = f \tan \theta$ ，所以 $\Delta x = f(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = (0.41 - 0.2)\text{m} = 0.21\text{m}$

9. 两个偏振片 P_1, P_2 叠在一起，一束强度为 I_0 的光垂直入射到偏振片上，已知该入射光由强度相同的自然光和线偏振光混合而成，且入射光穿过第一个偏振片 P_1 后的光强为 $0.716I_0$ ；当将 P_1 抽出去后，入射光穿过 P_2 后的光强为 $0.375I_0$ 。求 P_1, P_2 的偏振化方向之间的夹角。

解：本题考查马吕斯定律： $I = I_0 \cos^2 \alpha$

设入射光中线偏振光的光矢量振动方向与 P_1 的偏振化方向之间的夹角为 θ_1

已知透过 P_1 后的光强为 $0.716I_0$ ，则：

$$0.716I_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}I_0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}I_0\right)\cos^2\theta_1$$

解得 $\theta_1 \approx 15^\circ$

设入射光中线偏振光的光矢量振动方向与 P_2 的偏振化方向之间的夹角为 θ_2

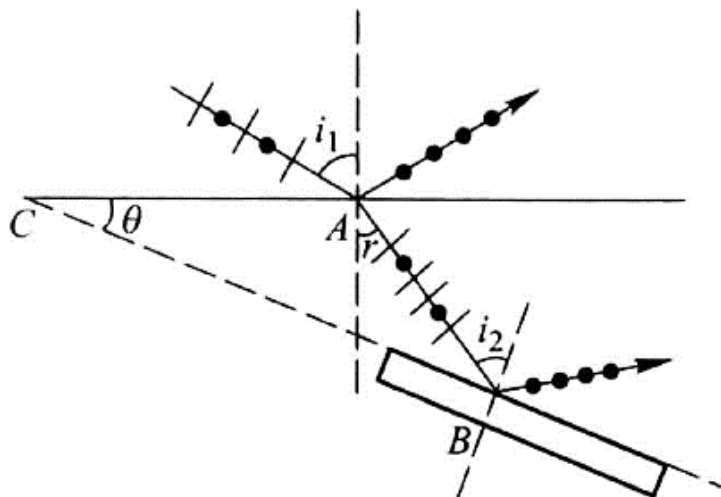
因为将 P_1 抽出去后，入射光穿过 P_2 后的光强为 $0.375I_0$ ，有：

$$0.375I_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}I_0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}I_0\right)\cos^2\theta_2$$

解得 $\theta_2 = 60^\circ$

则 P_1, P_2 的偏振化方向之间的夹角为： $45^\circ, 60^\circ$

10. 有一平面玻璃板放在水中，板面与水面夹角为 θ (如下图所示). 设水和玻璃的折射率分别为 1.333 和 1.517. 已知图中水面的反射光是完全偏振光，欲使玻璃板面的反射光也是完全偏振光， θ 角应为_____.

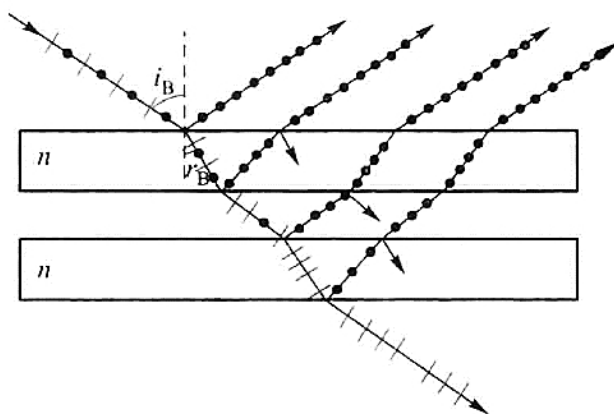


解：本题考查布儒斯特定律： $\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}, i_B + r_B = \frac{\pi}{2}$

在水面处, 有 $\tan i_1 = \frac{n_{\text{water}}}{n_{\text{air}}} = 1.333$, 解得 $i_1 = 53.1^\circ$, 从而 $r = \frac{\pi}{2} - i_B = 36.9^\circ$

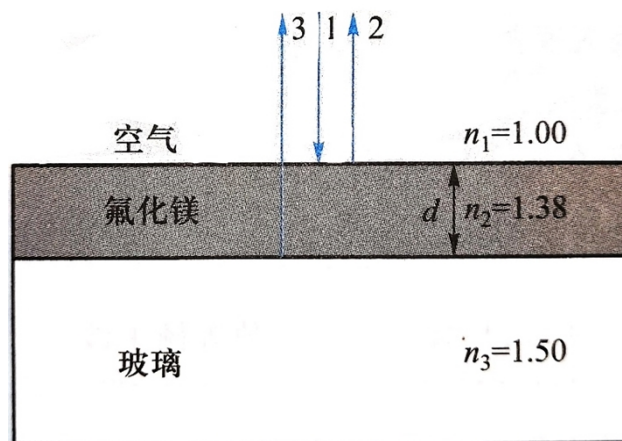
在玻璃处, 有 $\tan i_2 = \frac{n_{\text{glass}}}{n_{\text{water}}} = \frac{1.517}{1.333} = 1.138$, 解得 $i_2 = 48.7^\circ$

又根据几何关系, $r + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) + \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = i_2 - r = 48.7^\circ - 36.9^\circ = 11.8^\circ$



➤ 章节小练习

1. 照相机镜头是折射率为 1.50 的玻璃, 上面镀有折射率为 1.38 的氟化镁(MgF₂)透明介质薄膜, 若要使得垂直入射到镜头上的黄绿光(波长约 550 nm)最大限度地进入镜头(照相底片对黄绿光最敏感), 所镀的薄膜层至少应为多厚?



2. 波长为 680 nm 的平行光照射到 $L=12\text{ cm}$ 长的两块玻璃片上, 两玻璃片的一边相互接触, 另一边被厚度 $D=0.048\text{ mm}$ 的纸片隔开. 试问在这 12 cm 长度内会呈

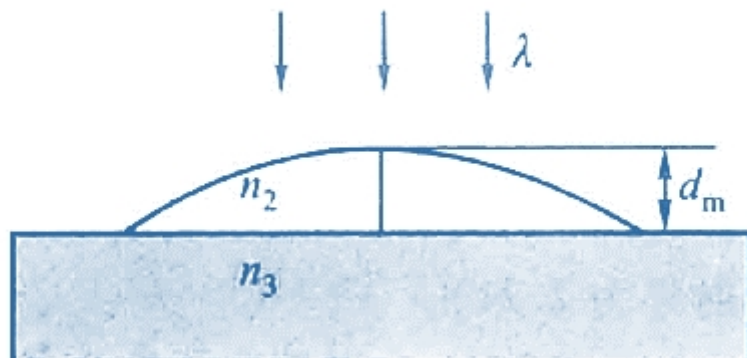
现_____条暗条纹.

3. 波长为 600 nm 的单色光垂直入射在一光栅上, 第二级主极大出现在 $\sin\varphi = 0.2$ 处, 第四级缺级. 试问:

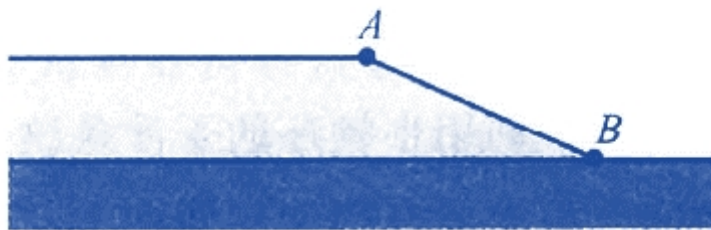
- (1) 光栅上相邻两缝的间距是多少?
- (2) 光栅上狭缝的宽度有多大?
- (3) 在 $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ 范围内, 实际呈现的全部级数是多少?

4. 如图所示, 折射率 $n_2 = 1.2$ 的油滴落在 $n_3 = 1.5$ 的平板玻璃上, 形成一上表面近似于球面的油膜, 测得油膜中心最高处的高度 $d_m = 1100\text{ nm}$, 用 $\lambda = 600\text{ nm}$ 的单色光垂直照射油膜. 问:

- (1) 油膜周边是暗环还是明环?
- (2) 整个油膜可看到几个完整暗环?



5. 集成光学中的楔形薄膜耦合器原理如图所示. 沉积在玻璃衬底上的是氧化钽 (Ta_2O_3) 薄膜, 其楔形端从 A 到 B 厚度逐渐减小为零. 为测定薄膜的厚度, 用波长 $\lambda = 632.8\text{ nm}$ 的 He-Ne 激光垂直照射, 观察到薄膜楔形端共出现 11 条暗纹, 且 A 处对应一条暗纹, 氧化钽薄膜的厚度为_____ (Ta_2O_3 对 632.8 nm 激光的折射率为 2.21).



6. 如图所示,利用空气劈尖测细丝直径, 已知 $\lambda = 589.3\text{nm}$, $L = 2.888 \times 10^{-2}\text{m}$, 测得 30 条条纹的总宽度为 $4.295 \times 10^{-3}\text{m}$, 则细丝直径 $d =$ _____.

答案:

1. 100nm 2. 142 条

3.(1) $6 \times 10^{-6}\text{m}$; (2) $1.5 \times 10^{-6}\text{m}$ or $4.5 \times 10^{-6}\text{m}$;

(3) $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 7, \pm 9$ 15 条

4.(1)明环; (2) 4 个

5. $1.4 \times 10^{-6}\text{m}$ 6. $5.75 \times 10^{-5}\text{m}$

更多光学习题, 请点击链接: <https://www.docin.com/p-860620836.html>

第六章 相对论和量子力学

➤ 章节知识体系

