

第一讲 雷诺平均与平均湍动能方程

1. 参数化

利用模式可分辨的要素描述不能显示的物理过程。模型中主要参数化次网格尺度过程的影响。需要进行参数化的物理过程有：辐射、对流、云微物理、湍流。

2. 雷诺平均

(1) 平均量和平均法则

为了分离出湍流量，首先是对资料进行平均。通常有三种平均方式：**系综平均、空间平均和时间平均**。

◆ **系综平均**：是指对在同一地点、同一时间、同样大气条件下的 N 个观测资料序列的平均值求和：

$$\bar{A}(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

$A_i(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 表示某一天在 (x_0, y_0, z_0) 处 t_0 时刻的观测值， N 表示观测的总天数。后面推导雷诺平均的运动方程时用到的就是这个法则。

◆ **空间平均**：在某一时刻对某一空间域内大量观测点的资料进行平均。

◆ **时间平均**：对空间某一固定点，取其某一时段的大量观测数据的时间序列进行平均。

假设 A 和 B 均为变量， C 为常数，常用的一些平均法则有：

$$\overline{CA} = C\bar{A}, \overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

对于微分计算，同样可以导出

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial A_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial A_N}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{N} (A_1 + A_2 + \cdots + A_i + \cdots + A_N) \right] = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

类似地，还有

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial A} \left(\frac{dA}{dt} \right) = \frac{d\bar{A}}{dt}, \int \bar{A} dt = \overline{\int A dt}, \int \bar{A} dx_i = \overline{\int A dx_i}$$

(2) 雷诺平均

任何一个变量可以分解为平均量和湍流脉动量之和，于是描述大气运动的物理变量都可写成下列形式：

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u'; v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w' \\ p = \bar{p} + p', \rho = \bar{\rho} + \rho', \theta = \bar{\theta} + \theta' \\ q = \bar{q} + q' \end{cases}$$

假设 $A = \bar{A} + a'$, $B = \bar{B} + b'$ ，按上述法则进行平均，有 $\bar{A} = \bar{A} + \bar{a}'$ ，为了使两边相等，必然有 $\bar{a}' = 0$ ，于是对于 $\overline{AB}$ ，根据上述平均法则，有

$$\overline{AB} = \overline{(\bar{A} + a')(\bar{B} + b')} = \overline{\bar{A}\bar{B} + \bar{A}b' + \bar{B}a' + a'b'} = \bar{A}\bar{B} + \overline{a'b'}$$

3. 雷诺平均后的大气动量方程组

#重要假设/近似: **Boussinesq 近似、流体不可压缩假设、浅对流假设**

(1) Boussinesq 近似下的动量方程组的形式

已知局地直角坐标系下的大气动量方程组（对于边界层，常常要考虑粘性作用）为：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_v + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_u + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

在推导的时候，我们需要用到 **Boussinesq 近似**：即与重力相联系的项中保留扰动密度，而在其他项中忽略密度扰动的影响。在动量方程中，密度项主要出现在分母中，采用 Boussinesq 近似，在 x, y 方向上的可以有 $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \approx \frac{1}{\bar{\rho}}$ 。我们下面讨论垂向的密度扰动如何出现。我们假设气压的平均量满足静力平衡

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = g$$

对 $\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'}$ 进行 Taylor 展开

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}} \approx \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)$$

于是

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} &\approx -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} \right) - g \approx \\ &-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial(p - \bar{p})}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) g \end{aligned}$$

相对于大气的风、温、压、湿这些参量，密度不易直接获得，我们可以利用状态方程将密度转为温度表示。

$$\begin{aligned} p &= \rho R_d T_v \xrightarrow{\text{取对数}} \ln p = \ln \rho + \ln T_v + \ln R_d \\ \ln(\bar{p} + p') &= \ln(\bar{\rho} + \rho') + \ln(\bar{T} + T'_v) + \ln R_d \\ &\Downarrow \\ \ln \left[\bar{p} \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}} \right) \right] &= \ln \left[\bar{\rho} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \right] + \ln \left[\bar{T}_v \left(1 + \frac{T'_v}{\bar{T}_v} \right) \right] + \ln R_d \\ &\Downarrow \text{Taylor展开} \\ \ln \bar{p} + \frac{p'}{\bar{p}} &= \ln \bar{\rho} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \ln \bar{T}_v + \frac{T'_v}{\bar{T}_v} + \ln R_d \Leftrightarrow \frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'_v}{\bar{T}_v} \end{aligned}$$

于是垂向的方程可以写成

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{p'}{\bar{p}} g + \frac{T'_v}{\bar{T}_v} g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

在浅对流假设下，压强脉动项可以忽略。可以通过尺度分析的方法证明。比较等号右边和第二项与第一项的尺度：

$$\frac{p^* g}{P} \bigg/ \frac{p^*}{\rho_0 D} \approx \frac{D}{H} \left(H = \frac{P}{\rho_0 g} \right)$$

p^* 表示扰动压强的尺度， P 表示平均压强的量级， ρ_0 表示密度的量级， D 表示运动的垂直尺度， H 表示均质大气的平均厚度即大气标高。 H 的值可以计算，大约为8km，即量级为 10^3m ，显然对于浅对流运动 $D/H \ll 1$ ，故

$$\frac{p'}{\bar{p}} \ll \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx -\frac{T'_v}{\bar{T}_v}$$

所以有关系式 $\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{T'_v}{T_v}$ ，根据位温的表达式 $\theta_v = T_v \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_p}}$ ，采用上述同样的思路，取对数、级数展开，得到

$$\frac{T'_v}{T_v} - \frac{\theta'_v}{\theta_v} = \frac{R_d}{c_p} \frac{p'}{\bar{p}} \Rightarrow \frac{T'_v}{T_v} \approx \frac{\theta'_v}{\theta_v}$$

最终，在 Boussinesq 近似、浅对流的假设条件下，垂向运动方程为

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - \left(1 - \frac{\theta'_v}{\theta_v} \right) g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

于是，在 Boussinesq 近似下的动量方程组应写为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - \left(1 - \frac{\theta'_v}{\theta_v} \right) g + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

(2) 雷诺平均后的动量方程组形式

首先以 u 方向为例，推导雷诺平均后的方程形式。将个物理量的分解形式代入，并对方程求雷诺平均。

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t} + (\bar{u}+u') \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + (\bar{v}+v') \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y} + (\bar{w}+w') \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial z}} \\ &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial(\bar{p}+p')}{\partial x} + f(\bar{v}+v') + \nu \left(\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

进一步化简得到

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right)$$

可以看到多出了三项出来，根据复合函数的求导法则 $(uv)' = u'v + uv'$ ，对这些项进行转换：

$$\begin{cases} \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \\ \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} = \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} = \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} \\ \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} \end{cases}$$

简化的另一个假设是**不可压缩**，有

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

所以可以得到最终的雷诺平均方程为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{f} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

显然，上述的方程太过冗长，我们引入爱因斯坦标记法，有

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{f} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u'u'_j}}{\partial x_j} \quad (u_j = u, v, w, x_j = x, y, z)$$

同理我们可以得到 v, w 方向雷诺平均后的方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \bar{f} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{v'u'_j}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \bar{g} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{w'u'_j}}{\partial x_j} \end{cases}$$

综上，经过雷诺平均后的动量方程组如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{f} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u'u'_j}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \bar{f} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{v'u'_j}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \bar{g} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{w'u'_j}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (u_j = u, v, w, x_j = x, y, z)$$

(3) 动量方程组的另一种表示

采用爱因斯坦标记法，将方程组用一个方程来表示。例如，对于原始动量方程组，有如下表达式：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f \varepsilon_{ij3} u_j - \left(1 - \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v}\right) g \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (①)$$

上式中 δ_{ij} 叫做**克罗内克(Kronecker)函数**，在线性代数中，又称为**克罗内克张量**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ε_{ij3} 称为**交换张量**，其定义为

$$\varepsilon_{ij3} = \begin{cases} 1, & \text{若 } ijk = 123, 231, 312 \text{ (偶排列)} \\ -1, & \text{若 } ijk = 321, 213, 132 \text{ (奇排列)} \\ 0, & \text{若 } ijk \text{ 中任意两指数相同} \end{cases}$$

对于一个序列是奇排列还是偶排列，主要看其“逆序”的总数是奇数还是偶数。例如对于序列“2431”，逆序有“21、43、41、31”，所以逆序数为4，所以是偶排列。需要注意的是，方程中既有 $\bar{u}_i, \bar{u}_j$ ，很容易混淆，我们可以这样理解：首先应该取 i 的值，它表示我们要写出某一方向上的分量方程，而后再取 j 值，这样就将 i 方向的动量方程完全展开了。

同样的，雷诺平均后的动量方程组也可以写成如下形式：

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_j - g \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \quad (②)$$

4. 平均湍动能控制方程的推导

将各变量的雷诺分解形式代入3中的方程①中：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \\ &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + f \varepsilon_{ij3} (\bar{u}_j + u'_j) - \left(1 - \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v}\right) g \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} \quad (③) \end{aligned}$$

③-②，得到湍流量 u'_i 的预报方程

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + f \varepsilon_{ij3} u'_j + g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v} \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \quad (④)$$

湍流运动具有随机性和不确定性，因此主要讨论湍流的统计特性。将④ $\times u'_i$ ，有：

$$\begin{aligned}
& u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \\
& -\frac{u'_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + f \varepsilon_{ij3} u'_i u'_j + g \frac{u'_i \theta'_v}{\bar{\theta}_v} \delta_{i3} + \nu u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + u'_i \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \\
& \Downarrow \\
& \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u_i'^2 \right)}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u_i'^2 \right)}{\partial x_j} + u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u_i'^2 \right)}{\partial x_j} \\
& = -\frac{u'_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + f \varepsilon_{ij3} u'_i u'_j + g \frac{u'_i \theta'_v}{\bar{\theta}_v} \delta_{i3} + \nu u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + u'_i \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \quad (5)
\end{aligned}$$

对方程⑤进行雷诺平均，其中标红部分的雷诺平均过程如下：

$$\checkmark \quad \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}} = \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$\checkmark \quad \overline{u'_j \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u_i'^2 \right)}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial \left(\frac{1}{2} u_i'^2 u'_j \right)}{\partial x_j}} - \frac{1}{2} u_i'^2 \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u_i'^2 u'_j})}{\partial x_j}$$

$$\checkmark \quad \overline{-\frac{u'_i}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (\overline{p' u'_i})}{\partial x_i} + \frac{p'}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (\overline{p' u'_i})}{\partial x_i}$$

$$\checkmark \quad \overline{u'_i \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}} = \overline{u'_i} \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} = 0 \quad (\overline{u'_i u'_j} \neq 0, \text{但也不是常数, 但是对于在一定范围的网}$$

格内, 可以认为 $\overline{u'_i u'_j} = \text{const}$, 于是 $\overline{u'_i \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}} = \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = 0$)

$$\checkmark \quad \overline{\nu u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2}} = \overline{\nu u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} = \nu \left[\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} - \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right] = \frac{1}{2} \nu \frac{\partial (\overline{u_i'^2})}{\partial x_j^2} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}$$

(1) 关于 $\frac{1}{2} \nu \frac{\partial (\overline{u_i'^2})}{\partial x_j^2} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}$ 的进一步讨论(Stull, 1988)

- ① 第一项：速度方差的分子扩散项，包含了速度方差的曲率。速度方差在边界层内随距离的变化相对平滑 ($\overline{u_i'^2}$ 变化不剧烈)，曲率在混合层(Mixed Layer, ML)和近地面(Surface Layer, SL)的量级分别为 10^{-6}s^{-2} , 10^{-2}s^{-2} 。对于大气而言， ν 的量级在 $10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ ，所以二者相乘以后的量级范围在 $10^{-11} \sim 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^3$ 。

【注】关于①中一些概念与细节的注释

- ✓ 速度方差的分子扩散(Molecular diffusion of velocity variance): 实际上里面包含了两个概念: 速度方差和分子扩散。按照雷诺平均(我们采用的是系综平均)的定义, 有 $\overline{u_i^2} = \frac{1}{N}(u_i - \bar{u}_i)^2$, 这正是方差的定义。那为什么又说该项与分子扩散有关呢? 我们知道, 在假定扩散系数为常数的情况下, 一维扩散方程可以写为 $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ (D 表示扩散系数), 显然, $\nu \frac{\partial(\overline{u_i^2})}{\partial x_j^2}$ 具备扩散方程的形式。
- ✓ (速度)方差的曲率(Curvature of a variance): 对于一个函数, 一阶导数表示曲线的斜率, 二阶导数表示斜率的变化率即曲率, 所以 $\frac{\partial(\overline{u_i^2})}{\partial x_j^2}$ 还代表了速度方差的曲率。
- ✓ 关于单位: ν 指的是运动学粘性系数(Kinematic Viscosity), 需要与动力粘度与动力粘性系数(Dynamic Viscosity) μ 要区分开来, 二者是描述流体粘性的两个相关但不同的概念, 二者的关系为: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, 动力粘性系数的单位可以根据牛顿内摩擦定律($\frac{F}{S} = \mu \frac{du}{dy}$)得出, 为 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} (\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2)$, 而密度的单位为 kg / m^3 , 由此可以得到运动学粘性系数的单位为 m^2 / s 。

② 第二项: 速度剪切项。例如, 在 1cm 的范围内湍流的速度变化 0.1m/s , 那么速度剪切就可以达到 10s^{-1} , 对于尺度更小的涡, 速度剪切更大。速度剪切值经过平方, 平均, 再乘以 ν 以后, 这一项的量级在湍流边界层中的观测到的量级在 $10^{-6} \sim 10^{-2} \text{m}^2 / \text{s}^3$ 。在混合层中, 典型的量级在 $10^{-4} \sim 10^{-3} \text{m}^2 / \text{s}^3$; 而在近地面层, 量级可达 $10^{-2} \text{m}^2 / \text{s}^3$ 。

【如何理解尺度越小的涡速度剪切越大?】

较大的湍流涵盖了更大的空间范围, 速度的变化较小, 而较小的湍流包含了速度的局部不规则性, 能引起速度的较大变化。

综上, 经过简单的讨论, $\frac{1}{2} \nu \frac{\partial(\overline{u_i'^2})}{\partial x_j^2} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$ 的第一项量级远比第二项小, 因此可以略去, $\overline{\nu u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = -\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$, 由此定义粘性耗散系数 $\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}$ 。

(2) 方程中的科氏力项

湍动能方程应该是三个方向上方程的相加。于是科氏力项的和为(根据交换张量的定义, i, j 的取值只能是 12 或 21)

$$f \varepsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} = f \varepsilon_{123} \overline{u_1' u_2'} + f \varepsilon_{213} \overline{u_2' u_1'} = f \overline{u_1' u_2'} - f \overline{u_2' u_1'} = 0$$

该结果表明, 在经过雷诺平均后的湍动能方程中已经没有了科氏力的影响, 也就是说科氏力不会产生湍动能, 只是将能量从一个水平方向重新分配到另一个水平方向。

(3) 简化的速度方差的预报方程

$$\frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = 2g \frac{\overline{u_i' \theta_v'}}{\overline{\theta_v}} \delta_{i3} - 2\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{u_i'^2 u_j'})}{\partial x_j} - \frac{2}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p' u_i'}}{\partial x_i} - 2\varepsilon \quad (6)$$

各项代表的含义如下

- ✓ $\frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t}$: 局地方差储存项(local storage of variance)、预报项;
- ✓ $\overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j}$: 平均风引起的速度方差的平流项(the advection of variance by the mean wind);
- ✓ $g \frac{\overline{u_i' \theta_v'}}{\overline{\theta_v}} \delta_{i3}$: 浮力(Buoyancy)做功对速度方差的贡献, 可正(陆地白天)可负(陆地夜晚);
- ✓ $-2\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$: 雷诺应力做功对速度方差的贡献(一般为正值);
- ✓ $-\frac{\partial(\overline{u_i'^2 u_j'})}{\partial x_j}$: 湍流输送项(turbulent transport term), 湍涡 u_j' 对速度方差 $u_i'^2$ 的输送。

✓ $-\frac{2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{p'u'_i}}{\partial x_i}$: 压强扰动对速度方差的影响(与大气中的振荡有关, 浮力、重力波等);

✓ -2ε : 速度方差的粘性耗散项(the viscous dissipation of velocity variance)。

(4) 平均湍动能预报方程

平均湍动能的定义为: $\bar{e} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$, 由上面的速度方差的预报方程,

便可以得到平均湍动能的预报方程为

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = g \frac{\overline{u'_i \theta'_v}}{\bar{\theta}_v} \delta_{i3} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u'_j e})}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{p'u'_i}}{\partial x_i} - \varepsilon \quad (7)$$

假设湍流水平均一, 即 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, 同时垂向只考虑扰动的存在, 即 $\bar{w} = 0$, 上

述方程便可以写为:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{g}{\bar{\theta}_v} \overline{w' \theta'_v} - \overline{u' w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v' w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{w' e})}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{w' p'}}{\partial z} - \varepsilon \quad (8)$$

第二讲 有限差分

1. 一维平流方程的解析解(分离变量法)

在物理学中,常用复指数 $Ae^{i(kx-\omega t)}$ 来表示波动函数 $y = A\cos(kx - \omega t)$ 。这种复指数函数与波动函数之间只是一种对应关系,而不是相等关系。在做波动的线性运算(如加、减、乘常数、微分、积分)时,复指数函数的运算会更加简便,并通过复数运算后,从计算的最后结果中取相应的实部或虚部(通常取实部),即为波函数的运算所求结果。但是若进行简谐波的乘积运算,则不能用复数形式代替,必须直接用实部运算。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

波函数的表达式为 $y = Ae^{i(kx-\omega t)}$, 因此可设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入上述方程:

$$\frac{T'(t)}{cT(t)} = -\frac{X'(x)}{X(x)}$$

上式中左边仅与 t 有关, 右边仅与 x 有关, 所以只能等于同一个常数, 即

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{cT(t)} = ik \Leftrightarrow \begin{cases} T'(t) + cikT(t) = 0 \\ X'(x) - ikX(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(t) = C_1 e^{-ikct} \\ X(x) = C_2 e^{ikx} \end{cases}$$

于是 $u(x, t) = Ce^{-ik(x-ct)}$ ($C = C_1 C_2$), 因此方程的解析解的形式为

$$u(x, t) = F(x - ct) = Ce^{ik(x-ct)}$$

【注】

(1) 将常数设为 ik 是为了保证前后的一致性, 即能得到复指数的表达形式。但无论取什么值, $u(x, t)$ 的解析解形式总有 $u(x, t) = F(x - ct)$ 。

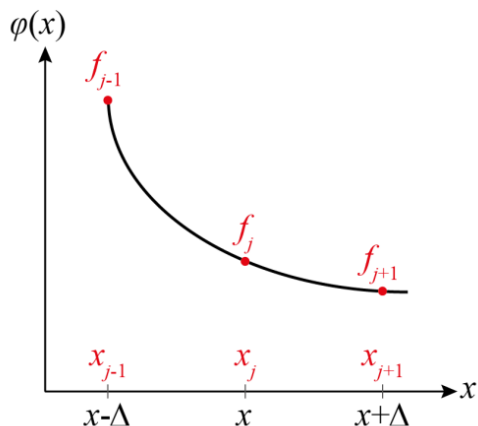
(2) 也可以将解的形式直接设为 $u(x, t) = F(t)e^{ikx}$, 从而得到

$$\frac{dF}{dt} = -ickF \Rightarrow F = Ce^{-ickt}$$

于是 $u(x, t) = F(x - ct) = Ce^{ik(x-ct)}$

(3) k 表示（角）波数，用 L 表示波长，则 $k = \frac{2\pi}{L}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{L} = kc$ 。

2. 连续函数的离散化处理



对于离散序列 $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n), \dots$,

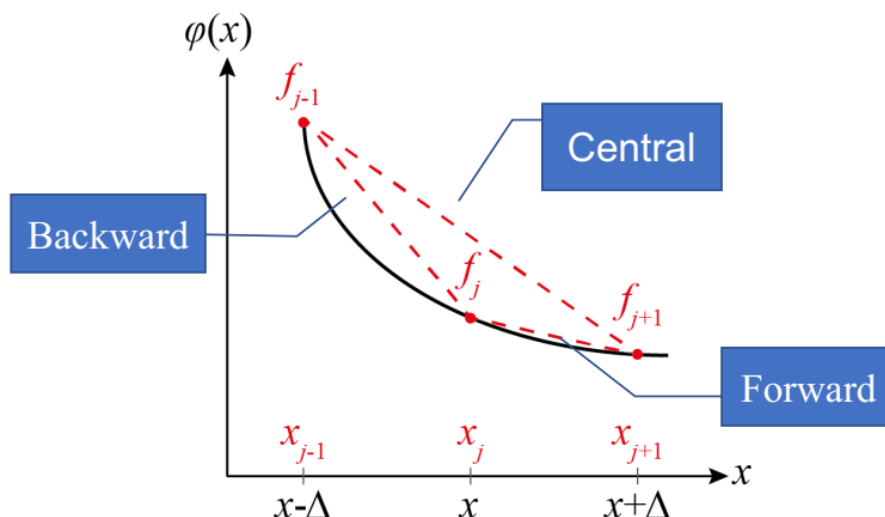
其与连续函数的关系为：

$$f_j(x_j) = \varphi_j(x_j)$$

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \varphi'_j(x_j) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=x_j}$$

$$\varphi'_j(x_j) = f'_j(x_j) + \varepsilon (\varepsilon \text{ 为截断误差})$$

3. 差分格式的建立



(1) 向前差分（Forward-difference, FWD）

$$\varphi(x+\Delta) = \varphi(x) + \Delta \varphi'(x) + \frac{(\Delta)^2}{2!} \varphi''(x) + \frac{(\Delta)^3}{3!} \varphi'''(x) + \dots \quad (①)$$

变形可得

$$\varphi'(x) = \underbrace{\frac{\varphi(x+\Delta) - \varphi(x)}{\Delta}}_{f'(x)} - \underbrace{\frac{\Delta}{2!} \varphi'' - \frac{\Delta^2}{3!} \varphi''' + \dots}_{\varepsilon = O(\Delta)}$$

可见，FWD 的截断误差（**Truncation Error, TE**）为关于 Δ 的 1 次。

(2) 向后差分 (Backward-difference, BWD)

$$\varphi(x-\Delta) = \varphi(x) - \Delta\varphi'(x) + \frac{(\Delta)^2}{2!}\varphi''(x) - \frac{(\Delta)^3}{3!}\varphi'''(x) + \dots \quad (2)$$

变形得到

$$\varphi'(x) = \underbrace{\frac{\varphi(x) - \varphi(x-\Delta)}{\Delta}}_{f'(x)} + \underbrace{\frac{\Delta}{2!}\varphi'' - \frac{\Delta^2}{3!}\varphi''' + \dots}_{\varepsilon=O(\Delta)}$$

可见, BWD 的截断误差也为关于 Δ 的 1 次。

(3) 中央差分 (Central-difference, CTD)

①-②得到 (或者(FWD+BWD)/2):

$$\varphi'(x) = \underbrace{\frac{\varphi(x+\Delta) - \varphi(x-\Delta)}{2\Delta}}_{f'(x)} - \underbrace{\frac{\Delta^2}{3!}\varphi''' + \dots}_{\varepsilon=O(\Delta^2)}$$

CTD 的截断误差为关于 Δ 的 2 次, 即精度更高。

4. 得到近似解需要考虑的问题

(1) 相容性 (Consistency) 问题

当空间网格距离 Δ 与时间步长 τ 均趋于 0 时, 差分方程能否无限逼近微分方程的问题, 只有满足这一条件的差分方程才称为与微分方程是相容的。用数学定义为即为:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} |f' - \varphi'| = \lim_{\Delta \rightarrow 0} |TE(f')| = 0$$

【例 1】证明如下的微分方程及其对应的差分方程是相容的。

$$\begin{cases} PDE: \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ FDE: \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\tau} + c \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta} = 0 \end{cases} \quad (c = \text{const}, x_j = j\Delta, t_n = n\tau)$$

证明: 容易知道, 时间前差的精度为关于 τ 的一阶, 即 $O(\tau)$; 空间后差的精度为关于 Δ 的一阶, 即 $O(\Delta)$, 根据上述数学定义, 有

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0} |TE| = \lim_{\tau \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0} |O(\tau) + cO(\Delta)| = 0$$

因此是满足相容性的。

(2) 收敛性(Convergence)与稳定性(Stability)问题

设微分方程的真解为 U ，对应的差分方程为准确解为 u ，差分方程的数值解为 u^* ，因此实际的误差为 $U - u^* = (U - u) + (u - u^*)$ 。

- **截断误差**: $U - u$ ，此即由于用差分方程代替微分方程所产生的误差，其是否随着空间网格距离与时间步长均趋于 0 时而趋于 0，称为解的**收敛性**问题；

$$\lim_{\Delta, \tau \rightarrow 0} |f_j^n - \varphi(x_j, t_n)| = 0$$

- **舍入误差**: $u - u^*$ ，是计算机每次迭代误差的累计，其是否随着空间网格距离与时间步长均趋于 0 时在整个求解趋于**保持有界**称为解的**稳定性**问题。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f_j^n - \varphi(x_j, t_n)| < C (C = \text{const})$$

相容性

在时空网格间距很小时，差分方程能否无限逼近微分方程的问题

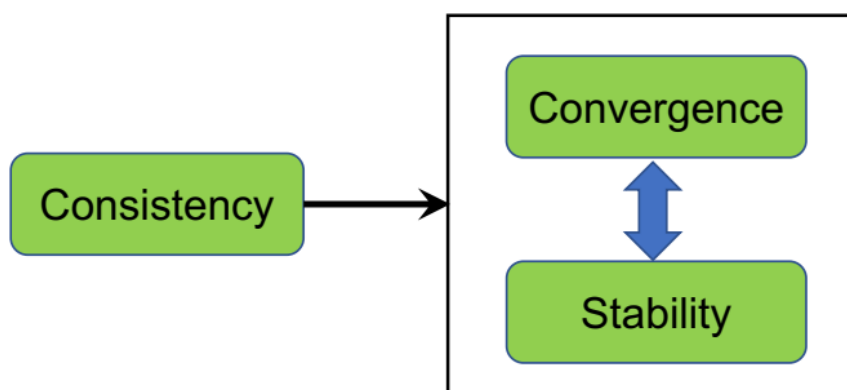
收敛性

差分方程的准确解能否无限逼近微分方程的解的问题
(差分方程代替微分方程导致的**截断误差**)

稳定性

差分方程的数值解与准确解之间的误差是否保持有界的问题
(在对差分方程进行数值计算时导致的**舍入误差**)

5. 差分格式的稳定性分析



Lax 等价定理指出：对于适定的线性偏微分方程组初值问题，**一个与之相容的线性差分格式收敛的充分必要条件是该格式是稳定的**，所以用差分方法求微分

方程时，数值解的做重要问题就转换到了差分格式的稳定性上来了。这里采用冯·纽曼(Von Neumann)方法来探讨一维平流方程稳定性的条件。

(1) 时间前差-空间后差格式 (Forward Time and Backward Space, FTBS)

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\tau} + c \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta} = 0 \quad (x_j = j\Delta, t_n = n\tau)$$

令 $\mu = \frac{c\tau}{\Delta}$ ，则有 $f_j^{n+1} = (1 - \mu) f_j^n + \mu f_{j-1}^n$ (*)。

前面提到，一维平流微分方程的解析解表达式为 $\varphi(x, t) = F(x - ct) = Ce^{ik(x-ct)}$ ，

令 $A = e^{-ikc\tau} = e^{-i\omega\tau}$ ，则 $A^n = e^{-i\omega t} = e^{-i\omega n\tau}$ ， $A^{n+1} = A^n e^{-i\omega\tau}$ ， $A^{n-1} = A^n e^{i\omega\tau}$ ，称 A^n 为振幅因子，于是 t_n 时刻差分方程的近似解有如下形式：

$$f_j^n = Ce^{-i\omega t_n} e^{ikx_j} = Ce^{-i\omega n\tau} e^{ikj\Delta} = CA^n e^{ikj\Delta}$$

显然，这种解的形式要求 $|A| \leq 1$ 才是合理的，将上述解代入(*)式中，有

$$f_j^{n+1} = (1 - \mu + \mu e^{-ik\Delta}) f_j^n \Rightarrow A = \frac{f_j^{n+1}}{f_j^n} = 1 - \mu + \mu e^{-ik\Delta}$$

于是得到振幅因子的模为（欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ）

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{(1 - \mu + \mu \cos k\Delta)^2 + (-\mu \sin k\Delta)^2} = \sqrt{(1 - \mu)^2 + \mu^2 + 2\mu(1 - \mu)\cos^2 k\Delta} \\ &= \sqrt{\left[(1 - \mu)^2 + \mu^2 + 2\mu(1 - \mu) \right] - 2\mu(1 - \mu) + 2\mu(1 - \mu)\cos^2 k\Delta} \\ &= \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos^2 k\Delta)} \quad (\text{二倍角公式 } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha) \\ &= \sqrt{1 - 4\mu(1 - \mu)\sin^2(k\Delta/2)} \end{aligned}$$

要使得 $|A| \leq 1$ ，则有 $0 < \mu \leq 1$ ，该条件称为收敛性判据，又称为柯朗-佛里德里克

斯-莱维(Courant-Friedrichs-Lewy, CFL)条件，是保证计算稳定性的充分条件。

也即在满足 CFL 条件下，FTBS 差分格式是稳定的。

(2) 时间前差-空间中央差格式 (Forward Time and Central Space, FTCS)

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\tau} + c \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta} = 0 \quad (x_j = j\Delta, t_n = n\tau)$$

于是

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{\mu}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) = f_j^n \left[1 - \frac{\mu}{2}(e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}) \right]$$

振幅因子的表达式为

$$A = 1 - \frac{\mu}{2}(e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}) = 1 - i\mu \sin k\Delta \Rightarrow |A| = \sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 k\Delta} \geq 1$$

当 $k\Delta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ 时 $|A| = 1$ ，其他情况 $|A| > 1$ ，这种依赖于波数（波长）的差分格式显然是不稳定的。

(3) 时间-空间中央差格式（Central Time and Central Space, CTCS）

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\tau} + c \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta} = 0 \quad (x_j = j\Delta, t_n = n\tau)$$

于是

$$f_j^{n+1} - f_j^{n-1} = -\mu(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \Leftrightarrow f_j^n (e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}) = -f_j^n \mu (e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta})$$

得到一个关于振幅因子的一元二次方程

$$(A - A^{-1}) = -2i\mu \sin k\Delta \Leftrightarrow A^2 + 2i\Omega A - 1 = 0 \quad (\Omega = \mu \sin k\Delta)$$

根据求根公式得其解为

$$A = \frac{-2i\Omega \pm \sqrt{(2i\Omega)^2 - 4}}{2} = i\Omega \pm \sqrt{1 - \Omega^2}$$

对上述解进行讨论：

- ① 当 $|\mu| \leq 1$ 时， $|\Omega| \leq 1$ ， $|A| = 1$ 表明差分方程是稳定的；
- ② 当 $|\mu| > 1$ 时， $|\Omega| > 1$ ， $A = -i(-\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 1})$ ，此时方程的两个解分别为 $|A_1| = \Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}$ ， $|A_2| = \Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}$ ，此时两个解均不满足 $|A| \leq 1$ 的条件。

可见中央差分格式（CTCS）是条件性稳定的，稳定性与 μ 有关。

(4) 时间后差-空间中央差格式（Backward Time and Central Space, BTCS）

$$\frac{f_j^n - f_j^{n-1}}{\tau} + c \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta} = 0 \quad (x_j = j\Delta, t_n = n\tau)$$

于是

$$f_j^n = f_j^{n-1} - \frac{\mu}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) = f_j^n \left[e^{i\omega\tau} - \frac{\mu}{2}(e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}) \right]$$

得到振幅因子的表达式为

$$A^{-1} - \frac{\mu}{2}(e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{1 + i\mu \sin k\Delta} = \frac{1 - i\mu \sin k\Delta}{1 + \mu^2 \sin^2 k\Delta}$$

$$|A| = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \mu^2 \sin^2 k\Delta} \right)^2 + \left(\frac{-\mu \sin k\Delta}{1 + \mu^2 \sin^2 k\Delta} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^2 \sin^2 k\Delta}} \leq 1$$

所以该种差分格式是绝对稳定的。

6. 导数的任意阶近似

在数值计算中，我们希望能尽可能的提高导数近似的精度，通常需要使用更多的格点（如三点、五点等）表示导数。下面仍以一维平流方程为，讨论三点表示一阶导数近似。

(1) 向前差分

$$f_j'(x_j) = \frac{\varphi(x_j + \Delta, t) - \varphi(x_j, t)}{\Delta} + O(\Delta) \quad [\varphi_j'(x_j) = f_j'(x_j) + \varepsilon]$$

只用两个节点表示一阶导数，误差 ε 是关于 Δ 的1次，用三个点来表示，可写成多项式(参见前面第2点，离散格点与连续函数之间有关系 $\varphi_j(x_j) = f_j(x_j)$)

$$\begin{aligned} f_j'(x_j) &= a_0 f_j(x_j) + a_1 f_{j+1}(x_{j+1}) + a_2 f_{j+2}(x_{j+2}) \\ &\Updownarrow \\ f_j'(x_j) &= a_0 \varphi_j(x_j) + a_1 \varphi_{j+1}(x_{j+1}) + a_2 \varphi_{j+2}(x_{j+2}) \end{aligned}$$

于是误差可以表示为 $\varepsilon = \varphi_j'(x_j) - a_0 \varphi_j(x_j) - a_1 \varphi_{j+1}(x_{j+1}) - a_2 \varphi_{j+2}(x_{j+2})$ ，然后对

$\varphi_{j+1}, \varphi_{j+2}$ 进行 Taylor 展开

$$\begin{cases} \varphi_{j+1} = \varphi_j + \Delta \varphi_j' + \frac{\Delta^2}{2!} \varphi_j'' + \frac{\Delta^3}{3!} \varphi_j''' + \dots \\ \varphi_{j+2} = \varphi_j + (2\Delta) \varphi_j' + \frac{(2\Delta)^2}{2!} \varphi_j'' + \frac{(2\Delta)^3}{3!} \varphi_j''' + \dots \end{cases}$$

为了方便将对应项的系数进行整理，列如下表格

	φ_j	φ'_j	φ''_j	φ'''_j	
φ'_j	0	1	0	0	
$-a_0\varphi_j$	$-a_0$	0	0	0	
$-a_1\varphi_{j+1}$	$-a_1$	$-a_1\Delta$	$-a_1\frac{\Delta^2}{2}$	$-a_1\frac{\Delta^3}{6}$	
$-a_2\varphi_{j+2}$	$-a_2$	$-2a_2\Delta$	$-2a_2\Delta^2$	$-\frac{4}{3}a_2\Delta^3$	

在上述的表格中，我们只列到了三阶导数的一列。实际上，前面设的多项式中只有三个未知数，只需要三个方程即可(到二阶导的一列就可以构建三个方程，列到三阶导是为了后面计算误差)。**为了满足相容性条件，以及使误差留到更高阶的项中去**，应该使得每一项的系数和（对应于表格的每一列）为0，即

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ 1 - a_1\Delta - 2a_2\Delta = 0 \\ a_1\frac{\Delta^2}{2} + 2a_2\Delta^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{3}{2\Delta} \\ a_1 = \frac{2}{\Delta} \\ a_2 = -\frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

于是三点表示的一阶导数的近似的表达式为

$$f'_j = a_0 f_j + a_1 f_{j+1} + a_2 f_{j+2} = -\frac{3}{2\Delta} f_j + \frac{2}{\Delta} f_{j+1} - \frac{1}{2\Delta} f_{j+2} = \frac{-3f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}}{2\Delta}$$

它的误差为

$$\varepsilon = -\left(a_1\frac{\Delta^3}{6} + a_2\frac{4\Delta^3}{3}\right)\varphi'''_j + \dots = -\frac{\Delta^2}{3}\varphi'''_j + \dots \sim O(\Delta^2)$$

显然这比使用两个点计算一阶导数的精度要高。

(2) 向后差分

向后差分的原理其实与前差一样，这里不做过多文字阐述，直接上推导过程与公式，如下：

$$f'_j(x_j) = a_0 f_j(x_j) + a_{-1} f_{j-1}(x_{j-1}) + a_{-2} f_{j-2}(x_{j-2})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f'_j(x_j) = a_0 \varphi_j(x_j) + a_{-1} \varphi_{j-1}(x_{j-1}) + a_{-2} \varphi_{j-2}(x_{j-2})$$

$$\varepsilon = \varphi'_j(x_j) - a_0 \varphi_j(x_j) - a_{-1} \varphi_{j-1}(x_{j-1}) - a_{-2} \varphi_{j-2}(x_{j-2})$$

$$\begin{cases} \varphi_{j-1} = \varphi_j - \Delta \varphi'_j + \frac{\Delta^2}{2!} \varphi''_j - \frac{\Delta^3}{3!} \varphi'''_j + \dots \\ \varphi_{j-2} = \varphi_j - (2\Delta) \varphi'_j + \frac{(2\Delta)^2}{2!} \varphi''_j - \frac{(2\Delta)^3}{3!} \varphi'''_j + \dots \end{cases}$$

	φ_j	φ'_j	φ''_j	φ'''_j	
φ'_j	0	1	0	0	
$-a_0 \varphi_j$	$-a_0$	0	0	0	
$-a_{-1} \varphi_{j-1}$	$-a_{-1}$	$a_{-1} \Delta$	$-a_{-1} \frac{\Delta^2}{2}$	$a_{-1} \frac{\Delta^3}{6}$	
$-a_{-2} \varphi_{j-2}$	$-a_{-2}$	$2a_{-2} \Delta$	$-2a_{-2} \Delta^2$	$\frac{4}{3} a_{-2} \Delta^3$	

$$\begin{cases} a_0 + a_{-1} + a_{-2} = 0 \\ 1 + a_{-1} \Delta + 2a_{-2} \Delta = 0 \\ a_{-1} \frac{\Delta^2}{2} + 2a_{-2} \Delta^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{3}{2\Delta} \\ a_{-1} = -\frac{2}{\Delta} \\ a_{-2} = \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

$$f'_j = a_0 f_j + a_{-1} f_{j-1} + a_{-2} f_{j-2} = \frac{3}{2\Delta} f_j - \frac{2}{\Delta} f_{j-1} + \frac{1}{2\Delta} f_{j-2} = \frac{3f_j - 4f_{j-1} + f_{j-2}}{2\Delta}$$

$$\varepsilon = \left(a_{-1} \frac{\Delta^3}{6} + a_{-2} \frac{4\Delta^3}{3} \right) \varphi'''_j + \dots = \frac{\Delta^2}{3} \varphi'''_j + \dots \sim O(\Delta^2)$$

7. 紧致有限差分格式(Compact Finite Difference schemes, CTFD)

(1) 局地差分(Local Difference): 求某点差分, 只使用其临近点的数值, 如 FWD、

BWD 以及 CTD, 这个差分是显式的, 其形式形如 $f' = Af$ 。

(2) 非局地差分(Non-local Difference): 求某点差分, 不仅使用临近点的数值,

同时还使用其差分值(即导数近似值), 从而这种差分方案是隐式的, 形式形如 $Bf' = Af (A \neq B)$ 。这种非局地差分就叫紧凑有限差分(CTFD), 或者又称为 Padé 近似。

【例 2】CTFD 举例。构建如下的差分格式, 计算其系数和精度。

$$b_{-1}f'_{j-1} + f'_j + b_1f'_{j+1} + a_{-1}f_{j-1} + a_0f_j + a_1f_{j+1} = O(?)$$

对 $f'_{j\pm 1}, f_{j\pm 1}$ 进行 Taylor 展开, 有

$$f_{j\pm 1} = f_j \pm \Delta f'_j + \frac{\Delta^2}{2!} f''_j \pm \frac{\Delta^3}{3!} f^{(3)}_j + \frac{\Delta^4}{4!} f^{(4)}_j \pm \frac{\Delta^5}{5!} f^{(5)}_j + \dots$$

$$f'_{j\pm 1} = f'_j \pm \Delta f''_j + \frac{\Delta^2}{2!} f^{(3)}_j \pm \frac{\Delta^3}{3!} f^{(4)}_j + \frac{\Delta^4}{4!} f^{(5)}_j \pm \frac{\Delta^5}{5!} f^{(6)}_j + \dots$$

构建 Taylor 表

	f_j	f'_j	f''_j	$f^{(3)}_j$	$f^{(4)}_j$	$f^{(5)}_j$
$b_{-1}f'_{j-1}$	0	b_{-1}	$-b_{-1}\Delta$	$b_{-1}\frac{\Delta^2}{2}$	$-b_{-1}\frac{\Delta^3}{6}$	$b_{-1}\frac{\Delta^4}{24}$
f'_j	0	1	0	0	0	0
$b_1f'_{j+1}$	0	b_1	$b_1\Delta$	$b_1\frac{\Delta^2}{2}$	$b_1\frac{\Delta^3}{6}$	$b_1\frac{\Delta^4}{24}$
$a_{-1}f_{j-1}$	a_{-1}	$-a_{-1}\Delta$	$a_{-1}\frac{\Delta^2}{2}$	$-a_{-1}\frac{\Delta^3}{6}$	$a_{-1}\frac{\Delta^4}{24}$	$-a_{-1}\frac{\Delta^5}{120}$
a_0f_j	a_0	0	0	0	0	0
a_1f_{j+1}	a_1	$a_1\Delta$	$a_1\frac{\Delta^2}{2}$	$a_1\frac{\Delta^3}{6}$	$a_1\frac{\Delta^4}{24}$	$a_1\frac{\Delta^5}{120}$

5 个未知数, 列方程如下:

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0 \\ b_{-1} + 1 + b_1 - a_{-1}\Delta + a_1\Delta = 0 \\ -b_1\Delta + b_1\Delta + a_{-1}\frac{\Delta^2}{2} + a_1\frac{\Delta^2}{2} = 0 \\ b_{-1}\frac{\Delta^2}{2} + b_1\frac{\Delta^2}{2} - a_{-1}\frac{\Delta^3}{6} + a_1\frac{\Delta^3}{6} = 0 \\ -b_{-1}\frac{\Delta^3}{6} + b_1\frac{\Delta^3}{6} + a_{-1}\frac{\Delta^4}{24} + a_1\frac{\Delta^4}{24} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0 \\ b_{-1} + 1 + b_1 - a_{-1}\Delta + a_1\Delta = 0 \\ -b_1 + b_1 + a_{-1}\frac{\Delta}{2} + a_1\frac{\Delta}{2} = 0 \\ b_{-1} + b_1 - a_{-1}\frac{\Delta}{3} + a_1\frac{\Delta}{3} = 0 \\ -b_{-1} + b_1 + a_{-1}\frac{\Delta}{4} + a_1\frac{\Delta}{4} = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \\ \text{⑤} \end{matrix}$$

将③-⑤，得到 $a_{-1} + a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -a_{-1}$ ⑦，结合①，有 $a_0 = 0$ 。

将⑦代入③或者⑤中，得到 $b_1 - b_{-1} = 0 \Leftrightarrow b_1 = b_{-1}$ ⑧。

将⑦、⑧代入②、④中，得到方程组

$$\begin{cases} 2b_1 + 2a_1\Delta = -1 \\ 2b_1 + \frac{2}{3}a_1\Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{4\Delta} \\ b_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

所以方程的解为 $b_1 = b_{-1} = \frac{1}{4}, a_0 = 0, a_1 = -a_{-1} = -\frac{3}{4\Delta}$ 。误差为

$$\varepsilon = \left(b_{-1}\frac{\Delta^4}{24} + b_1\frac{\Delta^4}{24} - a_{-1}\frac{\Delta^5}{120} + a_1\frac{\Delta^5}{120} \right) + \dots = \frac{\Delta^4}{120} + \dots \sim O(\Delta^4)$$

于是 CTFD 格式的最终表达式可以写为

$$\begin{aligned} f'_{j-1} + 4f'_j + f'_{j+1} + \frac{3}{\Delta}f_{j-1} - \frac{3}{\Delta}f_{j+1} &= O(\Delta^4) \\ \Updownarrow \\ f'_{j-1} + 4f'_j + f'_{j+1} &= \frac{3}{\Delta}(f_{j+1} - f_{j-1}) + O(\Delta^4) \end{aligned}$$

8. 分析差分格式的误差来源——修正波数法(Modified Wavenumber)

考虑一个调和函数 $\varphi(x) = e^{ikx}$ (k 是波数)，其精确的导数为

$$\varphi' = ike^{ikx} = ik\varphi$$

因此我们可以假设 φ 函数的离散形势也具有上述关系，即 $f' = ik'f$ 。其中 $k'(\neq$

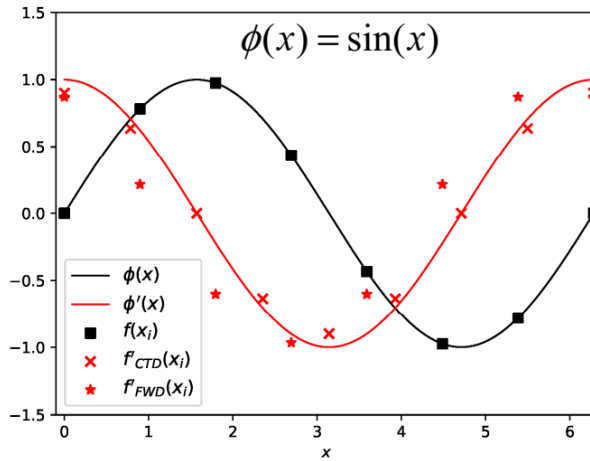
$k) = \frac{f'}{if}$ 就是离散以后得波数，或者叫修正波数。不妨假设其形式为

$$k' = A_{k'} e^{i\omega_{k'}} \Rightarrow \begin{cases} A_{k'} = \sqrt{[\operatorname{Re}(k')]^2 + [\operatorname{Im}(k')]^2} \\ \omega_{k'} = \arctan \frac{\operatorname{Im}(k')}{\operatorname{Re}(k')} \end{cases}$$

于是

$$f' = ik'f = iA_{k'} e^{i\omega_{k'}} f = iA_{k'} e^{i(kx + \omega_{k'})}$$

将上述结果与 $\varphi' = ik\varphi$ 相比较，可以发现，在离散化之后，振幅和位相都有了拍偏移(如下图所示)。



• Order of accuracy:

$$f(x_j) \equiv \phi(x_j)$$

$$\begin{cases} f'_{CTD}(x_j) = \phi'(x_j) + O(\Delta^2) \\ f'_{FWD}(x_j) = \phi'(x_j) + O(\Delta) \end{cases}$$

(不同差分的格式与实际导数存在位相和振幅上的偏差)

下面利用修正波数的方法分析 FWD、BWD 以及 CTD 的误差情况(对于每种差分格式，都有 $f_j = e^{ikx_j} = e^{ikj\Delta}$)

(1) FWD

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} (e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_j}) = \frac{e^{ik\Delta} - 1}{\Delta} e^{ikx_j} = \frac{e^{ik\Delta} - 1}{\Delta} f_j$$

$$\text{于是 } k' = \frac{f'}{if} = \frac{e^{ik\Delta} - 1}{i\Delta} = \frac{\sin k\Delta + i(1 - \cos k\Delta)}{\Delta}, \text{ 从而得到}$$

$$A_{k'} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos k\Delta)}}{\Delta}, \omega_{k'} = \arctan \frac{1 - \cos k\Delta}{\sin k\Delta} = \frac{k\Delta}{2}$$

【注】上述反三角函数结果得出的推导过程如下。

已知二倍角公式

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\text{于是 } \arctan \frac{1 - \cos k\Delta}{\sin k\Delta} = \arctan \left(\frac{2 \sin^2 \frac{k\Delta}{2}}{2 \sin \frac{k\Delta}{2} \cos \frac{k\Delta}{2}} \right) = \arctan \left(\tan \frac{k\Delta}{2} \right) = \frac{k\Delta}{2}$$

(2) BWD

$$f'_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} (e^{ikx_j} - e^{ikx_{j-1}}) = \frac{1 - e^{-ik\Delta}}{\Delta} e^{ikx_j} = \frac{1 - e^{-ik\Delta}}{\Delta} f_j$$

$$\text{于是 } k' = \frac{f'}{if} = \frac{1 - e^{-ik\Delta}}{i\Delta} = \frac{\sin k\Delta - i(1 - \cos k\Delta)}{\Delta}, \text{ 从而得到}$$

$$A_{k'} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos k\Delta)}}{\Delta}, \omega_{k'} = -\arctan \frac{1 - \cos k\Delta}{\sin k\Delta} = -\frac{k\Delta}{2}$$

(3) CTD

$$f'_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta} = \frac{1}{2\Delta} (e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}) = \frac{e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}}{2\Delta} e^{ikx_j} = \frac{e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}}{\Delta} f_j$$

$$\text{于是 } k' = \frac{f'}{if} = \frac{e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}}{i\Delta} = \frac{2i \sin k\Delta}{i\Delta} = \frac{\sin k\Delta}{\Delta}, \text{ 从而得到}$$

$$A_{k'} = \frac{\sin k\Delta}{\Delta}, \omega_{k'} = 0$$

【例 3】对前述四阶精度的 CTFD 公式进行修正波数分析。

$$f'_{j-1} + 4f'_j + f'_{j+1} = \frac{3}{\Delta} (f_{j+1} - f_{j-1})$$

设 $f'_j = ik'f_j$, 于是 $f_{j\pm 1} = f_j e^{\pm ik\Delta}$, $f'_{j\pm 1} = ik'f_{j\pm 1} = ik'f_j e^{\pm ik\Delta}$, 代入上式有

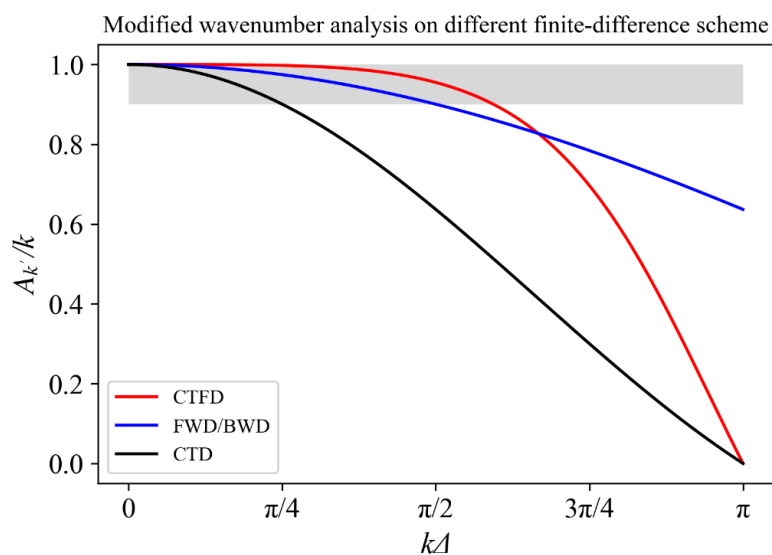
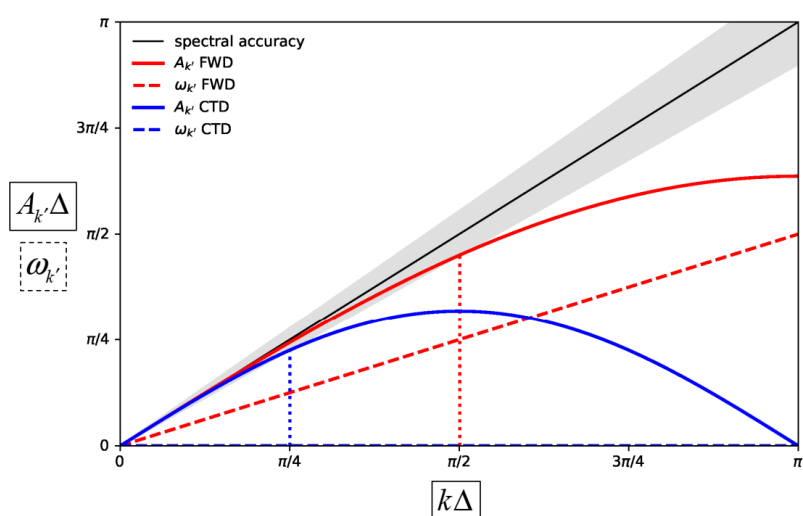
$$ik'f_j e^{-ik\Delta} + 4ik'f_j + ik'f_j e^{ik\Delta} = \frac{3}{\Delta} (f_j e^{ik\Delta} - f_j e^{-ik\Delta})$$

解得

$$k' = \frac{3}{i\Delta} \frac{e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}}{e^{-ik\Delta} + 4 + e^{ik\Delta}} = \frac{3}{i\Delta} \frac{2i \sin k\Delta}{2 \cos k\Delta + 4} = \frac{3 \sin k\Delta}{\Delta (\cos k\Delta + 2)}$$

于是可以得到 $A_{k'} = \frac{3\sin k\Delta}{\Delta(\cos k\Delta + 2)}, \omega_{k'} = 0$ 。

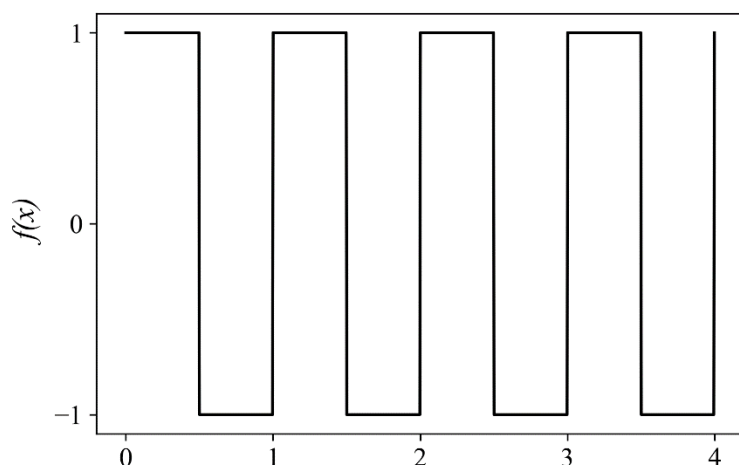
	振幅 $A_{k'}$	位相偏移 $\omega_{k'}$
向前差分(FWD)	$\frac{\sqrt{2(1 - \cos k\Delta)}}{\Delta}$	$\frac{k\Delta}{2}$
向后差分(BWD)	$\frac{\sqrt{2(1 - \cos k\Delta)}}{\Delta}$	$-\frac{k\Delta}{2}$
中央差分(CTD)	$\frac{\sin k\Delta}{\Delta}$	0
紧致差分(CTFD)	$\frac{3\sin k\Delta}{\Delta(\cos k\Delta + 2)}$	0



第三讲 傅立叶变换与逆变换(谱方法)

1. 普通函数与傅立叶级数序列的关系

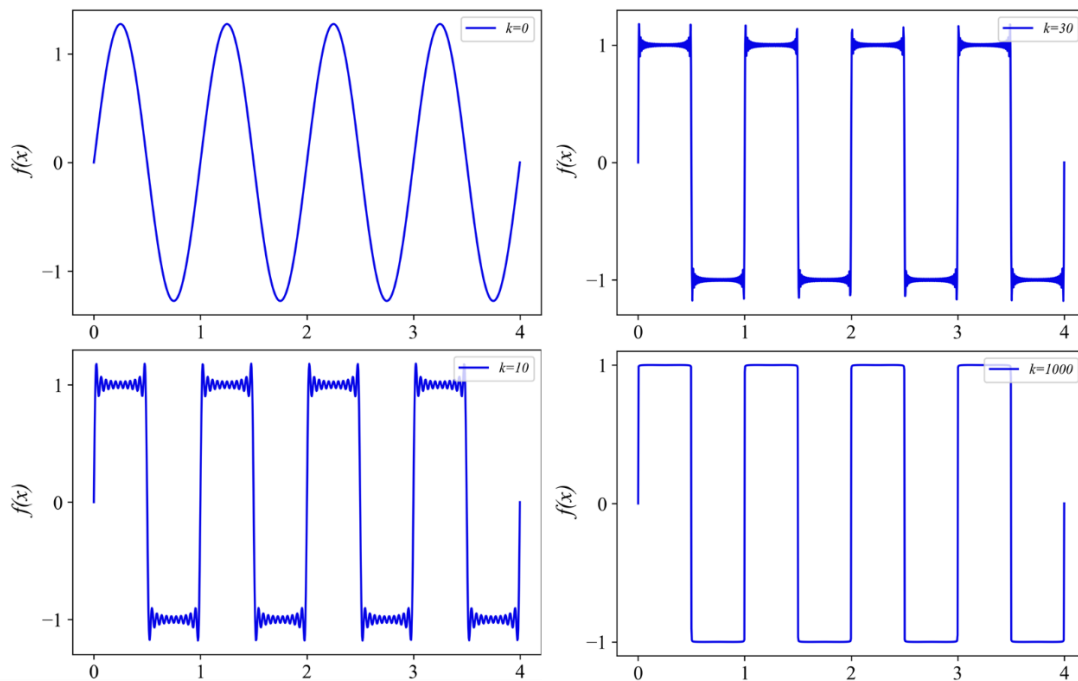
不妨假设有函数 $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$ ，其周期 $T=1$ ，容易得到其函数图像为



傅立叶变换告诉我们，一个函数可以由多个周期不同的三角函数叠加，此处先给出 $f(x)$ 的傅里叶级数的表达式为

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[2\pi(2k+1)x]$$

下面分别取 k 的上限(用 N 来表示)为 0, 10, 30, 1000。绘制出的函数图像如下页图所示。当 $N=0$ 时，就是我们熟知的三角函数，它与我们定义的周期函数相去甚远。当 $N=10, 30$ 时，所得的函数图像与定义的周期函数的形状已经很像，但是在每个周期内还是存在锯齿状的波动存在。而当 N 取很大时($N=1000$)，即将更多不同周期的三角函数进行累加时，所得函数图形已基本与原来的周期函数图像一致。



2. 傅立叶变换的基本思路与逻辑

设有一周期为 L 的函数 $\phi(x)$ ，其一阶导数为 $\phi'(x)$ ，其傅立叶级数展开(后续将会推导出该公式)为

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k) \exp\left(i \frac{2\pi}{L} kx\right)$$

这里 x 代表空间， k 表示波数， $\hat{\phi}(k)$ 为傅立叶系数

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) \exp\left(i \frac{2\pi}{L} kx\right) dx$$

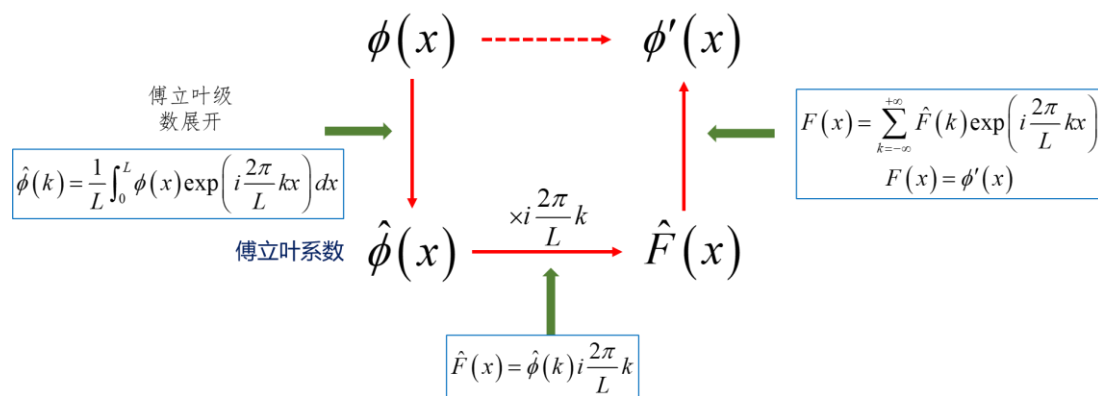
那么它的一阶导数为

$$\phi'(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k) \left(i \frac{2\pi}{L} k\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{L} kx\right)$$

令 $F(x) = \phi'(x)$ ，则有

$$\phi'(x) = F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(k) \exp\left(i \frac{2\pi}{L} kx\right) \left(\hat{F}(k) = \hat{\phi}(k) \left(i \frac{2\pi}{L} k\right) \right)$$

我们用一个简单的概念图来讲上述流程串起来，即



为什么我们没有直接对函数 $\phi(x)$ 进行求导得到其一阶导数？在数学上，如果 $\phi(x)$ 的函数形式已知，则利用求导法则直接求导是没有问题的，但是在实际应用中，模式中都是不连续的、离散化的格点，没有办法得到函数的具体表达式，即函数的形式都是未知的。

3. 三角函数系的正交性

已知下列的三角函数系

$$1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots, \cos n\omega t, \sin n\omega t, \dots (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

假设周期为 $T(\omega = \frac{2\pi}{T})$ ，证明在区间 $[0, T]$ 上：

(1) 1 分别和 $\cos n\omega t, \sin n\omega t$ 正交

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos n\omega t dt &= \frac{1}{n\omega} \int_0^T \cos(n\omega t) d(n\omega t) = \frac{1}{n\omega} \sin(n\omega t) \Big|_0^T = \frac{T}{2\pi n} \sin 2\pi n = 0 \\ \int_0^T \sin n\omega t dt &= \frac{1}{n\omega} \int_0^T \sin(n\omega t) d(n\omega t) = -\frac{1}{n\omega} \cos(n\omega t) \Big|_0^T = -\frac{T}{2\pi n} (\cos 2\pi n - 1) = 0 \end{aligned}$$

(2) $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 相互正交

对于三角函数的和，我们有和角公式

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

于是可以得到积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \sin \beta \cos \alpha = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

于是

$$\int_0^T \cos n \omega t \cdot \sin m \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \sin(n+m) \omega t dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sin(n-m) \omega t dt$$

根据(1)的结论可知, 无论 n 与 m 是否相等, 最后的积分结果都为 0, 即正交。

(3) $\cos n \omega t$ 和 $\cos m \omega t$ 以及 $\sin n \omega t$ 和 $\sin m \omega t$ 在 $n \neq m$ 相互正交

同样的, 有积化和差公式

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

所以

$$\int_0^T \cos n \omega t \cdot \cos m \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n-m) \omega t dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n+m) \omega t dt$$

$$\int_0^T \sin n \omega t \cdot \sin m \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n-m) \omega t dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(n+m) \omega t dt$$

显然, 当 n 与 m 不相等的时候, 结合(1)中的结论, 上述积分为 0。

那么当 $n=m$ 时, 上述两个积分的第二项为 0, 从而积分值为 $\frac{T}{2}$ 。

4. 实数域傅立叶变换与逆变换

假设有一周期为 T 的函数 $x(t)$, 其傅立叶展开为

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)] \quad (1)$$

其中 $f_0 = \frac{1}{T}$ 表示基础频率。

(1) ① $\times \cos(2\pi n f_0 t)$ 后再 $[0, T]$ 上求定积分

$$\begin{aligned} & \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} [a_m \cos(2\pi m f_0 t) + b_m \sin(2\pi m f_0 t)] \right\} \cdot \cos(2\pi n f_0 t) dt \end{aligned} \quad (2)$$

■ 当 $n=0$ 时

$$\text{②式变为 } \int_0^T x(t) dt = \int_0^T \frac{a_0}{2} dt + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \int_0^T \cos(2\pi m f_0 t) dt = \frac{T}{2} a_0, \text{ 从而解得}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt$$

■ 当 $n \neq 0$ 时

②式变为

$$\int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \frac{a_0}{2} \int_0^T \cos(2\pi n f_0 t) dt + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^T a_m \cos(2\pi m f_0 t) \cos(2\pi n f_0 t) dt + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^T b_m \sin(2\pi m f_0 t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

根据三角函数的正交性, 可知方程右边的第一项和第三项积分为 0, 对于第二项, 当 $m=n$ 时, 才有

$$\int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \int_0^T a_n \cos(2\pi n f_0 t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \frac{T}{2} a_n$$

从而可求得系数

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

综上可得余弦函数部分系数的表达式为

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

(2) ① $\times \sin(2\pi n f_0 t)$ 后再 $[0, T]$ 上求定积分

$$\begin{aligned} & \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} [a_m \cos(2\pi m f_0 t) + b_m \sin(2\pi m f_0 t)] \right\} \cdot \sin(2\pi n f_0 t) dt \end{aligned} \quad (3)$$

■ 当 $n=0$ 时, 显然方程两边为恒等式, 结果均为 0, 没有意义。

■ 当 $n \neq 0$ 时

③式变为

$$\int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = \frac{a_0}{2} \int_0^T \sin(2\pi n f_0 t) dt + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^T a_m \cos(2\pi m f_0 t) \sin(2\pi n f_0 t) dt + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^T b_m \sin(2\pi m f_0 t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

同样的, 根据三角函数的正交性, 方程右边前两项的积分为 0, 且仅当 $m=n$ 时第三项不为 0, 所以

$$\int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = \int_0^T b_n \sin(2\pi n f_0 t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = \frac{T}{2} b_n$$

于是余弦部分的系数的表达式为

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

【总结一下】

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)] \quad (\text{周期为 } T) \\ \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt & (n=0, 1, 2, 3, \dots) \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt & (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases} & \begin{cases} a_{-n} = a_n \\ b_{-n} = -b_n \end{cases} \end{aligned}$$

5. 复数域上的傅立叶变换

利用欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 得到

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

于是

$$\begin{cases} \cos(2\pi n f_0 t) = \frac{1}{2} (e^{i \cdot 2\pi n f_0 t} + e^{-i \cdot 2\pi n f_0 t}), \\ \sin(2\pi n f_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{i \cdot 2\pi n f_0 t} - e^{-i \cdot 2\pi n f_0 t}) = -\frac{i}{2} (e^{i \cdot 2\pi n f_0 t} - e^{-i \cdot 2\pi n f_0 t}) \end{cases}$$

将它们代入到函数 $x(t)$ 的傅立叶展开中, 有

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{i \cdot 2\pi n f_0 t} + e^{-i \cdot 2\pi n f_0 t}) - \frac{i b_n}{2} (e^{i \cdot 2\pi n f_0 t} - e^{-i \cdot 2\pi n f_0 t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n - i b_n) e^{i \cdot 2\pi n f_0 t}] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n + i b_n) e^{-i \cdot 2\pi n f_0 t}] \quad (*) \end{aligned}$$

其中

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}(a_0 - ib_0)e^{i \cdot 2\pi 0 f_0 t}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n + ib_n)e^{-i \cdot 2\pi n f_0 t}] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} [(a_{-n} + ib_{-n})e^{i \cdot 2\pi n f_0 t}] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} [(a_n - ib_n)e^{i \cdot 2\pi n f_0 t}]$$

所以 $x(t)$ 的傅立叶展开变为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i 2\pi n f_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

令 $X_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, 则 X_n 称为**傅立叶系数**。

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt - i \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) [\cos(2\pi n f_0 t) - i \sin(2\pi n f_0 t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i 2\pi n f_0 t} dt \end{aligned}$$

【总结一下】

$$\text{傅立叶级数: } x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{i 2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{i 2\pi n f_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{傅立叶系数: } X_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i 2\pi n f_0 t} dt$$

【注】在前面的(*)式中, 我们对第三项进行了转换, 也可以对第二项转换, 即

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}(a_0 + ib_0)e^{-i \cdot 2\pi 0 f_0 t}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n - ib_n)e^{i \cdot 2\pi n f_0 t}] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} [(a_{-n} - ib_{-n})e^{-i \cdot 2\pi n f_0 t}] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} [(a_n + ib_n)e^{i \cdot 2\pi n f_0 t}]$$

这个时候傅立叶级数展开以及系数就变成了

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-i 2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-i 2\pi n f_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$X_n = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{i 2\pi n f_0 t} dt$$

6. 普遍形式的傅立叶变换公式及其他表达形式

令 $\Delta k = f_0 = \frac{1}{T}$ (基础频率), $k_n = n f_0$, 且对于周期函数, 有

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

于是

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\substack{\Delta k \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi k_n t} dt \right) e^{i2\pi k_n t} = \lim_{\substack{\Delta k \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta k \left(\int_0^T x(t) e^{-i2\pi k_n t} dt \right) e^{i2\pi k_n t} \\ &= \lim_{\substack{\Delta k \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta k \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi k_n t} dt \right) e^{i2\pi k_n t} \underline{\text{忽略下标} n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi kt} dt \right) e^{i2\pi kt} dk \end{aligned}$$

【如何理解基础频率 f_0 与频率 $k_n = nf_0$ ？】

在区域模式的研究中，往往要涉及边界条件问题。边界条件的提法不同，模拟的结果也会有差异，常见的边界条件提法有：固定值(Dirichlet)边界条件、梯度值(Neumann)边界条件、混合边界条件、周期性边界条件、开放边界条件、反射边界条件等等。这里通过周期性边界条件来理解，它是假定边界的一侧(开始)到另一侧(结束)具有相同的边界条件，从而使问题具有周期性重复。于是，假设在整个区域的空间尺度上有一最大周期为 T (与数学上的最小正周期不一样，它是最小正周期的整数倍)的波动，它对应的频率 $f_0 = \frac{1}{T}$ 就是这个空间上最小的频率，也就是基础频率，而其它频率的波动就可以看作是由基础频率叠加得到。

因此，普遍形式的傅立叶变换与逆变换形式为

$$\begin{cases} \text{正变换: } \hat{x}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi kt} dt \\ \text{逆变换: } x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(k) e^{i2\pi kt} dk \end{cases}$$

(1) 令 $s = 2\pi k$ ，则

$$\hat{x}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-ist} dt, x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(k) e^{ist} ds$$

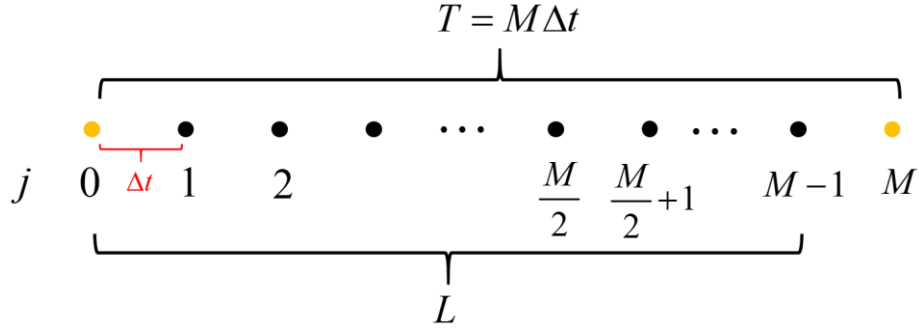
(2) 令 $s = \sqrt{2\pi}k, \tau = \sqrt{2\pi}t (\Rightarrow s\tau = 2\pi kt)$ ，则

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-is\tau} d\tau, x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(k) e^{is\tau} ds$$

将变量 s, τ 替换为 k, t ，则有

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-ikt} dt, x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(k) e^{ikt} dk$$

(3) 离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)



如上图所示的离散化格点，空间格点从 0 到 $M-1$ ，其中黄点表示相同的边界状态。这可以结合前面的周期性边界条件来理解，即 M 点开始又进入下一个重复周期，相当于又从 $j=0$ 开始循环。此时的傅立叶变换与逆变换表示为(将积分变成求和)

$$\begin{aligned}\hat{x}_n &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{M-1} x_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{T} n t\right) \Delta t \\ &= \frac{1}{M\Delta t} \sum_{j=0}^{M-1} x_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{M\Delta t} n \cdot j \Delta t\right) \Delta t = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_j \exp\left(-i 2\pi \frac{n}{M} j\right) \\ x_j &= \sum_{n=0}^{M-1} \hat{x}_n \exp\left(-i 2\pi \frac{n}{M} j\right)\end{aligned}$$

考虑三角函数的周期性，有

$$\exp\left(-i \frac{2\pi}{M} n j\right) = \exp\left[-i \frac{2\pi}{M} (n-M) j\right] \Rightarrow \hat{x}_n = \hat{x}_{n-M}$$

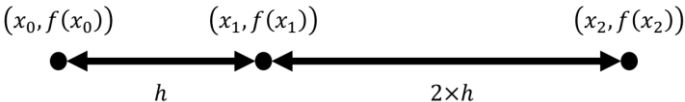
不妨令 $n = \frac{M}{2} + k \left[k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1, \frac{M}{2}, -\left(\frac{M}{2} - 1\right), -\left(\frac{M}{2} - 2\right), \dots, -1 \right]$ ，则有

$$\hat{x}_{\frac{M}{2}+1} = \hat{x}_{-\left(\frac{M}{2}-1\right)}, \hat{x}_{\frac{M}{2}+2} = \hat{x}_{-\left(\frac{M}{2}-2\right)}, \dots, \hat{x}_{M-1} = \hat{x}_{-1}$$

上述关系表明，在中心点 $\frac{M}{2}$ 之后的点可以用其之前的点来表示。这个结论是有实际意义的。我们知道，要表示出一个波动，至少需要两个格点(分别为波峰、波谷，从而可以知道波长)，所以对于 M 个格点，最多能表示的 $\frac{M}{2}$ 个波，在数学上， $k \geq \frac{M}{2}$ 是可以的，但在物理上，这是不可以的，因为当波数增多时，网格点将不

能正确的表示最小的波动，从而导致出现混淆误差(详见下一节内容)。

【例 4】已知 Lagrange 二次插值函数如下

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$


请利用上述信息设计方案求解 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 上的数值导数，并估算其截断误差。

【解】二次插值的几何意义是用通过三个点的抛物线来近似目标曲线，上述 $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ 前面的系数称为插值基函数，它可以通过如下方式来写出：

	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0
$l_1(x)$	0	1	0
$l_2(x)$	0	0	1

通过 Taylor 展开可以知道，中央差的精度要高于前差和后差，即(如果是考试单独考察该题应该需要将中央差分的二阶精度如何来的推导过程写出来)

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1+h) - f(x_1-h)}{2h} + O(\Delta^2)$$

现在已知的格点有

$$[x_0(x_1-h), f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2(x_1+2h), f(x_2)]$$

因此我们需要通过二次插值函数求解 $f(x_1+h)$ 处的函数值，即

$$f(x_1+h) = -\frac{1}{3}f(x_0) + f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2)$$

于是

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}[-4f(x_0) + f(x_1) + 3f(x_2)] = \frac{1}{6h}[-4f(x_1-h) + f(x_1) + 3f(x_1+2h)]$$

其截断误差的精度为关于 h 的二次，即 $O(h^2)$ 。

第四讲 混淆误差与数值频散

1. 混淆(aliasing)误差与奈奎斯特(Nyquist)采样定理

Nyquist 采样定理是数字信号处理中的一个基本定理,提出者是美国工程师 Harry Nyquist。它的表述为: 如果一个信号的最高频率为 f_{max} , 那么采样频率 f_s 必须至少是 $2f_{max}$, 即 $f_s \geq 2f_{max}$ 。Nyquist 频率是采样频率的一半, 通常表示为 $f_N = \frac{f_s}{2}$, 信号的最高频率 f_{max} 不该超过 Nyquist 频率, 否则就会发生混淆误差。

Nyquist 定理的实质是, 为了正确地还原连续信号, 采样频率必须足够高, 以至于可以捕捉信号中的最高频率部分(波长短、波数大), 如果采样频率太低, 高频信号就会被错误地解释为低频信号(波长短、波数大的部分被映射到了波长长、波数小的波上面), 导致混淆误差的出现。

在数值模式中, 通常空间格点分辨率都是一定的, 即网格间距的最小值是确定的, 这样模式中必然会存在波长小于最小网格间距的波动存在(即高频、高波数的波动), 从而导致了混淆误差的出现。

在一个波长中, 要完整的表示出一个波动, 在一个波长范围内至少需要两个格点(分别表示波峰和波谷)。假设波长为 L , 网格间距为 Δ , 根据前面的分析, 一个波长范围内的格点应满足

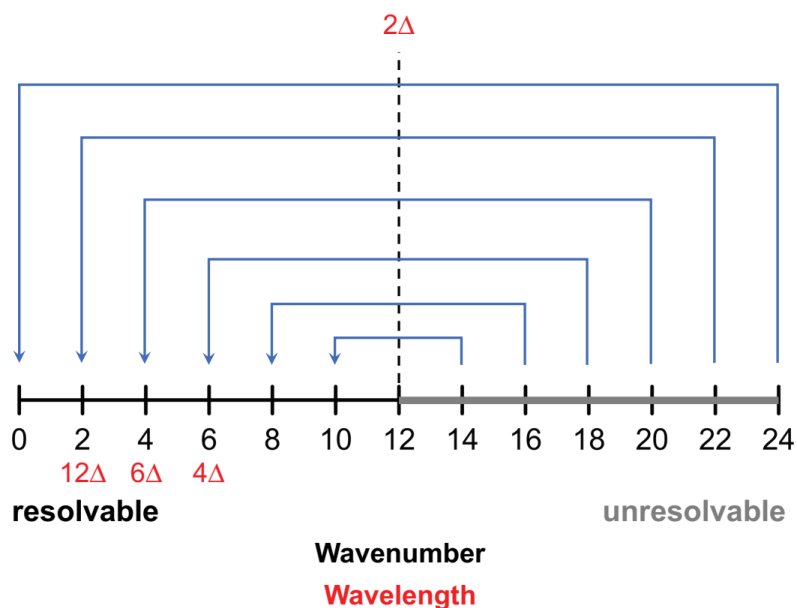
$$ppw = \frac{L}{\Delta} \geq 2 \Rightarrow \frac{kL}{k\Delta} = \frac{2\pi}{k\Delta} \geq 2 \Rightarrow k \leq \frac{\pi}{\Delta} \left(k_{max} = \frac{\pi}{\Delta} \right)$$

(这里使用的是角波数, 所以波长与波数的乘积是一个 2π)

【PPW】Points Per Wavelength, 表示每个波长(即周期)内的格点数。

【混淆误差】因为模式的分辨率是一定的, 当出现波长小于最小网格间距的信号时, 这些波将不会被捕捉到, 而是被错误地映射到了波长较大、频率较低的信号上, 从而出现混淆误差。

2. 对混淆误差的理解



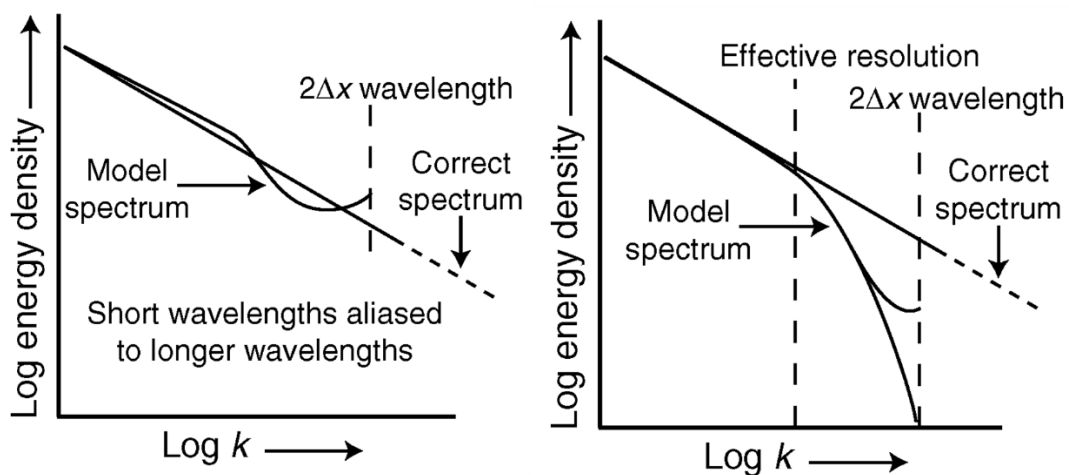
Warner (2011)

对于波数大于 12(波长小于 2Δ 的波), 模式不能分辨, 而根据前面一节最后提到的周期性, 有结论

$$\hat{x}_{\frac{M}{2}+1} = \hat{x}_{-\left(\frac{M}{2}-1\right)}, \hat{x}_{\frac{M}{2}+2} = \hat{x}_{-\left(\frac{M}{2}-2\right)}, \dots, \hat{x}_{M-1} = \hat{x}_{-1}$$

$$\hat{x}_{13} = \hat{x}_{-13}, \hat{x}_{14} = \hat{x}_{-12}, \dots, \hat{x}_{23} = \hat{x}_{-1}$$

也就是说混淆误差来源于波动本身的周期性, 通过这种周期装换, 将模式中不能分辨率的短而高频的波动映射到可以分辨的长而低频的波动上去。



Adapted from Skamarock (2014)

在上面的左图中, 反映的是混淆误差的产生。在数学上, 理论的能谱图是一条线性直线, 但是在实际的数值模式中, 受到模式分辨率的限制, 能谱图只能到

2Δ 处。模式中不能分辨的高频波动不代表实际没有,而是通过波动的周期性作用(或者其他一些非线性过程)映射到模式可分辨的波动上,从而会造成模式识别的波动实际波动存在了差异(左图的中 Correct Spectral 和 Model Spectral 的差异),并且造成能量堆积(左图中的 2Δ 处的曲线上翘),会造成计算的不稳定。

为了解决这种不稳定,便通过滤波的方式,滤掉了高频的短波部分,保证数值计算的稳定进行(右图)。但是滤波的方式本身具有误差存在,所以可以看到右图中,随着波数的增大,短波部分的误差越来越大,便又提出了**有效分辨率(Effective Resolution)**的概念,当然,有效分辨率并不是固定的,取决于不同的滤波手段与误差控制。

3. 混淆误差的数学解释

假定有两个一维离散模态 $A(x_j) = e^{imj\Delta}$, $B(x_j) = e^{inj\Delta}$, 其中 m 和 n 分别为(角)波数, 均能被网格正确的表示(即满足 $m, n \leq k_{\max} = \frac{\pi}{\Delta}$), 那么在经过非线性作用后, 有

$$AB = e^{ikj\Delta} \quad (k = m + n)$$

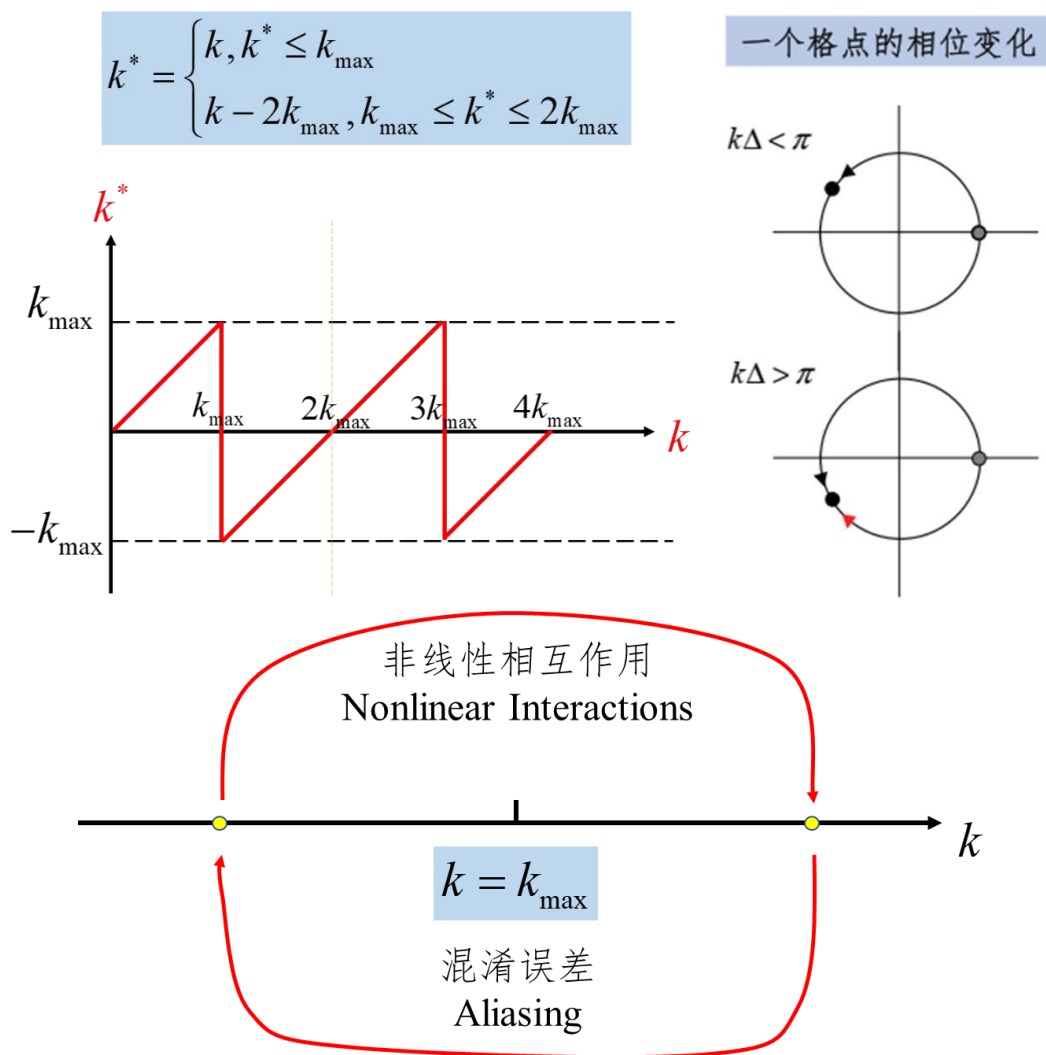
即经过非线性相互作用后, 生成了波数更大、波长更短的波, 从而就会导致混淆误差的产生。假设 $k_{\max} \leq k \leq 2k_{\max}$, 根据三角函数的周期性, 有

$$\begin{aligned} \sin(kj\Delta) &= \sin[(2k_{\max} - 2k_{\max} + k)j\Delta] = \sin[2k_{\max}j\Delta - (2k_{\max} - k)j\Delta] \\ &= \sin[2\pi j - (2k_{\max} - k)j\Delta] = \sin[-(2k_{\max} - k)j\Delta] = \sin(k^*j\Delta) \quad [k^* = k - 2k_{\max}] \end{aligned}$$

k^* 即为我们看到的实际波数。当然, 也可以假设

$$2k_{\max} \leq k \leq 3k_{\max}, 3k_{\max} \leq k \leq 4k_{\max}, \dots$$

分析方法就是利用三角函数的周期性, 得到 k^* 的表达式(如下图所示)。这里我们以 $k_{\max} \leq k \leq 2k_{\max}$ 来进行分析。当 $k \leq \frac{\pi}{\Delta}$, 即 $k\Delta \leq \pi$ 时, 表示格点的位相变化在上半平面, 实际波数 k^* 就是非线性作用后相加的波数 k ; 而当 $k \geq \frac{\pi}{\Delta}$, 即 $k\Delta \geq \pi$ 时, 表示格点的位相变化在下半平面, 实际波数 k^* 为 $k - 2k_{\max}$, 原本应该是顺时针的位相变化实际上被当成了逆时针的变化, 这样就出现了混淆误差。



【例 5】一个车轮每秒旋转 M 转，除了外沿一个点为红色外其它地方都是灰色，对该轮子以每秒 m 帧的帧率录像，那么：

- (1) 为了避免 *aliasing*， m 必须满足什么条件？
- (2) 给定 M 和 m ，录像中看到的车轮旋转速率是多少？
- (3) 在什么条件下车轮会看上去向后转？

【解】(1) 根据 *Nyquist* 采样定理，要避免混淆误差，采样频率必须至少是信号(最高)频率的两倍，从而有 $m \geq 2M$ 。或者已知采样频率为 m ，那么可以知道 *Nyquist* 频率为 $\frac{m}{2}$ ，信号频率不应超过 *Nyquist* 频率，即 $M \leq \frac{m}{2} \Rightarrow m \geq 2M$ 。

(2) 已知录像的频率为每秒 m 帧的帧率，所以每一帧拍摄的时间间隔为

$$\Delta = \frac{1}{m}(\text{s})$$

于是 $k_{\max} = \frac{\pi}{\Delta} = m\pi$ ，已知实际的波数为 $k = 2\pi M$ ，能辨别的波数为

$$-k_{\max} \leq k^* \leq k_{\max} \quad (k^* = k - 2nk_{\max}) \quad (n \text{ 为正整数})$$

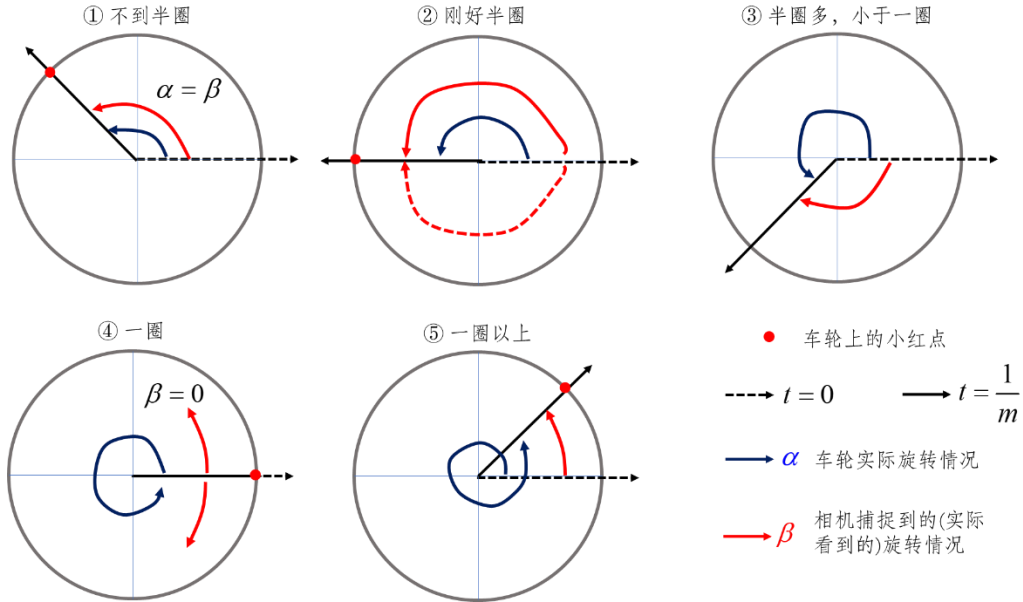
与前面相比乘了 n ，因为在采样时间内车轮实际可以转 2π 以上，即可以转一圈以上，将上述不等式进行化简

$$\frac{k}{2k_{\max}} - \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{k}{2k_{\max}} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{M}{m} - \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{M}{m} + \frac{1}{2}$$

因为 n 是正整数，所以有 $n = \left\lceil \frac{M}{m} + \frac{1}{2} \right\rceil$ ，于是实际看到的转速为

$$k^* = k - 2nk_{\max} = 2\pi \left(M - \left\lceil \frac{M}{m} + \frac{1}{2} \right\rceil m \right)$$

(3) 在采样时间 $\Delta = \frac{1}{m}$ 内，车轮的旋转情况可以分为以下几类：



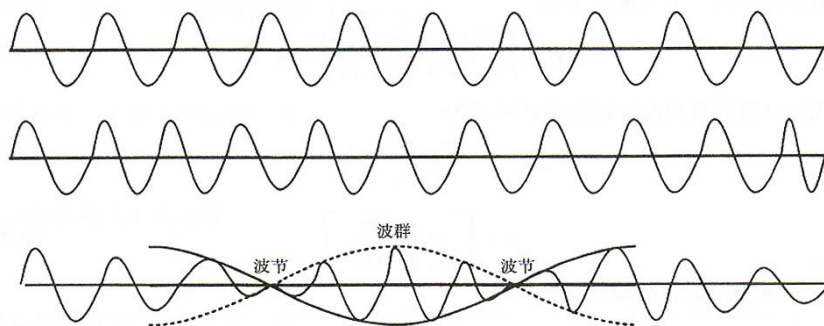
对于情况②和④的情形，不好判断到底是向前还是向后旋转，这两种情形应该是需要被排除的。对于情形①和⑤，我们看到的是向前旋转，对于情形③则是向后旋转。下面讨论情形③向后转的条件。

在 $\Delta = \frac{1}{m}$ 内车轮旋转的圈数为 $\frac{m}{M}$ ，则未转完一圈的部分可以表示为

$$N = \frac{m}{M} - \left\lfloor \frac{m}{M} \right\rfloor$$

于是当 $0.5 < N < 1$ 时，就会出现后转的情形。对应的转速为 $m(N-1)$ (表示每秒转了多少圈， $N-1$ 小于 0，因为是倒着旋转的)

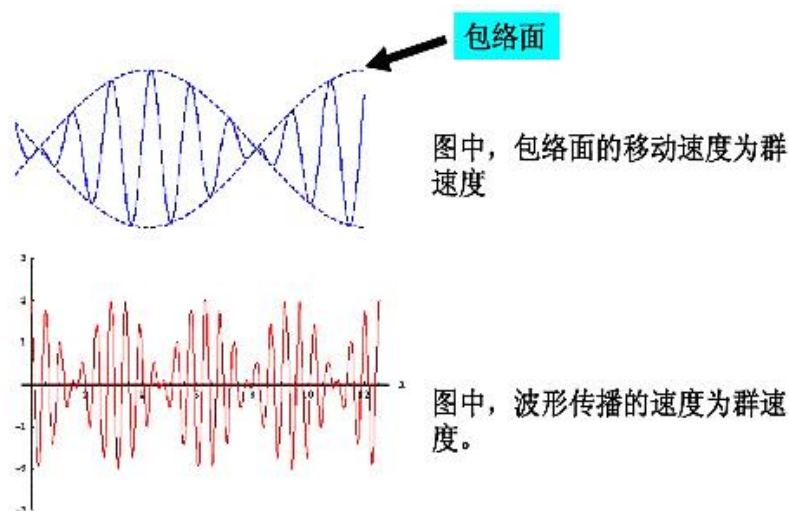
4. 群速度与相速度



假设有两列振幅相同、波周期略有差异的正弦波

$$\begin{cases} f_1(x, t) = A \cos \left[\left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right] \\ f_2(x, t) = A \cos \left[\left(k - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right] \end{cases} \quad (\Delta k \ll k, \Delta \omega \ll \omega)$$

它们叠加后，为 $f(x, t) = f_1 + f_2 = 2A \cos(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$



可以看到，群波是两种波动的乘积，一种是**高频载波**，其波数、圆频率与各单谐波相近；另一种是**低频调制波动**，其波数、圆频率远小于各单谐波的。它是高频载波的“范围线”，该“范围线”也称为包络线或波包。波包是高频载波最大振幅点的连线。波群中等振幅点的移速称为群速度，用符号 c_g 表示。它可以理解为波包的移速，群速度也表示群波的能量传播速度。

由定义可以知道，群速度的表达式为 $c_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ ，取极限，得到群速度

的数学表达式为 $c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}$ 。若相速度与波数无关(不依赖于波数)，

则 $\frac{dc}{dk} = 0 \Rightarrow c_g = c$ ，即群速度与相速度相等，它表示波的能量随高频载波一起移

动，因而能量不频散，称为非频散波。反之，如果相速度与波数有关，则波群能量的传播速度就与高频载波的不一致，此现象称为频散现象，对应的波称为频散波。

5. 数值求解过程的群速度、相速度误差

对于一维平流方程：

$$\begin{cases} PDE: \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ FDE: \frac{\partial f_j}{\partial t} + c f'_j = 0 \end{cases} \left(f'_j \approx \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

其准确解： $\varphi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} = A e^{ik(x - ct)}$

数值解为： $f_j(t) = A e^{i(kx_j - \omega' t)} = A e^{ik(x_j - c' t)}$

容易得到 $\frac{\partial f_j}{\partial t} = -i\omega' f_j$ ，而在前面讨论修正波数的时候，有关系 $f'_j = ik f_j$ ，于是

$$-i\omega' f_j + ik' c f_j = 0 \Rightarrow \omega' = k' c$$

于是我们可以得到差分方程的相速度和群速度为

$$c' = \frac{\omega'}{k} = \frac{k'}{k} c, c'_g = \frac{d\omega'}{dk} = c \frac{dk'}{dk}$$

例如，对于二阶精度的中央差分，有 $f'_j = \frac{1}{2\Delta} (f_{j+1} - f_{j-1})$ ，易得 $k' = \frac{f'_j}{if_j} = \frac{\sin k\Delta}{\Delta}$ ，

于是 $c' = \frac{k'}{k} c = \frac{\sin k\Delta}{k\Delta} c, c_g = c \frac{d}{dk} \left(\frac{\sin k\Delta}{\Delta} \right) = c \cos k\Delta$

【例 6】对于一维平流方程，考虑四阶精度的中央差分格式(CTD)和紧致差分格式(CTFD)，求两种差分格式下的群速度和相速度。

$$(1) (CTD) f'_j = \frac{4}{3} \frac{1}{2\Delta} (f_{j+1} - f_{j-1}) - \frac{1}{3} \frac{1}{4\Delta} (f_{j+2} - f_{j-2});$$

$$(2) (CTFD) f'_{j-1} + 4f'_j + f'_{j+1} = \frac{3}{\Delta} (f_{j+1} - f_{j-1})$$

【解】(1) CTD

$$k' = \frac{f'_j}{if_j} = \frac{4}{3} \frac{\sin k\Delta}{\Delta} - \frac{1}{3} \frac{\sin 2k\Delta}{2\Delta}$$

$$c' = \frac{k'}{k} c = \frac{8\sin k\Delta - \sin 2k\Delta}{6k\Delta} c, c_g = c \frac{dk'}{dk} = \left(\frac{4}{3} \cos k\Delta - \frac{1}{3} \cos 2k\Delta \right) c$$

(2) CTFD

$$ik' (e^{-ik\Delta} + 4 + e^{ik\Delta}) = \frac{3}{\Delta} (e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}) \Rightarrow k' = \frac{3\sin k\Delta}{\Delta(2 + \cos k\Delta)}$$

$$c' = \frac{k'}{k} c = \frac{3\sin k\Delta}{k\Delta(2 + \cos k\Delta)} c, c_g = c \frac{dk'}{dk} = -\frac{3(1 + 2\cos k\Delta)}{(2 + \cos k\Delta)^2} c$$

第五讲 大气重力波部分

1. 浮力频率的导出(Brunt-Väisälä 频率)

在大气中, 假设在高度为 z_0 处的气块经过一小扰动后, 离开平衡位置的距离为 δz (向上或向下均可以), 那么此时它的受力情况为

$$F_{net} = F_{buoyancy} - mg = [\rho_{env}(z_0 + \delta z) - \rho_{parcel}(z_0 + \delta z)]gV_{parcel}$$

根据牛顿第二定律, 气块的加速度为

$$F_{net} = ma = \rho_{parcel}(z_0 + \delta z)V_{parcel}\frac{d^2\delta z}{dt^2}$$

联立上述两个方程, 得到气块加速度的表达式为

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = \frac{\rho_{env}(z_0 + \delta z) - \rho_{parcel}(z_0 + \delta z)}{\rho_{parcel}(z_0 + \delta z)}g$$

在小扰动的过程中, 我们有准静态假设, 即在气块缓慢的移动的过程中, 始终保持一个平衡态, 即气块的气压与环境的气压始终相同($p_{env} = p_{parcel}$)。对于理想

气体, 有状态方程 $p = \rho RT$, 从而得到 $\frac{\rho_{parcel}}{T_{env}} = \frac{\rho_{env}}{T_{parcel}}$, 代入上述方程中, 得到

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -\frac{T_{env}(z_0 + \delta z) - T_{parcel}(z_0 + \delta z)}{T_{env}(z_0 + \delta z)}g$$

对分子中的温度进行一阶 Taylor 展开, 有

$$T_{env}(z_0 + \delta z) - T_{parcel}(z_0 + \delta z) = \left[T_{env}(z_0) + \frac{\partial T_{env}}{\partial z} \delta z \right] - \left[T_{parcel}(z_0) + \frac{\partial T_{parcel}}{\partial z} \delta z \right]$$

在 z_0 处, 气块处于平衡态, 所以应有 $T_{env}(z_0) = T_{parcel}(z_0)$, 从而

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -\frac{g}{T_{env}} \left(\frac{\partial T_{env}}{\partial z} - \frac{\partial T_{parcel}}{\partial z} \right) \delta z$$

对于干绝热过程, 气块的减温率满足 $\frac{\partial T_{parcel}}{\partial z} = -\frac{g}{c_p}$, 所以

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -\frac{g}{T_{env}} \left(\frac{\partial T_{env}}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) \delta z$$

已知位温的表达式为 $\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ ，两边取对数后再对 z 求导，有

$$\ln \theta_{env} = \ln T_{env} + \frac{R}{c_p} (\ln p_{00} - \ln p_{env})$$

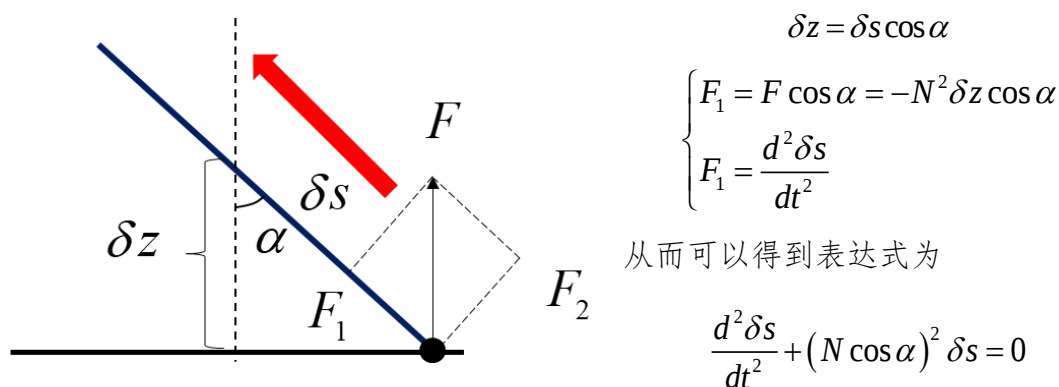
$$\frac{1}{\theta_{env}} \frac{\partial \theta_{env}}{\partial z} = \frac{1}{T_{env}} \frac{\partial T_{env}}{\partial z} - \frac{R}{p_{env} c_p} \frac{\partial p_{env}}{\partial z} = \frac{1}{T_{env}} \left(\frac{\partial T_{env}}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right)$$

于是最终的加速度表达式为

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} + N^2 \delta z = 0 \left(N^2 = \frac{g}{\theta_{env}} \frac{\partial \theta_{env}}{\partial z} \right)$$

上述方程是一个二阶常系数线性齐次微分方程，具有波动解的形式，其特征值为 $r = \pm iN$ ，通解为 $\delta z = \exp(\pm iNt)$ 。

【注】如果振荡不在垂直方向，而是沿着倾斜方向振荡



此时通解为 $\delta s = \exp(\pm iN \cos \alpha t)$

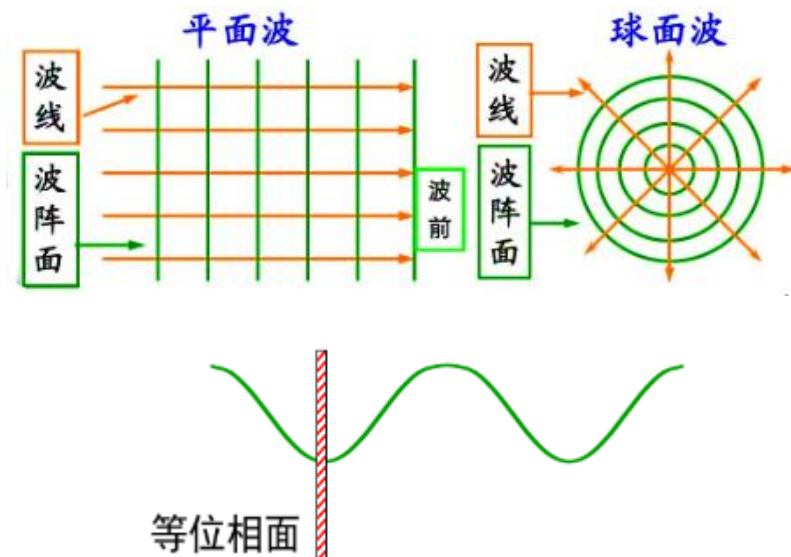
2. 简谐波方程及有关性质

简谐振动在空间的传播形成了简谐波动。

- 一维情形: $f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$
- 二维情形: $f(x, y, t) = A \cos(kx + ly - \omega t)$
- 三维情形: $f(x, y, z, t) = A \cos(kx + ly + mz - \omega t)$

其中 k, l, m 分别表示 x, y, z 方向上的波数。

一维简谐波方程为 $f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$ ，其中位相 $\theta = kx - \omega t + \alpha$ ，称 $\theta = \text{const}$ 的点构成的面为等位相面。等位相面是平面，称为平面波(如重力表面波)；等位相面是球面，称为球面波(如电磁波)。



【注】

- ① 波面(波阵面): 同一时刻, 介质中处于振动状态相同的质点所构成的面叫做波面, 因此波面又称为等位相面;
- ② 波线: 用来表示波的传播方向、与波面垂直的线叫做波线。

对于 $f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$ ，其等位相面与 x 轴垂直。等位相面沿着 x 方向的移动速度称为相速度。它反应了波的廓线移动速度。设等位相面经过 Δt 传播了距离 Δx ，根据等位相面的公式有

$$k\Delta x - \omega\Delta t = 0 \Rightarrow c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

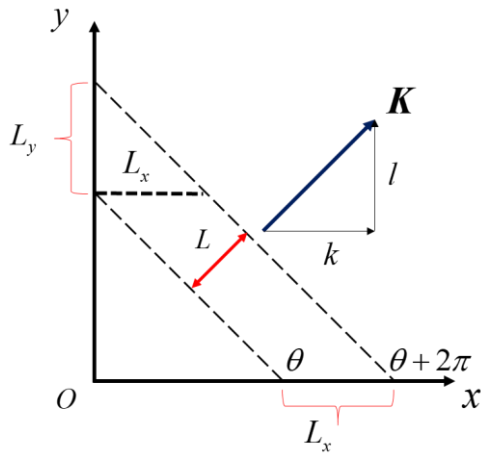
对于高维情况，以三维情形 $f(x, y, z, t) = A \cos(kx + ly + mz - \omega t)$ 为例，位相 $\theta = kx + ly + mz - \omega t$ ，显然有关系式

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}, k = \frac{\partial \theta}{\partial x}, l = \frac{\partial \theta}{\partial y}, m = \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

定义波数矢量 $\mathbf{K} = k\mathbf{i} + l\mathbf{j} + m\mathbf{k} = \nabla\theta$ ，同一维一样，波矢垂直于等位相面，其模称为全波数 $K = |\mathbf{K}| = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$ ，设位置矢量 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，此时的等位相面可以表示为

$$\theta = \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t$$

于是相速度为 $\mathbf{c} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\theta=\text{const}} = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{K^2} \mathbf{K}$



以二维为例，如左图所示，利用面积相等，可以得到关系式：

$$L = \frac{L_x L_y}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}$$

若记波动传播方向的单位矢量为 $\frac{\mathbf{K}}{K} (\mathbf{K} = k\mathbf{i} + l\mathbf{j})$ ，于是有相速度矢量

$$\mathbf{c} = \frac{L}{T} \frac{\mathbf{K}}{K} = \frac{\omega}{K^2} \mathbf{K}$$

值得注意的是， c 在 x, y 方向的分量 c_x, c_y 一般情形下并不等于 c_{px}, c_{py} ，故相速度矢量 $\mathbf{c}$ 并不具有运动速度矢量那样的特性。[$\mathbf{c}_g = (c_{gx}, c_{gy}), \mathbf{c}_p \neq (c_{px}, c_{py})$]

3. 重力内波的控制方程组

考虑以下的假设：(1)二维情形(x-z 空间)；(2)大气均质不可压；(3)大气层结稳定，浮力频率可以视为常数；(4)不考虑地球旋转效应；(5)忽略声波，即

$$\left| \bar{\rho} \frac{\theta'}{\theta} \right| \gg \left| \frac{p'}{c_s^2} \right| (c_s \text{ 为声速})。 \text{ 此时的原始方程组可以写为：}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \left[\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right] \end{cases}$$

利用小扰动法，将各个变量的分解为平均场和小扰动场：

$$u = \bar{u} + u'(x, z, t), w = w'(x, z, t) \\ \rho = \bar{\rho} + \rho'(x, z, t), p = \bar{p}(z) + p'(x, z, t), \theta = \bar{\theta}(z) + \theta'(x, z, t)$$

将它们代入上述方程组中，有

(1) x 方向动量方程简化

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + w' \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial[\bar{p}(z) + p']}{\partial x} \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

这里的化简其实已经用到了 Boussinesq 近似，即只在垂直方向上保留与密度扰动相关的项，所以水平压强项的密度 ρ 直接替换成了 $\bar{\rho}$ 。

(2) z 方向动量方程简化

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial[\bar{p}(z) + p']}{\partial z} - g$$

主要是对方程右边的化简，我们假设基本态是满足静力平衡的，即 $\frac{\partial \bar{p}(z)}{\partial z} = -\bar{\rho}g$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^{-1} \xrightarrow{\text{一阶Taylor展开}} \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \\ -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \cancel{\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial p'}{\partial z}} \\ &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + g - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) g \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g$$

(3) 连续方程项与热力学方程项

$$\begin{cases} \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial(\bar{\theta} + \theta')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{\theta} + \theta')}{\partial x} + w' \frac{\partial(\bar{\theta} + \theta')}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

(4) 密度与位温的近似关系

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} = \frac{p}{\rho R_d} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} = \rho^{-1} R_d^{-1} p^{1 - \frac{R_d}{c_p}} p_0^{\frac{R_d}{c_p}} = \rho^{-1} R_d^{-1} p^{\frac{c_p}{c_p}} p_0^{\frac{R_d}{c_p}}$$

两边取对数，代入相关变量的分解

$$\ln \theta = \frac{1}{\gamma} \ln p - \ln \rho + \text{const} \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right)$$

$$\ln \left[\bar{\theta} \left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) \right] = \frac{1}{\gamma} \ln \left[\bar{p} \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}} \right) \right] - \ln \left[\bar{\rho} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \right] + \text{const}$$

$$\ln \bar{\theta} = \frac{1}{\gamma} \ln \bar{p} - \ln \bar{\rho} + \text{const}$$

$$\ln \left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) = \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}} \right) - \ln \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)$$

利用等价无穷小 $\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$ ，得到关系 $\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}$ ，即

$$\rho' \approx -\bar{\rho} \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{p}\gamma} p' = -\bar{\rho} \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{p'}{c_s^2} \left(c_s = \sqrt{\frac{\bar{p}\gamma}{\bar{\rho}}} \right)$$

根据前面的假设，有 $\left| \bar{\rho} \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right| \gg \left| \frac{p'}{c_s^2} \right|$ (c_s 为声速)，所以 $-\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx \frac{\theta'}{\bar{\theta}}$

综上，经过线性化后的扰动形势的方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 & (1) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g = 0 & (2) \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 & (3) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta' + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 & (4-1) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + w' \frac{N^2}{g} = 0 & (4-2) \end{cases}$$

【注意】方程(4-1)与(4-2)是等价的。

4. 重力内波的方程求解——频散关系、相速度及群速度

(1) 解法一：动力气象学中的算子行列式(扰动量具有相似的波动解)

根据 3 中的方程(1)-(3)及(4-2)，写出算子行列式如下

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} u' & w' & \frac{p'}{\bar{\rho}} & \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \\ \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & -g \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^2}{g} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - N^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(2) 解法二：消元法

利用 3 中的方程(1)-(4-1)。

① $\frac{\partial(2)}{\partial x} - \frac{\partial(1)}{\partial z}$ ，消去压强项；

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} \right) - \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \theta'}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

② $\frac{\partial(5)}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial(3)}{\partial z}$ ，消去水平速度扰动项；

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) - \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) (6) + \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial^2 (4-1)}{\partial x^2}, \text{ 消去位温扰动项。}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) + N^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0$$

不妨考虑如下的波动解：

$$\hat{w} = w_r + iw_i, m = m_r + im_i, \phi = kx + mz - \omega t$$

于是

$$\begin{aligned} w' &= \text{Re}[\hat{w} \exp(i\phi)] \\ &= \text{Re}[(w_r + iw_i) \cdot \exp(i(kx + m_r z - \omega t)) \cdot \exp(-m_i z)] \\ &= (w_r \cos \phi' - w_i \sin \phi') \exp(-m_i z) (\phi' = \text{Re}(\phi) = (kx + m_r z - \omega t)) \end{aligned}$$

这里假设水平波数总是为实数，而垂直波数为虚数。实数部分表示波动在 z 方向上按照正弦(余弦)的方式进行，而虚数部分表示 z 方向的振幅按照指数衰减形式。

设波动解为 $w' = W e^{i(kx + mz - \omega t)}$ ，代入上述方程中，得到

$$(-i\omega + \bar{u}ik)^2 [(ik)^2 + (im)^2] + N^2 (ik)^2 = 0 \Leftrightarrow (\omega - k\bar{u})^2 (k^2 + m^2) - k^2 N^2 = 0$$

于是纯重力内波的频散关系为 $\omega = \bar{u}k \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}}$

从而可以求得在重力内波在 x, z 方向上的相速度为

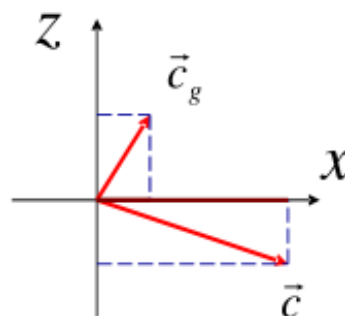
$$\begin{aligned} c_x = \frac{\omega}{k} &= \bar{u} \pm \frac{N}{\sqrt{k^2 + m^2}}, c_y = \frac{\omega}{m} = \bar{u} \frac{k}{m} \pm \frac{N}{m\sqrt{k^2 + m^2}} \\ \mathbf{c} = \frac{\omega}{K} \cdot \frac{\mathbf{K}}{K} &= \frac{\bar{u}k \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}}}{\sqrt{k^2 + m^2}} (ki + mk) = \frac{\bar{u}k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \pm \frac{Nk}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (ki + mk) \end{aligned}$$

群速度为

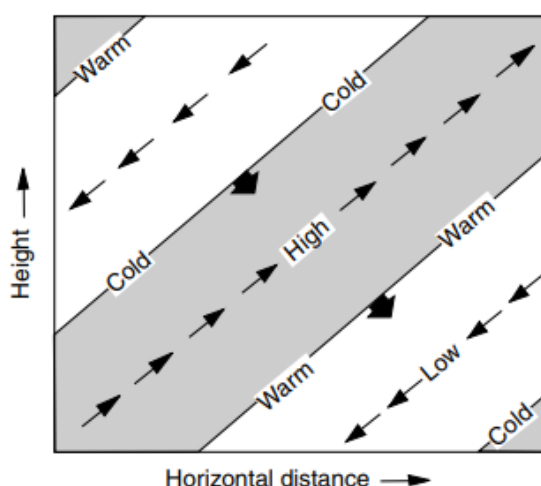
$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \mathbf{k} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \\ c_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \pm \frac{-Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \end{array} \right.$$

5. 背景风场 $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ 时的重力内波

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c} = \pm \frac{\omega}{K} \frac{\mathbf{K}}{K} = \pm \frac{Nk}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (k\mathbf{i} + m\mathbf{k}) \\ \mathbf{c}_g = \pm \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \mathbf{k} \right) = \pm \frac{Nm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (m\mathbf{i} - k\mathbf{k}) \end{array} \right.$$



- ① 相速度和群速度的传播方向垂直，即 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}_g = 0$ ；
- ② 从**水平方向**来看，相速度矢量 $\frac{Nk^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{i}$ 与群速度矢量 $\frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{i}$ 的**大小不同，方向一致**；但在**垂直方向上分量大小相同，方向相反**，相速度矢量为 $\frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{k}$ ，群速度矢量为 $-\frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{k}$ ；
- ③ 对于 $\omega > 0, k > 0, m < 0$ (代表等位相面向东倾斜)，结合特点②，可以推出波动位相向东向下传播，同时能量向东上传播；



- ▲ 重力内波的压力、温度和速度扰动阶段的理想截面。细箭头表示扰动速度场，短粗实箭头表示相速度。阴影显示向上运动的区域

6. 重力内波的极化关系(Polarization Equation)——反映扰动位相的关系

假设扰动量均具有谐波解的形式:

$$u' = \hat{u}e^{i\phi}, w' = \hat{w}e^{i\phi}, p' = \hat{p}e^{i\phi}, \theta' = \hat{\theta}e^{i\phi} (\phi = kx + mz - \omega t)$$

将它们代入到前面的得到的线性化扰动方程的中, 有

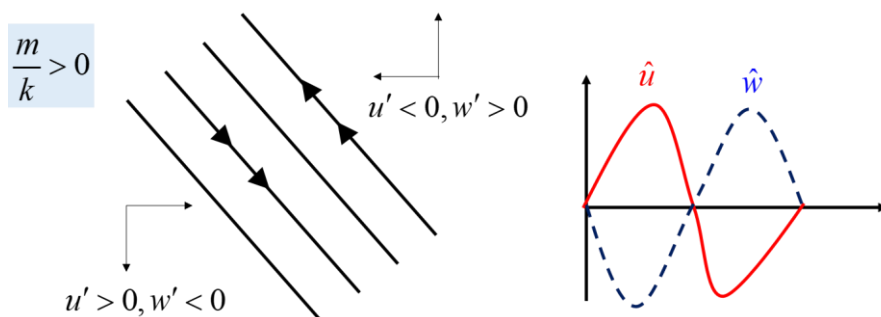
$$\begin{cases} -i\omega\hat{u} + ik\bar{u}\hat{u} = -ik\frac{\hat{p}}{\bar{\rho}} \\ -i\omega\hat{w} + ik\bar{u}\hat{w} = -im\frac{\hat{p}}{\bar{\rho}} + g\frac{\hat{\theta}}{\bar{\theta}} \\ ik\hat{u} + im\hat{w} = 0 \\ -i\omega\hat{\theta} + ik\bar{u}\hat{\theta} + \hat{w}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{u} = -\frac{m}{k}\hat{w} \\ \hat{p} = \frac{\bar{\rho}\hat{u}(\omega - k\bar{u})}{k} = -\frac{\bar{\rho}m\Omega}{k^2}\hat{w} \quad (\Omega = \omega - k\bar{u}) \\ \hat{\theta} = \frac{1}{i(\omega - k\bar{u})}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\hat{w} = -\frac{i}{\Omega}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\hat{w} \end{cases}$$

Ω 称为固有频率(Intrinsic Frequency), 表示重力内波相对于背景风场的频率(而 ω 则是相对于地面的频率)。下面来理解一下 $\hat{u}, \hat{p}, \hat{\theta}$ 与垂直扰动 $\hat{w}$ 之间的关系。

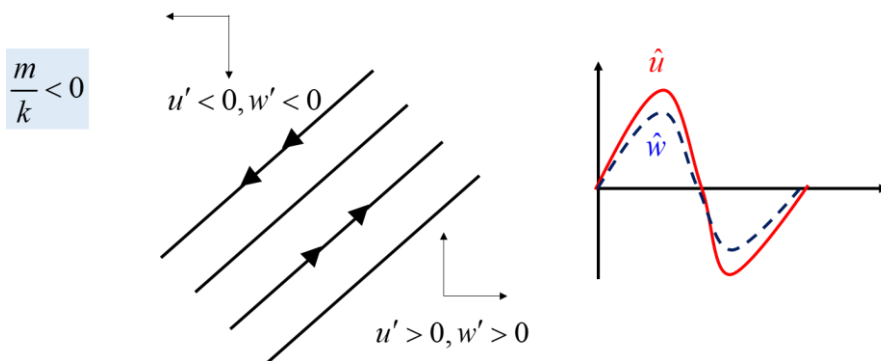
(1) $\hat{u}$ 与 $\hat{w}$

因为 $\hat{u} = -\frac{m}{k}\hat{w}$, 所以 $\hat{u}$ 与 $\hat{w}$ 的关系取决于 $\frac{m}{k}$ 的符号。

- $\frac{m}{k} > 0$, $\hat{u}$ 与 $\hat{w}$ 反相位, 波动的等位相线向左(西)倾斜;



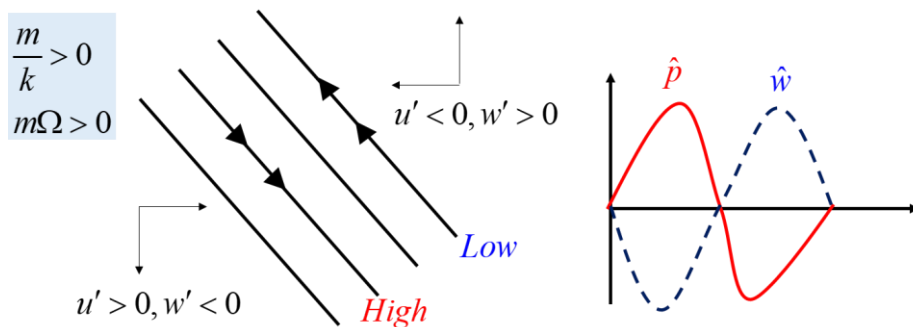
- $\frac{m}{k} < 0$, $\hat{u}$ 与 $\hat{w}$ 同相位, 波动的等位相线向右(东)倾斜;



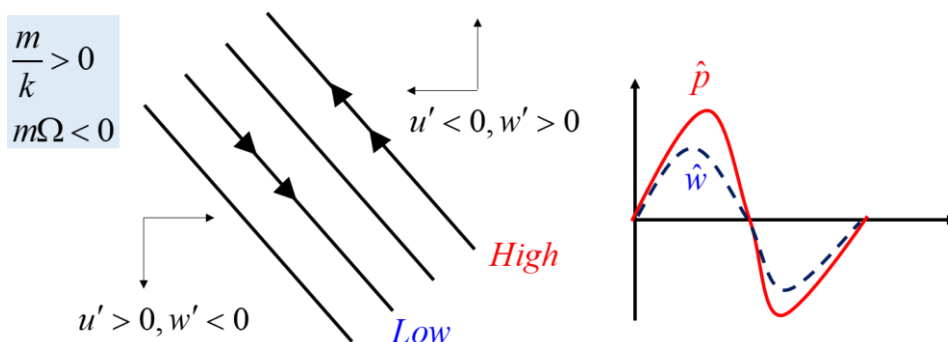
(2) $\hat{p}$ 与 $\hat{w}$

因为 $\hat{p} = -\frac{\bar{\rho}m\Omega}{k^2}\hat{w}$ ，所以 $\hat{p}$ 与 $\hat{w}$ 的关系取决于 $m\Omega$ 的符号(下面的案例在 $\frac{m}{k} > 0$ 的条件下给出)。

■ $m\Omega > 0$ ， $\hat{p}$ 与 $\hat{w}$ 反相位；



■ $m\Omega < 0$ ， $\hat{p}$ 与 $\hat{w}$ 同相位；

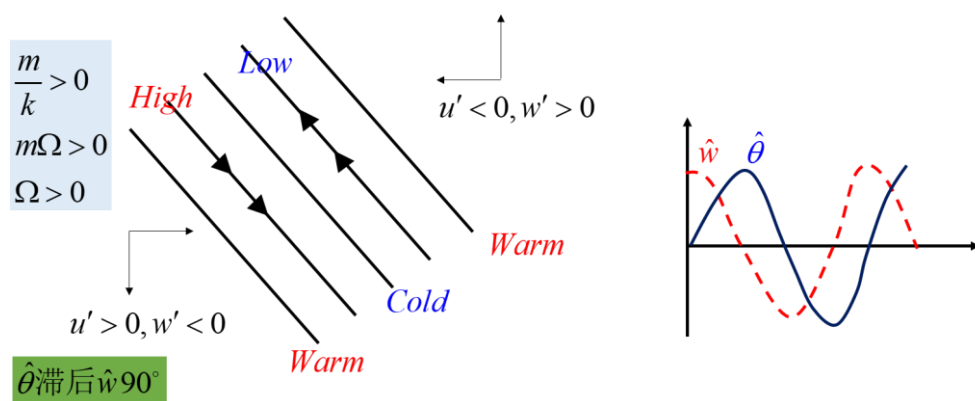


(3) $\hat{\theta}$ 与 $\hat{w}$

已知 $\hat{\theta} = -\frac{i}{\Omega} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \hat{w}$ ，需要注意的是，这里还乘了一个虚数 i ——其几何意义

表示旋转作用，根据欧拉公式，有 $e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ ，由此可以知道 $\hat{\theta}$ 与 $\hat{w}$ 之间的位相差了 90° ，至于位相是超前(顺时针旋转)还是滞后(逆时针旋转)，就取决于 Ω 的符号。

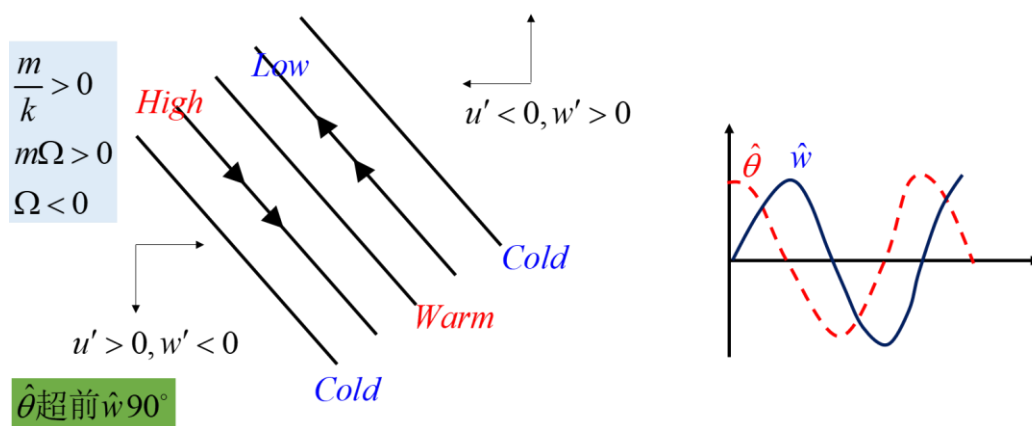
■ $\Omega > 0$ ， $\hat{\theta} \propto e^{-i\frac{\pi}{2}} \hat{w}$ ， $\hat{\theta}$ 位相比 $\hat{w}$ 滞后 90° ；



【注解】

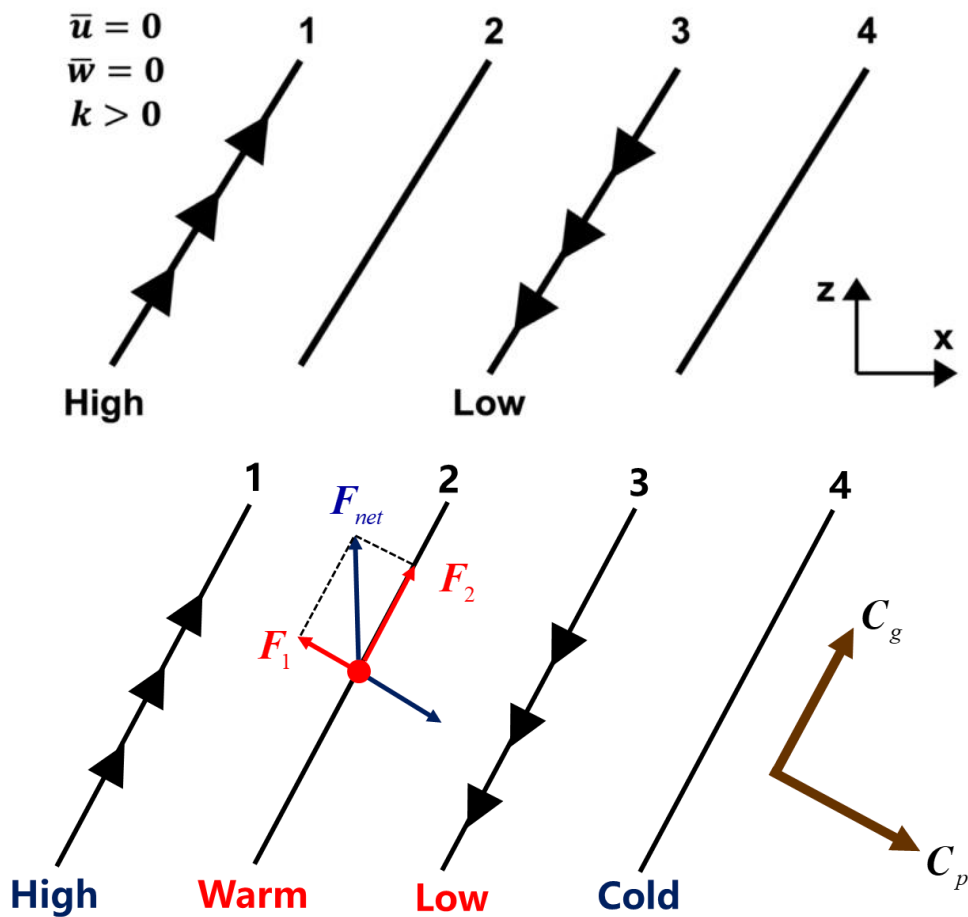
- ① 这里的超前和滞后是相对而言的，我们这里解出的是扰动位温与垂直扰动速度的关系，不妨以垂直扰动速度为比较对象；
- ② 在波形上，以上述结论为例， $\hat{\theta}$ 位相比 $\hat{w}$ 滞后 90° 表示在波形图上， $\hat{\theta}$ 波形图相对于 $\hat{w}$ 而言整体向坐标轴的正方向平移，即波峰和波谷较晚到达(如果是超前则表示向负方向移动，波峰波谷提前到达)

■ $\Omega < 0$ ， $\hat{\theta} \propto e^{\frac{\pi}{2}} \hat{w}$ ， $\hat{\theta}$ 位相比 $\hat{w}$ 超前 90° ；



【例 8】如下图所示，为重力内波在某一时刻的垂直剖面图，其中 1-4 分别是一个波长内的四个等距相位线(Phase Line)。回答以下问题：

- (1) 请指出哪一条线代表了正位温的扰动(Warm)。请结合牛顿第二定律 $F=ma$ 解释原因。
- (2) 请画出重力内波相速度矢量的方向，请用 $F=ma$ 角度解释原因。
- (3) 请画出重力内波群速度矢量的方向，请解释原因。
- (4) 请指出重力内波的固有频率的符号(正、负还是二者都有可能)，请解释原因。



【解】(1) 如上图所示，对位相线 2 上的空气微团进行受力分析，根据已知条件，可以知道其受到向右下方的气压梯度力扰动。在理想条件下，微团还受到浮力和重力的作用，二者的合力用 F_{net} 表示。若 $F_{net} < 0$ ，则微团受到的合力向下，没有回复力能使其进行振荡，因此需要 $F_{net} > 0$ ，从而抵消扰动气压梯度力，是能够沿着等位相线 2 振荡。从而

$$F_{net} = \rho_{env} g V_{air} - \rho_{air} g V_{air} > 0 \Rightarrow \rho_{env} > \rho_{air}$$

根据准静态假设有 $p_{env} \approx p_{air}$ ，而 $p = \rho R T$ ，所以温度 $T_{env} < T_{air}$ 。又因为 $\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ ，所以位温 $\theta_{env} < \theta_{air}$ 。微团的位温比环境高，所以相当于存在一个正的位温扰动，从而等位相线 2 代表了正位温扰动。

(2) 结合(1)中的分析，沿等位相线 2 向上有一个分力，从而在下一时刻产生和 1 线一样的速度扰动。所以位相由 1 线传向 2 线。因为 $c_p = \frac{\omega}{K}$ ，即波矢量与相速度方向相同，而根据极化关系，有波矢量与扰动速度矢量垂直，即

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U}' = (k, m) \cdot (u', w') = ku' + mw' = k \left(-\frac{m}{k} w' \right) + mw' = 0$$

所以相速度矢量与扰动速度矢量，亦即等位相线垂直，指向右下方。

(3) 根据题意，基本风场(即背景风场)为 0，从而重力内波的频散关系为

$$\omega = \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{c} = \pm \frac{\omega}{K} \frac{\mathbf{K}}{K} = \pm \frac{Nk}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (\mathbf{k}i + m\mathbf{k}) \\ \mathbf{c}_g = \pm \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \mathbf{k} \right) = \pm \frac{Nm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (m\mathbf{i} - k\mathbf{k}) \end{cases}$$

于是 $\mathbf{c}_p \cdot \mathbf{c}_g = 0$ ，即相速度和群速度矢量垂直，其方向沿着等位相线向上。

(4) 已知极化关系 $\hat{u} = -\frac{m}{k} \hat{w}$, $\hat{p} = -\frac{\bar{\rho} m \Omega}{k^2} \hat{w}$, $\hat{\theta} = -\frac{i}{\Omega} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \hat{w}$ 。由图可知， $\hat{u}, \hat{w}$ 同位相，

且 $k > 0$ ，所以 $m < 0$ ，又因为 $\hat{p}, \hat{w}$ 同位相，得到 $\Omega > 0$ ，所以重力内波的固有频率符号为正。

此外，据此也可以判断 $\hat{\theta}$ 位相比 $\hat{w}$ 滞后 90° ，所以当 $w' > 0$ 时(等位相线 1)，同样也可以判断出正位温扰动为等位相线 2。

7. 利用极化关系推导其他的关系

$$(1) \overline{u'w'} = \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{u}\hat{w}^*)$$

令 $u' = \text{Re}(\hat{u}e^{i\phi})$, $w' = \text{Re}(\hat{w}e^{i\phi})$ ($\phi = kx + ly + mz - \omega t$)，则根据雷诺(时间)平均的定义，有

$$\overline{u'w'} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'w' dt$$

又因为

$$u' = \text{Re}(|\hat{u}|e^{i\phi_{\hat{u}}} \cdot e^{i\phi}) = |\hat{u}| \cos(\phi_{\hat{u}} + \phi)$$

$$w' = \text{Re}(|\hat{w}|e^{i\phi_{\hat{w}}} \cdot e^{i\phi}) = |\hat{w}| \cos(\phi_{\hat{w}} + \phi)$$

代入前式，有

$$\begin{aligned}\overline{u'w'} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\hat{u}| |\hat{w}| \cos(\phi_{\hat{u}} + \phi) \cos(\phi_{\hat{w}} + \phi) dt \quad (\text{积化和差公式}) \\ &= |\hat{u}| |\hat{w}| \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{2} [\cos(\phi_{\hat{u}} - \phi_{\hat{w}}) + \cos(\phi_{\hat{u}} + \phi_{\hat{w}} + 2\phi)] dt\end{aligned}$$

注意到 $\phi_{\hat{u}}, \phi_{\hat{w}}$ 与时间无关, 而 ϕ 中包含时间 t , 因此包含 ϕ 的项在一个周期内的积分为 0, 从而得到

$$\overline{u'w'} = \frac{1}{2} |\hat{u}| |\hat{w}| \cos(\phi_{\hat{u}} - \phi_{\hat{w}})$$

$$\text{另一方面, } \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{u}\hat{w}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(|\hat{u}| e^{i\phi_{\hat{u}}} \cdot |\hat{w}| e^{-i\phi_{\hat{w}}}) = \frac{1}{2} |\hat{u}| |\hat{w}| \cos(\phi_{\hat{u}} - \phi_{\hat{w}})$$

于是 $\overline{u'w'} = \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{u}\hat{w}^*)$ 得证。

(2) 已知动能 $KE = \frac{1}{2} \bar{\rho} (\overline{u'u'} + \overline{w'w'})$, 位能 $PE = \frac{1}{2} \bar{\rho} \frac{g^2}{N^2} \left(\overline{\frac{\theta'}{\theta}} \right)$, 证明 $KE=PE$ 。

根据第一问的结论, 和极化关系 $\hat{u} = -\frac{m}{k} \hat{w}$, 对于 KE 有

$$\begin{aligned}KE &= \frac{1}{4} \bar{\rho} [\text{Re}(\hat{u}\hat{u}^*) + \text{Re}(\hat{w}\hat{w}^*)] = \frac{1}{4} \bar{\rho} \left[\text{Re}\left(\frac{m^2}{k^2} \hat{w}\hat{w}^*\right) + \text{Re}(\hat{w}\hat{w}^*) \right] \\ &= \frac{1}{4} \bar{\rho} \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) \text{Re}(\hat{w}\hat{w}^*)\end{aligned}$$

同理, 对于 PE , 结合 $\hat{\theta} = -\frac{i}{\Omega} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \hat{w}, \Omega = \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}}$, 有

$$\begin{aligned}PE &= \frac{1}{2} \frac{\bar{\rho} g^2}{N^2 \bar{\theta}^2} \overline{\theta' \theta'} = \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho} g^2}{N^2 \bar{\theta}^2} \text{Re}(\hat{\theta} \hat{\theta}^*) = \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho} g^2}{N^2 \bar{\theta}^2} \text{Re} \left[-\left(\frac{i}{\Omega} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^2 \hat{w} \hat{w}^* \right] \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\bar{\rho} g^2}{N^2 \bar{\theta}^2} \cdot \left(\frac{i}{\Omega} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^2 \text{Re}(\hat{w} \hat{w}^*) \left(N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\bar{\rho} g^2}{N^2 \bar{\theta}^2} \cdot \frac{k^2 + m^2}{N^2 k^2} \frac{N^2 \bar{\theta}^2}{g^2} \text{Re}(\hat{w} \hat{w}^*) = \frac{1}{4} \bar{\rho} \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) \text{Re}(\hat{w} \hat{w}^*)\end{aligned}$$

从而 $KE=PE$ 。

(3) 已知总能量 $E=KE+PE$, 且 $\hat{C}_{gx}, \hat{C}_{gz}$ 分别代表固有群速度(即通过固有频率

Ω 来求解)在水平和垂向上的分量。证明下列的关系成立:

$$\overline{u'p'} = EC_{gx}, \overline{w'p'} = EC_{gz}$$

根据频散关系, 已知重力内波的固有频率为 $\Omega = \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}}$, 又由(2)可知,

总能量 $E = \frac{\bar{\rho}}{2} \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) \text{Re}(\hat{w}\hat{w}^*)$, 于是

$$C_{gx} = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} = \Omega \frac{m^2}{k(k^2 + m^2)}, C_{gz} = \frac{\partial \Omega}{\partial m} = \pm \left[-\frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \right] = -\frac{m\Omega}{k^2 + m^2}$$

从而

$$EC_{gx} = \frac{\bar{\rho}m^2\Omega}{2k^3} \text{Re}(\hat{w}\hat{w}^*), EC_{gz} = -\frac{\bar{\rho}m\Omega}{2k^2} \text{Re}(\hat{w}\hat{w}^*)$$

结合(1)的结论, 对上述等式左边进行化简有

$$\begin{aligned} \overline{u'p'} &= \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{u}\hat{p}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\left(-\frac{m}{k} \hat{w} \right) \cdot \left(-\frac{\bar{\rho}m\Omega}{k^2} \hat{w}^* \right) \right] = \frac{\bar{\rho}m^2\Omega}{2k^3} \text{Re}(\hat{w}\hat{w}^*) \\ \overline{w'p'} &= \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{w}\hat{p}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\hat{w} \left(-\frac{\bar{\rho}m\Omega}{k^2} \hat{w}^* \right) \right] = -\frac{\bar{\rho}m\Omega}{2k^2} \text{Re}(\hat{w}\hat{w}^*) \end{aligned}$$

综上, 可证 $\overline{u'p'} = EC_{gx}, \overline{w'p'} = EC_{gz}$ 。

8. 波数光线追踪方程(Wavenumber Ray-Tracing Equation)

射线追踪方程描述了特定波包在生命周期内的传播轨迹和波数矢量折射。考虑三维情形, 已知波动的位相可以写为

$$\phi = kx + ly + mz - \omega t$$

从而有关系

$$k = \frac{\partial \phi}{\partial x}, l = \frac{\partial \phi}{\partial y}, m = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{K} = \nabla \phi$$

$$\begin{cases} k = k(x, y, z, t) \\ l = l(x, y, z, t) \\ m = m(x, y, z, t) \\ \omega = \omega(x, y, z, k, l, m, t) \end{cases}$$

在三维空间中，容易证明梯度的旋度恒等于 0(混合偏导数相等)，所以有 $\nabla \times \nabla \phi = 0$ ，于是可以得到关系

$$\nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ k & l & m \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial l}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial k}{\partial z} - \frac{\partial m}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial l}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial y} \right) \mathbf{k} \equiv 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial z}, \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial x}, \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y} (*)$$

因为 $\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}, \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}$ ，所以有 $\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$ 。对于 l, m 方向也是如此，从而得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

利用链式法则对方程进行展开

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

注意到 $\mathbf{C}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial l}, \frac{\partial \omega}{\partial m} \right)$ ，将(*)的关系代入，得到

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{C}_g \cdot \nabla \right) k = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{C}_g \cdot \nabla \right) l = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{C}_g \cdot \nabla \right) m = -\frac{\partial \omega}{\partial z} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d_g \mathbf{K}}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{X}} \quad \begin{cases} \frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{C}_g \cdot \nabla \\ \mathbf{K} = (k, l, m) \\ \mathbf{X} = (x, y, z) \end{cases}$$

同样的，也可以证明 $\frac{d_g \mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{K}}$ 。在流体力学中，流线上任意一点的速度与

流线相切，所以在 dt 的时间内，流体质点的位移 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ 与速度矢量 $d\mathbf{u} = (u, v, w)$ 平行，即

$$d\mathbf{r} \times d\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & dz \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} (= dt)$$

因此流线方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) x = u \\ \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) y = v, \mathbf{V} = (u, v, w) \\ \frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) z = w \end{cases}$$

将速度 (u, v, w) 替换成群速度 $\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial l}, \frac{\partial \omega}{\partial m} \right)$ ，即可得证。

9. 山地重力波(地形作用)——Topographic Gravity Waves

对于一个静止的观察者来说，地形产生的重力波在空间中是固定的，即地形重力波相对于产生它们的地形总是静止的(但是相对于背景气流，波必须以与风相同的速度逆风传播)。已知重力内波的控制方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0$$

考虑定常情况，即 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ，则上述方程可以简化成

$$\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) + \frac{N^2}{\bar{u}^2} w' = 0$$

设波动解为

$$w' = \text{Re}[\hat{w} \exp(i\phi)] = \text{Re}[(w_r + iw_i) \cdot \exp(i\phi)] = \text{Re}[w_r \cos \phi - w_i \sin \phi]$$

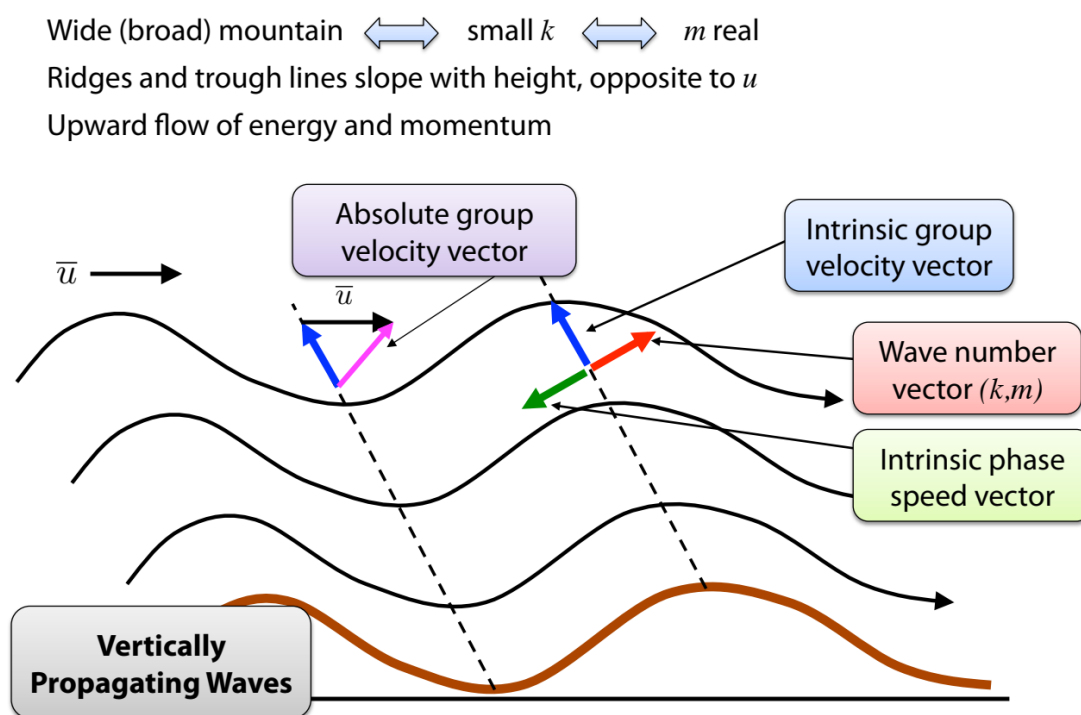
$$\hat{w} = w_r + iw_i, m = m_r + im_i, \phi = kx + mz$$

代入得到频散关系为

$$m^2 = \frac{N^2}{\bar{u}^2} - k^2$$

$$(1) |\bar{u}| < \frac{N}{k} \Rightarrow m^2 > 0$$

即垂直波数 m 为实数，此时的波动解的形式为 $w' = \hat{w} \exp[i(kx + mz)]$ ，即波动在水平方向和垂直方向上同时传播，且传播的振幅是常数，这样的波动叫做垂直传播波(**Vertically Propagating Waves**)。同时根据频散关系也可以知道，如果保证 $m^2 > 0$ ，需要较小的 $\bar{u}$ 、较大的 k 和 N ，对应于较小的背景风、较宽的地形和稳定性较强的层结。随着地形越来越宽，波场越来越变得满足静力平衡(Carmen J. N, 2002)，从而垂直传播波又可以叫做**静力重力波(水平波长远大于垂直波长)**。



$$(2) |\bar{u}| > \frac{N}{k} \Rightarrow m^2 < 0$$

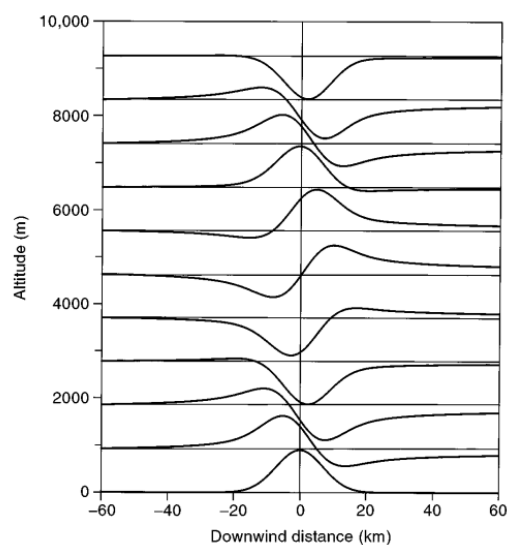
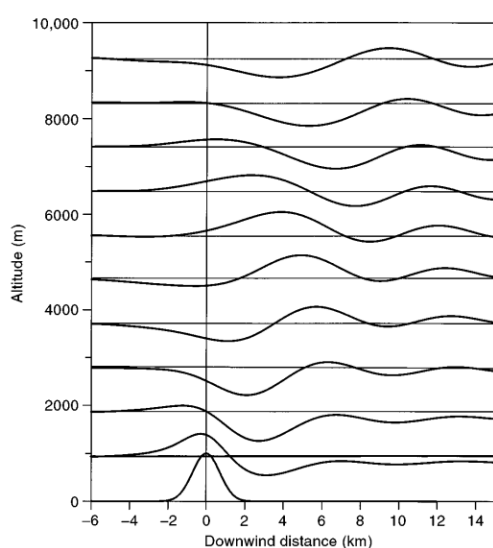
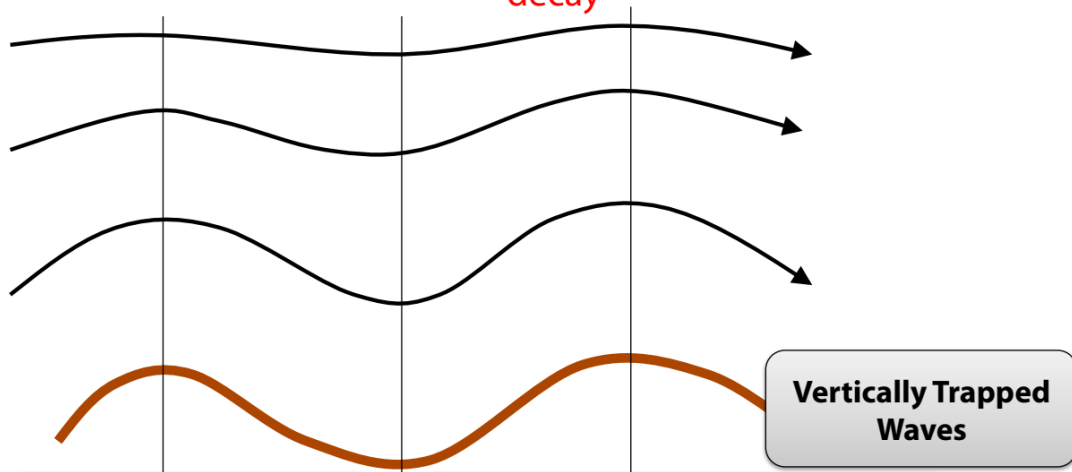
即此时的垂直波数为虚数，则波动解为 $w' = \hat{w} \exp(-m_i z) \exp(ikx)$ ，显然扰动振幅随高度是呈指数递减的，这样的波动称为 **Vertically Trapped Waves**，它对应于**较大的背景风、较窄的地形和稳定性较弱的大气层结**。与静力重力波相对应，这种波动称为**非静力重力波(垂直波长与水平波长接近)**。

Narrow mountain $\longleftrightarrow$ large k $\longleftrightarrow$ m imaginary

Ridges and trough lines aligned with height

No tilt, no momentum transport

$$w' = \hat{w} \exp(ikx) \underbrace{\exp(-m_i z)}_{\text{decay}}$$



$N = 0.01s^{-1}$, $\bar{u} = 10m/s$ 。左图为非静力重力波，地形宽度为 4km；右图为静力重力波，地形宽度 40km(图片引自 Carmen J. N 编著的英文教材《An Introduction to Atmospheric Gravity Waves》)

上述两种类型的地形重力波的解的形势都可以写成如下形式

$$w'(x, z) = \hat{w} \exp(ikx) \exp(imz)$$

我们可以通过建模的方式，来求解波动的振幅，从而求得扰动速度的表达式。

假设地形是理想的波动形状，满足关系

$$h(x) = He^{-ik_s x} \Leftrightarrow h(x) = H \cos k_s x, k_s = \frac{2\pi}{\lambda_s}$$

其中 H 表示地形的振幅, λ_s 为地形的宽度。因为背景流是无旋和无摩擦的, 因此可以将**地形表面认为是一条流线**, 而垂直流线的流量必须为 0 (底边界条件), 即

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$\mathbf{V}$ 是流速矢量, $\mathbf{n}$ 是流线的单位法向量(如下图所示)。我们假设重力波是相对的地形静止, 且形状与地形相同, 因此空气的流线方程可以表示为

$$\Phi = z - h(x)$$

于是流线的单位法向量可以表示为

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \Phi}{|\Phi|} = \frac{1}{|\Phi|} \left(-\frac{dh}{dx} \mathbf{i} + \mathbf{k} \right)$$

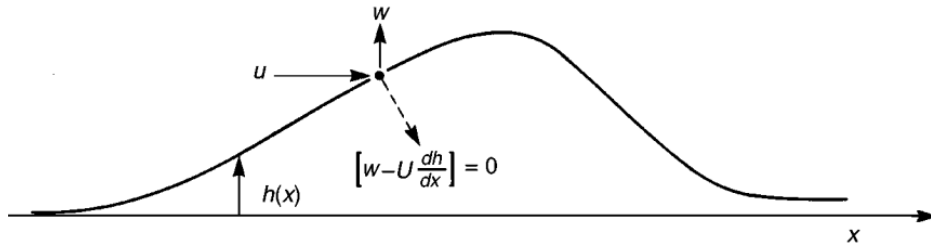


FIGURE 3.6 The flow component normal to a streamline must be zero. This condition provides the boundary condition at the ground surface.

需要指出的是, 在线性扰动理论中, 我们认为 $h(x)$ 是一个很小的二阶扰动量。如果不这么认为, 那么 $h(x)$ 就应该写为 $h(x, z)$, 显然这是非线性的。于是

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|\Phi|} \left[(\bar{u} + u') \mathbf{i} + w' \mathbf{k} \right] \cdot \left(-\frac{dh}{dx} \mathbf{i} + \mathbf{k} \right) = 0 \Rightarrow w'(x, 0) = \bar{u} \frac{dh}{dx} = i\bar{u}Hk_s e^{ik_s x}$$

从而可以得到 $\hat{w} = i\bar{u}Hk_s$, 那么对于 **Vertically Propagating Waves**, 其解为

$$\begin{aligned} w'(x, z) &= \text{Re} \left[\hat{w} \exp(ik_s x) \exp(im_s z) \right] \\ &= \text{Re} \left[i\bar{u}Hk_s \exp(ik_s x + im_s z) \right] = -\bar{u}Hk_s \sin(k_s x + m_s z) \end{aligned}$$

对于 **Vertically Trapped Waves**, 其解为

$$\begin{aligned} w'(x, z) &= \text{Re} \left[\hat{w} \exp(ik_s x) \exp(-m_i z) \right] \\ &= \text{Re} \left[i\bar{u}Hk_s \exp(-m_i z) \exp(ik_s x) \right] = -\bar{u}Hk_s \exp(-m_i z) \sin kx \end{aligned}$$

$$\text{其中 } m_s = \sqrt{\frac{N^2}{\bar{u}^2} - k^2} \left(\frac{N^2}{\bar{u}^2} > k^2 \right), m_i = \sqrt{k^2 - \frac{N^2}{\bar{u}^2}} \left(\frac{N^2}{\bar{u}^2} < k^2 \right)$$

10. 波振幅方程

已知二维的线性化方程为

$$\begin{cases} \textcircled{1} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \textcircled{2} \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \\ \textcircled{3} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ \textcircled{4} \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

对上述方程组进行变形

(1) $\textcircled{1} \times u'$, $\textcircled{2} \times w'$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'^2}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'^2}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial (p'u')}{\partial x} - p' \frac{\partial u'}{\partial x} \right] \\ \textcircled{6} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'^2}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'^2}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial (p'w')}{\partial x} - p' \frac{\partial w'}{\partial z} \right] + \frac{w'\theta'}{\bar{\theta}} g \end{aligned}$$

(2) $\textcircled{5} + \textcircled{6}$, 结合 $\textcircled{3}$, 得到

$$\textcircled{7} \frac{dKE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \bar{\rho} (u'^2 + w'^2) \right] = -\frac{\partial (p'u')}{\partial x} - \frac{\partial (p'w')}{\partial x} + \bar{\rho} g \frac{w'\theta'}{\bar{\theta}}$$

(3) $\textcircled{4} \times \bar{\rho} g^2 \frac{\theta'}{\bar{\theta}^2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} g^2 \frac{\theta'^2}{\bar{\theta}} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} g^2 \frac{\theta'^2}{\bar{\theta}} \right) + \bar{\rho} g \frac{w'\theta'}{\bar{\theta}} \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0$$

$$\textcircled{8} \frac{dPE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{\rho} \frac{g^2}{N^2} \frac{\theta'^2}{\bar{\theta}^2} \right) = -\bar{\rho} g \frac{w'\theta'}{\bar{\theta}}$$

(4) $\textcircled{7} + \textcircled{8}$ 得到

$$\textcircled{9} \frac{dE}{dt} = \frac{dKE}{dt} + \frac{dPE}{dt} = -\frac{\partial (p'u')}{\partial x} - \frac{\partial (p'w')}{\partial x}$$

对 $\textcircled{9}$ 式在一个波长或者周期内进行平均, 得到

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{\partial \overline{(p'u')}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{(p'w')}}{\partial x}$$

根据极化关系, $\overline{u'p'} = E\hat{C}_{gx}, \overline{w'p'} = E\hat{C}_{gz}$, 代入上式可得到

$$\frac{d\bar{E}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{C}_g \bar{E} = 0 \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

在**浮力频率为常数、无背景风场以及热力分层均匀(即波数 k, m 均为常数)的条件下** (Constant Brunt-Väisälä frequency, calm winds and uniform thermal stratification)重力波扰动能量的守恒方程式

$$\frac{d\bar{E}}{dt} + \mathbf{C}_g \cdot \nabla \bar{E} = 0$$

若考虑风场的垂直切变, 即 $\bar{u} = \bar{u}(z)$, 那么①中将会多出一项 $w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, 于是经

过一系列变换后的方程为

$$\frac{d\bar{E}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{C}_g \bar{E} = -\bar{\rho} \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) (*)$$

即扰动能量不守恒, 于是在 Bretherton(1966)提出了“Wave Action”的概念。

	wind (shear) terms	thermodynamics (shear) terms	
$\frac{d_g k}{dt}$	$-ku_x - lv_x - mw_x$	$\frac{N_x^2(k^2 + l^2)}{2\Omega\Delta} + \frac{\alpha_x^2(\Omega^2 - f^2)}{2\Omega\Delta}$	
$\frac{d_g l}{dt}$	$-ku_y - lv_y - mw_y$	$\frac{N_y^2(k^2 + l^2)}{2\Omega\Delta} + \frac{\alpha_y^2(\Omega^2 - f^2)}{2\Omega\Delta}$	$\frac{ff_y(m^2 + \alpha^2)}{\Omega\Delta}$
$\frac{d_g m}{dt}$	$-ku_z - lv_z - mw_z$	$\frac{N_z^2(k^2 + l^2)}{2\Omega\Delta} + \frac{\alpha_z^2(\Omega^2 - f^2)}{2\Omega\Delta}$	

(下标表示求偏导数)

根据极化关系, 有

$$\bar{\rho} \overline{u'w'} = \bar{\rho} \left(-\frac{k}{m} w' \right) \left(-\frac{k^2}{\bar{\rho} m \Omega} p' \right) = \frac{k}{\Omega} \overline{w'p'} = \frac{k}{\Omega} C_{gz} \bar{E}$$

因为 $\bar{u} = \bar{u}(z)$, 所以 $\frac{d_g k}{dt} = 0 (\Leftrightarrow k = \text{const})$, $\frac{d_g m}{dt} = -k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, 下标 g 表示绝对群速度,

包含背景风场的局地平流和固有群速度的局地平流, 即 $\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{C}_g \cdot \nabla$ 。

下面对固有频率求全导数，有

$$\frac{d_g \Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right] = \pm \left(-\frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \right) \cdot \frac{d_g m}{dt} = C_{gz} \cdot \left(-k \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)$$

从而 $-\bar{\rho} \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{k}{\Omega} C_{gz} \bar{E} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\bar{E}}{\Omega} \frac{d_g \Omega}{dt}$ ，于是对(*)式进行化简得到

$$\begin{aligned} \frac{d \bar{E}}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{C}_g \bar{E} - \frac{\bar{E}}{\Omega} \frac{d_g \Omega}{dt} &= 0 \\ \frac{d \bar{E}}{dt} + \mathbf{C}_g \cdot \nabla \bar{E} + \bar{E} \nabla \cdot \mathbf{C}_g - \frac{\bar{E}}{\Omega} \frac{d_g \Omega}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \frac{d_g \bar{E}}{dt} + \bar{E} \nabla \cdot \mathbf{C}_g - \frac{\bar{E}}{\Omega} \frac{d_g \Omega}{dt} = 0 \\ \frac{1}{\Omega} \frac{d_g \bar{E}}{dt} + \frac{\bar{E}}{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{C}_g - \frac{\bar{E}}{\Omega^2} \frac{d_g \Omega}{dt} &= 0 \Leftrightarrow \frac{d_g}{dt} \left(\frac{\bar{E}}{\Omega} \right) + \frac{\bar{E}}{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{C}_g = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{E}}{\Omega} \right) + \mathbf{C}_g \cdot \nabla \left(\frac{\bar{E}}{\Omega} \right) + \frac{\bar{E}}{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{C}_g &= 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{E}}{\Omega} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{C}_g \frac{\bar{E}}{\Omega} \right) = 0 \end{aligned}$$

即 $\frac{\bar{E}}{\Omega}$ 是一个守恒量。

附录 其他题目补充

1. 数值天气预报模式需要通过参数化的方法来描述小尺度的、网格不可分辨的物理过程，请回答：

(1) 气候模式需要参数化哪些物理过程？

(2) 以 NCAR 的 WACCM(Whole Atmosphere Community Climate Model)模式为例，目前非地形重力波拖曳参数化方案仍存在哪些潜在的局限性？(该问题可参考 [Plougonven \[https://doi.org/10.1002/qj.3732\]](https://doi.org/10.1002/qj.3732) 的文献回答)

(1) 进行数值计算总要离散化，于是在空间上总有一个可表达的最小尺度，称为网格距(grid size)。小于网格距的过程称为次网格尺度过程(subgrid processes)，它们本来在计算模式中是没有的，但在实际大气中是客观存在的，而且多种多样，它们能对模式中可表达的尺度过程产生强烈作用，故在数值天气预报中必须进一步考虑这一点，于是就要使用参数化方法(parameterization)。即通过物理考虑(甚至是经验)，将次网格过程的特性及其对大尺度过程的影响用大尺度的状态变量来表达。需要参数化的过程有：云微物理过程、辐射传输过程、海洋混合过程、陆面过程、积云对流过程、水汽相变过程、边界层湍流过程等等。

(2)

NOTES AND CORRESPONDENCE

Quarterly Journal of the
Royal Meteorological Society 

How does knowledge of atmospheric gravity waves guide their parameterizations?

Riwal Plougonven¹  | Alvaro de la Cámara²  | Albert Hertzog³ | François Lott⁴ 

① An essential difficulty is that observations cannot measure the forcing but only the signatures of gravity waves, and observations cannot selectively detect the fraction of the wave field that will propagate up to the upper stratosphere or to the mesosphere and produce a forcing there. (观测不能直接测量重力波的强迫，只能测量到重力波的特征，而且观测不能选择性地探测重力波中向上传播到平

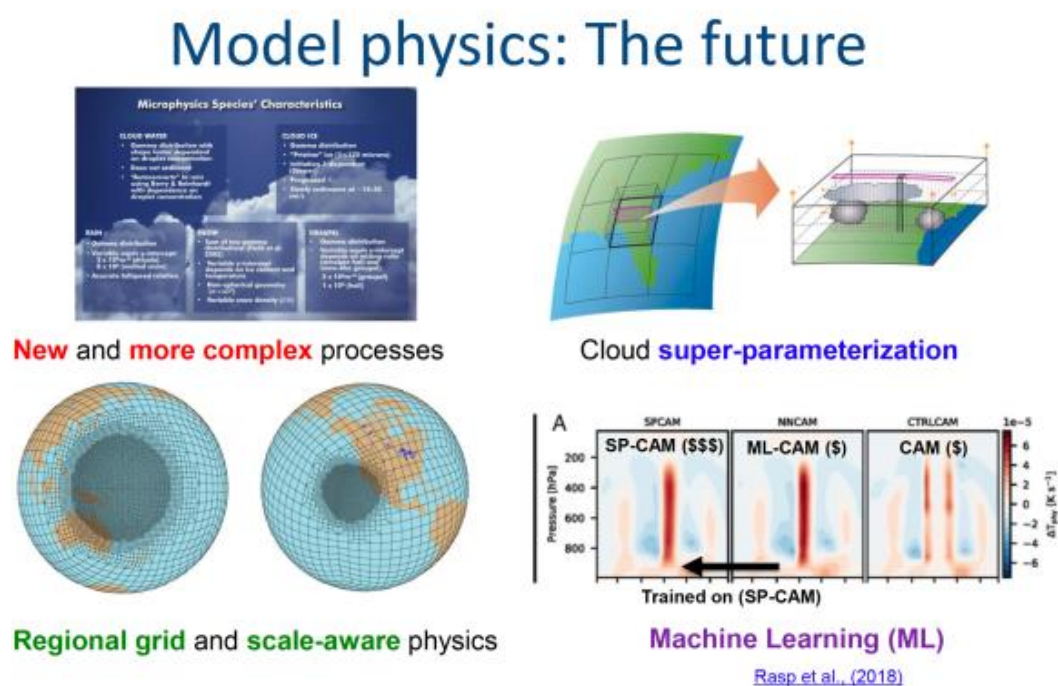
流层、中间层的部分)

- ② A fundamental approximation used in parameterizations is the *columnar* approximation. This simplification is highly justified as a first approximation, especially with early climate models with low horizontal resolution. In fact, gravity waves propagate obliquely. For example, Yamashita et al. (2013) have suggested, based on satellite observations of waves in the stratosphere, that the meridional propagation of waves during sudden warmings could be significant; Satellite observations and high-resolution modelling were combined by Thuraijajah et al. (2017) to show that gravity waves generated by monsoon convection propagate laterally and reach the mesosphere at higher latitudes. (重力波参数化方案中最基本的假设是柱状近似, 即只考虑垂向传播的情形, 但实际上在背景风场的影响下, 重力波是斜向传播的)
- ③ Another assumption commonly made in parameterizations is that of instantaneous propagation. Yet the non-stationarity of the background flow affects the propagation of gravity waves, as illustrated for example by the simulations of orographic waves in time-varying flows. (在参数化中另一个普遍的假设是“瞬时传播”, 然而, 背景流的非平稳性影响了重力波的传播, 例如对时变流中的地形波模拟就说明了这一点)
- ④ An important assumption of gravity wave parameterizations is that the sources are only tropospheric, and there are strong arguments to justify this as a first choice. Nevertheless, observations of waves with downward propagating energy from the stratosphere, especially at high latitudes in winter, are known and show that there are waves emanating from the stratosphere or above. (重力波参数化的一个重要假设是认为波源只在对流层, 但是观测结果表明, 重力波可以从平流层或更高的位置产生)
- ⑤ One of these sources is secondary generation: waves that are generated as a result of the breaking or dissipation of a primary gravity wave packet. Secondary gravity waves are expected to be generated on several scales: on the scale of the primary wave envelope, as a result of the localized and time-dependent forcing due to the

dissipation of the primary wave, and on smaller scales due to nonlinear excitation from the turbulent breaking of the primary wave. (重力波波包在破碎或者耗散产生次级重力波, 这些次级重力波在参数化方案中没有被考虑)

2. 请问气候模式中的物理参数化方案目前有什么比较前沿的方向?

- (1) 考虑新的和更加复杂的物理过程;
- (2) 使用 Cloud Super-parameterization (CSP) 技术, 通过在模型内嵌入高分辨率的云模型来更准确的表示云的物理过程;
- (3) 尺度感知的参数化过程(Scale-aware parameterization), 即模型中使用的参数化方案能够感知和适应不同空间和时间尺度上的物理过程;
- (4) 不依赖于网格尺度的参数化过程(Grid-scale independent), 然而不同的模式分辨率存在差异, 而参数化主要是针对次网格过程, 当参数化方案不依赖于网格尺度时, 它就可以更灵活地运行在不同的空间分辨率上, 而不需要重新调整或更改参数化方案。
- (5) 机器学习方法在参数化过程的使用。



3. 请解释并区别一下两种可预报性:

(1) Practical predictability;

(2) Intrinsic predictability.

(1) Practical predictability 指“实际可预测性”，指的是基于当前可用条件进行预测的能力，它受到预测模型和初始条件的不确定性的限制。这种不确定性在当前的预报系统中仍然很大，主要受到当前观测、数据同化、建模和计算能力的限制；

(2) Intrinsic predictability 指“内在可预测性”，它是指在近乎完美的初始条件和近乎完美的预测模型情况下进行预测的能力。

Despite recent advances in numerical weather prediction (NWP) models, the predictability of these mesoscale convective events remains unclear. Broadly speaking, there are two types of predictability issues: practical predictability and intrinsic predictability. Practical predictability is described as “the ability to predict based on the procedures currently available”, whereas intrinsic predictability is defined as “the extent to which prediction is possible if an optimum procedure is used” (Lorenz 1969; Zhang et al. 2006, p. 149). The practical predictability can be limited by uncertainties in both the forecast model and initial conditions. At present, these uncertainties remain sizeable, constrained by the current capability of observations, data assimilation, modeling, and computing. The intrinsic predictability is the predictability given nearly perfect knowledge of the atmospheric state and a nearly perfect forecast model (Lorenz 1969). Both practical and intrinsic predictability can be flow dependent (Lorenz 1996; Zhang et al. 2006) with expected loss of predictability during regime transition (Palmer 1993).

Atmospheric predictability can be categorized into two types (Lorenz, 1996; Melhauser & Zhang, 2012; Sun & Zhang, 2016; Ying & Zhang, 2017; Zhang et al., 2019): (a) practical predictability that refers to the ability to predict based on the currently available conditions, and is limited by uncertainties in the prediction model and initial conditions, and (b) intrinsic predictability that refers to the ability to predict given a nearly perfect forecast model with nearly perfect initial conditions. The practical predictability limit can be extended as errors in the model or the initial conditions decrease, whereas the intrinsic predictability limit will not change even if the initial errors are further reduced. The uncertainties in terms of practical predictability remain sizeable and are limited by the current capability of observations, modeling, and data assimilation. The intrinsic predictability is often examined based on a perfect model assumption made in conjunction with initial condition uncertainties an order of magnitude smaller than the current observational analysis in the previous studies (e.g., Judt, 2018; Mapes et al., 2008; Melhauser & Zhang, 2012; Tribbia & Baumhefner, 2004; Zhang et al., 2003, 2007). To the best of our knowledge, the practical and intrinsic predictability of

[1] <https://doi.org/10.1175/JAS-D-11-0315.1>

[2] <https://doi.org/10.1029/2021JD034882>