



动力气象学

Dynamic Meteorology



中国海洋大学 海洋气象学系

蒋斌 编著

(2022 年)

目录

第一章 大气运动基本方程组	2
第二章 大气运动方程组的简化-尺度分析	18
第三章 p 坐标 铅直坐标变换	30
第四章 自由大气中的平衡流场	38
第五章 环流定理与涡度方程	58
第六章 大气行星边界层	84
第七章 大气能量学	97
第八章 大气中的基本波动	121
第九章 中纬度大尺度运动的准地转理论	158
附录 I 《动力气象学》练习题	180
附录 II 《动力气象学》(吕美仲等)课本习题参考答案	190

《动力气象学》复习资料

整理/2019 级大气科学 蒋斌

第一章 大气运动基本方程组

1. 关于地球的一些常数

(1) 1 个太阳日为 24 小时；1 个恒星日为 23 时 56 分 4 秒。

(2) 地球自转角速度： $\Omega = \frac{2\pi}{\text{恒星日}} = \frac{2\pi}{86164s} = 7.292 \times 10^{-5} s^{-1}$

(3) 地球平均半径 $a = 6371km (\approx 6.37 \times 10^6 m)$ ；质量 $M_e \approx 6.0 \times 10^{24} kg$

2. 研究大气运动的三个基本假设

- **连续性假设。**大气是连续流体，表征大气运动状态和热力状态的各种物理量均是时间和空间的连续函数，且其各阶微商也存在且连续。
- **理想气体假设。**气压、密度、温度之间的关系满足理想气体的状态方程。
- **薄层近似。**由于地球大气的有效厚度远小于地球半径 r ，故当 r 处于系数地位时可用地球平均半径 a 代替 r 。

3. 大气的热力学和动力学特征

- (1) 大气是重力场中的旋转流体；
- (2) 大气是层结流体；
- (3) 大气中含有水分；
- (4) 大气的下垫面是不均匀的。

4. 全导数和局地导数

我们以温度场来加以说明。设在笛卡尔坐标系中，温度场函数为 $T = T(x, y, z, t)$ ，空气微团的速度分别为 $u = x'(t), v = y'(t), w = z'(t)$ 。下面考虑微团从 (x, y, z, t) 处经过 δt (δt 很小) 时间到达 $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t)$ 处的温度变化：

$$\delta T = T(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t) - T(x, y, z, t)$$

对 $T(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t)$ 进行 1 阶 Taylor 展开, 得到

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \delta z$$

两边除以 δt , 令 $\delta t \rightarrow 0$ 取极限, 得到温度的全导数为:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T$$

将温度的局地变化放至等式左边, 也可以写为 $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \mathbf{V}_h \cdot \nabla_h T - w \frac{\partial T}{\partial z}$ (垂直与水平的量级不一样, 所以分开写)。 $-\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h T$ 称为温度的**平流变化率**, $-w \frac{\partial T}{\partial z}$ 称为温度的**对流变化率**。

假设 $\frac{dT}{dt} = 0, w = 0$, 在自然坐标系中, 局地温度的变化为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h T = -V \frac{\partial T}{\partial s}$$

上式表明, 空气微团作水平运动时, 即使微团本身的温度保持不变, 也会引起温度的局地变化。当 $\frac{\partial T}{\partial s} > 0$ 时, 即沿水平速度方向是温度升高, 风由冷区吹向暖区, $-V \frac{\partial T}{\partial s} < 0$, 局地有**冷平流**; 当 $\frac{\partial T}{\partial s} < 0$ 时, 即沿水平速度方向是温度降低, 风由暖区吹向冷区, $-V \frac{\partial T}{\partial s} > 0$, 局地有**暖平流**。

[注] $\frac{dT}{dt}, \frac{\partial T}{\partial t}$ 的区别

➤ 二者的表达式不同

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{T(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t) - T(x, y, z, t)}{\delta t} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{T(x, y, z, t + \delta t) - T(x, y, z, t)}{\delta t} \end{cases}$$

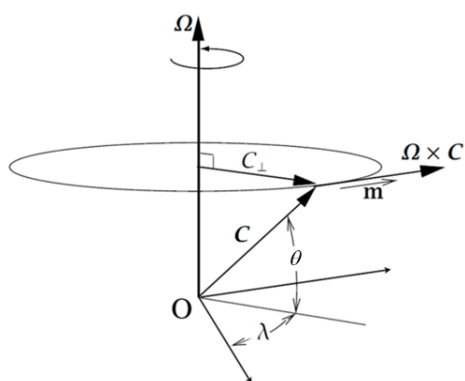
➤ 二者表示的意义不一样

$\frac{dT}{dt}$ 表示空气微团的温度在运动过程中随时间的变化率, 而 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 表示空间中

某一固定点 (x, y, z) 上的温度随时间的变化率。

5. 旋转坐标系下的运动方程(牛顿第二定律)

(1) 绝对坐标系下的向量旋转变换

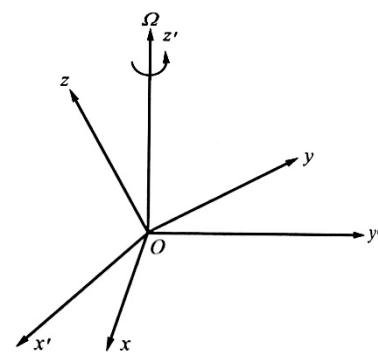


在绝对坐标系下看向量旋转产生的变化率。如左图所示, 经过 δt 时间后转过了角度 λ , 有 $\lambda = |\mathbf{\Omega}| \delta t$ 。向量终点走过的弧长可以表示为 $|\delta \mathbf{C}| = \lambda |\mathbf{C}| \cos \theta$, 于是得到在绝对空间中向量旋转的变化率为:

$$\frac{d_a \mathbf{C}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{C}$$

(2) 微分算子 $\frac{d_a}{dt} = \frac{d_r}{dt} + \mathbf{\Omega} \times$ 的推导

如左图所示, 建立两个坐标系, 分别是惯性坐标系 $O' - x'y'z'$ (其中 z' 轴与地轴重合) 和旋转坐标系 $O - xyz$, 两个坐标系中的三个方向的单位矢量分别为 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 那么对于任意矢量 $\mathbf{A}$, 有



$$\mathbf{A} = A'_x \mathbf{i}' + A'_y \mathbf{j}' + A'_z \mathbf{k}' = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

在各自的坐标系下, $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 均与时间无关, 有

$$\begin{aligned} \frac{d_a \mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA'_x}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dA'_y}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dA'_z}{dt} \mathbf{k}' \\ \frac{d_r \mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} \end{aligned}$$

我们的目标是得到两个坐标系之间的联系。若将向量 $\mathbf{A}$ 在旋转坐标系中的坐标在惯性坐标系下对时间求导, 由于 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 在惯性系中观察是在发生旋转的, 此时的导数可以写成:

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} \right) + \left(\frac{d_a \mathbf{i}}{dt} A_x + \frac{d_a \mathbf{j}}{dt} A_y + \frac{d_a \mathbf{k}}{dt} A_z \right)$$

第二部分的结果在(1)中已经进行了阐述, 直接套用公式即可, 从而

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$$

(3) 速度

将位置矢量 $\mathbf{r}$ 代入(2)中的微分算子中, 有

$$\frac{d_a \mathbf{r}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

(绝对速度=相对速度+牵连速度)

(4) 加速度

对(3)中的速度关系表达式继续对时间求导, 有

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d_a (\mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d_a \mathbf{V}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d_a \mathbf{r}}{dt} \left(\frac{d_a \boldsymbol{\Omega}}{dt} = 0 \right)$$

$\frac{d_a \mathbf{V}_r}{dt}$ 继续套用(2)中的微分算子化简, $\frac{d_a \mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_a$, 上式可继续化为:

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d_r \mathbf{V}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d_r \mathbf{V}_r}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ 的化简可以利用矢量三重积公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ 进行化简,

也可直接利用右手螺旋法则结合实际进行两次叉乘运算, 得到结果为

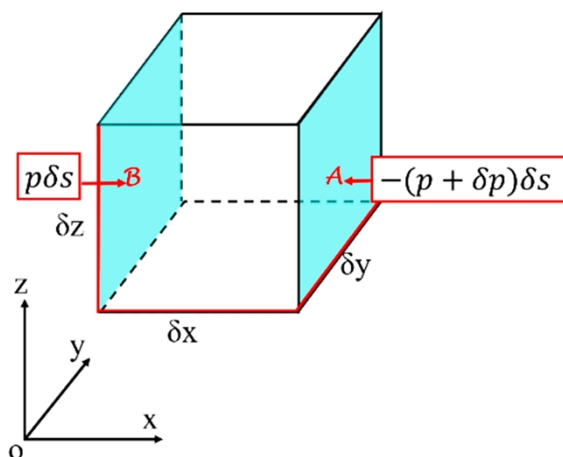
$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\Omega^2 r \cos \varphi \mathbf{e}_r = -\Omega^2 \mathbf{R} \quad (\varphi \text{ 为纬度, } \mathbf{e}_r \text{ 为纬度圈径向的单位矢})$$

而在惯性系中, 根据牛顿第二定律, 有 $\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i$

所以在旋转坐标系中加速度的表达式就可以写为

$$\frac{d_r \mathbf{V}_r}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_r + \Omega^2 \mathbf{R}$$

• $\sum_i \mathbf{F}_i$ 中之气压梯度力



如上图所示为一个气块，下面就 x 方向上进行分析。 x 方向上，A,B 面受到的压力分别为 $(p + \delta p)\delta s$ 和 $p\delta s$ ，设 x 方向的气压变化率为 $\frac{\partial p}{\partial x}$ ，那么该方向的净合力可以表示为

$$p\delta s - (p + \delta p)\delta s = -\delta p\delta s = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta s = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

同理可得 y, z 方向上的净合力分别为 $-\frac{\partial p}{\partial y}\delta x\delta y\delta z$ ， $-\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$ 。于是，这个小气块受到的净合力为：

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\delta x\delta y\delta z = -\nabla p\delta\tau$$

又因为气块的质量 $m = \rho\delta\tau$ ，则单位质量空气受到的净压力为 $\vec{G} = -\frac{\nabla p}{\rho}$ ，这就是我们所说的气压梯度力(Pressure Gradient Force, PGF)。气压梯度力有以下性质：

- ① 大小与气压梯度成正比，与空气密度成反比；
- ② 与等压线垂直，指向 $-\nabla p$ 方向，由高压指向低压；
- ③ 水平分量远小于垂直分量。因为气压在垂直方向上的变化远远大于水平方向，在垂直方向，从地表面到对流层顶，气压从 1000hPa 迅速减小到 200hPa 左右，这段距离仅仅是十几公里，而在水平方向，1000 公里左右的距离内，气压变化仅仅在 10hPa 左右，即使是台风或者龙卷风，也只是几十百帕，可见气压在水平方向的梯度是远远小于垂直方向的梯度的，因此气压梯度力的水平分量远小于垂直分量。

• $\sum_i F_i$ 中之万有引力、离心惯性力 $\Omega^2 R$

单位质量的空气微团受到地球的引力为

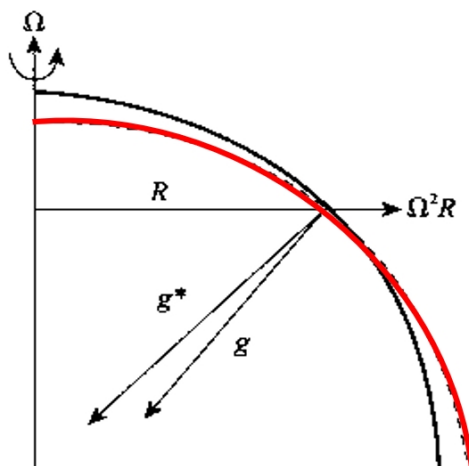
$$\mathbf{g}^* = -\frac{GM_e}{r^2}\mathbf{e}_r$$

假设地球为一个正球体，空气质点的海拔为 z ，于是 $r = a + z$ ，上式可改写为

$$\mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}_0^*}{\left(1 + \frac{z}{a}\right)^2}, \mathbf{g}_0^* = -\frac{GM}{a^2}\mathbf{e}_r \text{ (const, average gravitation)}$$

实际上，由于 $z \ll a$ ，所以常常认为 $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}_0^*$ ，即地球的引力大小为一个常数。

地心引力与惯性离心力的合力，即 $\mathbf{g} = \mathbf{g}^* + \Omega^2 \mathbf{R}$ 称为重力。惯性离心力可以分解为两个相互垂直的力，一个分力抵消了地心引力，另一个分力与地表相切指向赤道——这个分力经过长时间的作用后，使得地球形状呈现两极扁平的椭球体，从而使得重力与地球表面处处垂直。



- $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r$ ——科氏力

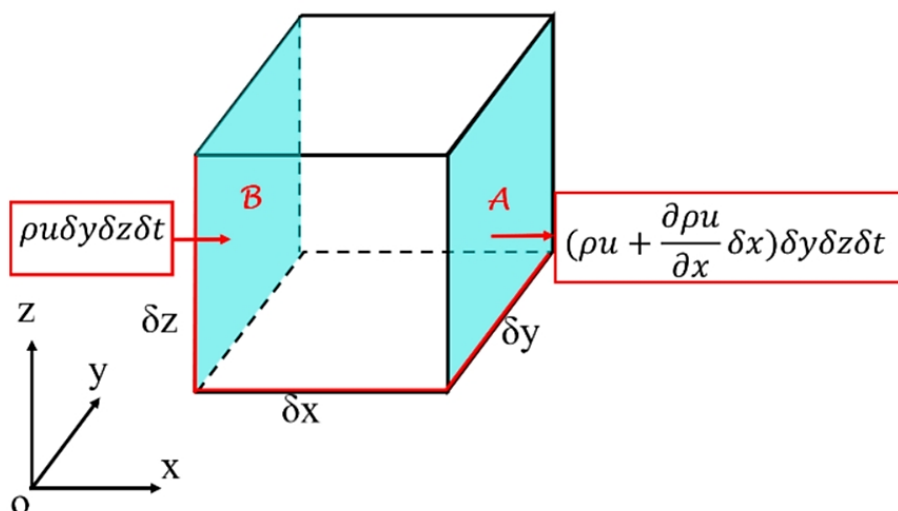
当质点以一定速度相对于旋转参照系运动时才产生；科氏力的方向始终垂直于角速度和质点的运动方向；科氏力不做功。

- $\sum_i \mathbf{F}_i$ 中之摩擦力

经过上面的讨论，大气运动方程可以写为(省略了下标 r):

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g} + \mathbf{F} \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \end{cases}$$

6. 连续方程（本质：质量守恒定律）

图 5 x 方向小六面体内的净流入量分析

根据图 5，可以写出净流入量的表达式为：

$$\rho u \delta y \delta z \delta t - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z \delta t = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \delta t$$

同理可以写出其它两个方向的净流入量的表达式，从而得到总流入量的表达式为：

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \delta t$$

设初始时刻六面体中流体质量为 $\rho_0 \delta x \delta y \delta z$ ，经过 δt 时间后六面体中流体质量变

为 $\left(\rho_0 + \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta t \right) \delta x \delta y \delta z$ ，于是六面体内的流体质量变化为 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \delta t$ ，根据质

量守恒，可以得到 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \delta t = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \delta t$ ，对比得到连

续方程的表达式为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

上述方程可分写成欧拉型和拉格朗日型。欧拉描述以相对于坐标固定的流场内的任一空间点为研究对象，研究流体流经每一空间点的力学性质，也就是说，在采用欧拉的观点进行微分运算时，空间点的位置和体积元都是固定的，其变量为该流过体积元内的质量；而拉格朗日描述着眼于流体运动的质点或微团，研究每个流体质点自始至终的运动过程，在微分核算中，选取运动的流体中任一质量

固定的流体微元，而其位置和体积是变化的。

根据上述的讨论，欧拉型连续方程表示为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

其中 $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 表示**质量散度**，它表示固定在空间的单位体积内流体的净流出量等于该单位体积内流体质量的减少。速度场与密度场是相互制约的。

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) \begin{cases} > 0 & \text{质量净流出, 密度要减小} \\ < 0 & \text{质量净流入, 密度要增大} \end{cases}$$

对初始的连续方程做进一步展开，有：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

其中 $\nabla \cdot \vec{V}$ 表示**速度散度**，密度与比容的关系为： $\rho\alpha=1$ ，对时间求导数可得

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}, \text{ 代入上式可得 } \nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}, \text{ 于是速度散度的意义为：流体在}$$

单位时间内体积的相对膨胀率或者说在单位时间内单位体积在膨胀时所增加的部分。

$$\nabla \cdot \vec{V} \begin{cases} > 0 & \text{体积增大 辐散, 其密度要减小} \\ < 0 & \text{体积缩小 辐合, 其密度要增大} \end{cases}$$

▲ 当流体不可压，即密度为常数时，有 $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ，于是可得 $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ，

即**不可压缩流体的速度散度为零**。将 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ 记为 $\nabla_h \cdot \vec{V}$ ，称为水平散度，它

将水平风场和垂直运动联系了起来（因为在大气中进行垂直运动的观测是很难的，因此可以用水平风速分布来推断垂直运动）

▲ 注意区别 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ & $\frac{d\rho}{dt} = 0$

(1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 表示是定常流 密度的局地变化为零(也就是质量散度为 0)，它表示单位时间内流出和流入固定控制体的质量是相等的；

(2) $\frac{d\rho}{dt} = 0$ 则是不可压缩流体， $\rho = \text{const}$ ，它表示流体在流动过程中流点的密

度始终保持不变。

7. 描述大气运动的热力学方程

(1) 状态方程

根据 $pV = nR^*T$ ($R^* = 8.314472 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 为摩尔气体常数), 有

$$pV = \frac{m}{M} R^* T \Rightarrow p = \rho \frac{R^*}{M} T, \text{ 记 } R_d = \frac{R^*}{M}, \text{ 由此可得干空气的状态方程为}$$

$$p = \rho R_d T \left(p\alpha = R_d T, \alpha = \frac{1}{\rho} \right)$$

R_d 称为干空气的比气体常数, 其值为

$$R_d = \frac{R}{M_d} = \frac{8.314472}{28.9644 \times 10^{-3}} \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K}) = 287.05 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$$

▲ 如果考虑湿空气(水汽), 则引入虚温 $T_v = (1 + 0.608q)T$, 从而状态方程改写为

$$p = \rho R_d (1 + 0.608q) T$$

(2) 热力学第一定律与位温

利用能量守恒定律, 不计分子粘性造成的耗散, 推导的热力学第一定律为:

$$c_v \frac{dT}{dt} = -p \frac{d\alpha}{dt} + \dot{Q}$$

对于干空气的状态方程关于时间求全导数, 有 $\alpha \frac{dp}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = R_d \frac{dT}{dt}$, 且定压比容与定容比容有关系式 $c_p = c_v + R_d$, 从而得到第一定律的另一种表达:

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q} \left(c_v = 717, c_p = 1000, \text{unit: J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \right)$$

对绝热过程, 有 $c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = 0 \xrightarrow{\alpha = \frac{RT}{p}} c_p d \ln T - R d \ln p = 0$, 对该式取积分,

积分条件为 $(p, T) \rightarrow (\theta, p_{00})$, 得到位温的表达式为 $\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$

(3) 水汽(质量守恒)方程

设水汽密度为 ρ_v , 考虑一物质体积元 $\delta\tau$, 则水汽质量可以表示为 $\rho_v \delta\tau$ 。再

考虑该体积元中有水汽源(汇) S , 在单位时间内, 源(汇)提供的水汽质量表示为 $S\delta\tau$, 则根据水汽质量守恒, 有:

$$\frac{d}{dt}(\rho_v \delta\tau) = S\delta\tau \Leftrightarrow \delta\tau \frac{d\rho_v}{dt} + \rho_v \frac{d(\delta\tau)}{dt} = S\delta\tau \Rightarrow \frac{d\rho_v}{dt} + \rho_v \nabla \cdot \mathbf{V} = S$$

实际应用中我们常用比湿 $q = \rho_v / \rho$ 表示水汽密度, 从而上述方程可化简为

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q \mathbf{V}) = S \quad (1)$$

再将连续方程点乘比湿, 得到 $q \frac{\partial \rho}{\partial t} + q \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$, (1)-(2)得

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla q = \frac{S}{\rho}$$

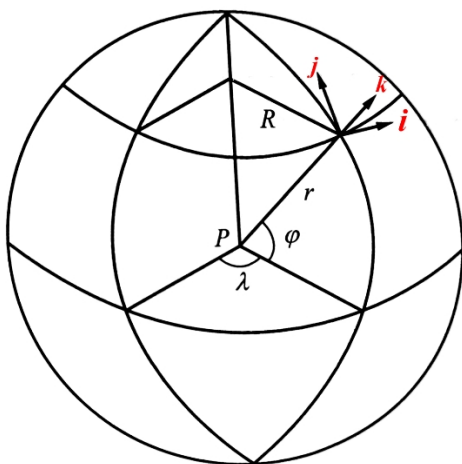
[注] (1)-(2)的推导过程提示

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} = q \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial q}{\partial t};$$

$$\frac{\partial(\rho q u)}{\partial x} = q \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial q}{\partial x} \Rightarrow \nabla \cdot (\rho q \mathbf{V}) = q \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla q$$

8. 球坐标系下的运动方程

引入球坐标系下的三个参数: λ, φ, r , λ 为经度, φ 为纬度, r 地球上某一点到地心的距离。



$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

$$u = \frac{r \cos \varphi d\lambda}{dt}, v = \frac{rd\varphi}{dt}, w = \frac{dr}{dt}$$

$$\delta x = \delta r \cos \varphi \delta \lambda, \delta y = r \delta \varphi, \delta z = \delta r$$

直角坐标系中的运动方程为: $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g} + \mathbf{F}$

(1) 球坐标系下的梯度表达——利用方向导数的定理来推导

$$i \text{ 方向上: } \lim_{\delta \lambda \rightarrow 0} \frac{p(\lambda + \delta \lambda, \varphi, r) - p(\lambda, \varphi, r)}{r \cos \theta \delta \lambda} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

$$j \text{ 方向上: } \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{p(\lambda, \varphi + \delta\varphi, r) - p(\lambda, \varphi, r)}{r\delta\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

$$k \text{ 方向上: } \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{p(\lambda, \varphi, r + \delta r) - p(\lambda, \varphi, r)}{\delta r} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

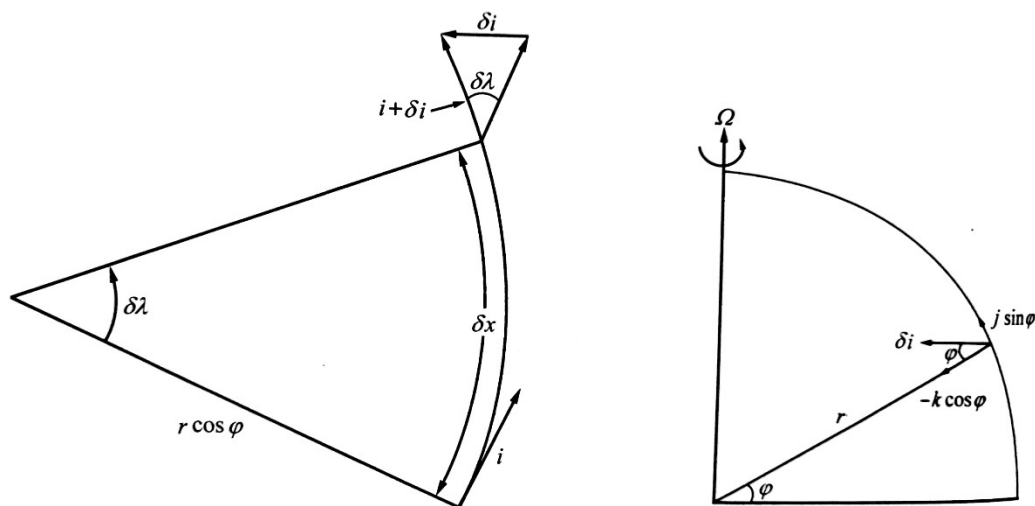
(2) 速度的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \frac{du}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv}{dt} \mathbf{j} + \frac{dw}{dt} \mathbf{k} + u \frac{d\mathbf{i}}{dt} + v \frac{d\mathbf{j}}{dt} + w \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

因为在球坐标系下 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 随时间是变化的, 所以 $\frac{d\mathbf{i}}{dt}, \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \frac{d\mathbf{k}}{dt}$ 项不为零, 下面逐

项进行讨论。

$$\textcircled{1} \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial z}, \text{ 而 } \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial z} = 0$$



▲ $\delta \mathbf{i}$ 与经度的关系及其分解

对于一个矢量求导数, 我们可以先计算出其大小, 再求出其方向。

由上图可以知道, $\left| \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} \right| = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\delta \mathbf{i}|}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta \lambda}{r \cos \varphi \delta \lambda} = \frac{1}{r \cos \varphi}$, $\delta \mathbf{i}$ 的方向指向地轴且

与地轴垂直, 其单位向量可以投影到 $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ 上, $\frac{\delta \mathbf{i}}{|\delta \mathbf{i}|} = \sin \varphi \mathbf{j} - \cos \varphi \mathbf{k}$, 所以

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{u}{r \cos \varphi} (\sin \varphi \mathbf{j} - \cos \varphi \mathbf{k})$$

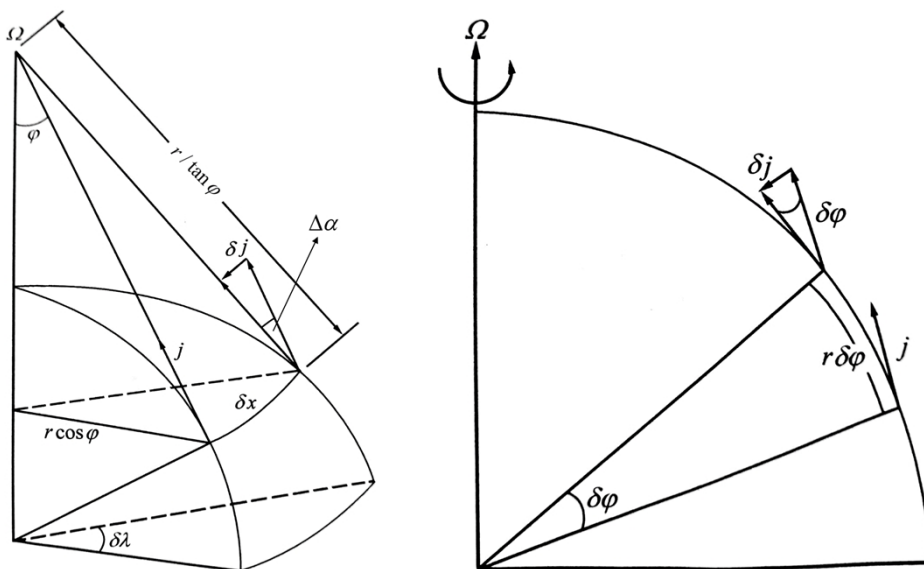
$$\textcircled{2} \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z}, \text{ 而 } \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z} = 0$$

从下图可以看出, 经过一定时间后, $\mathbf{j}$ 在 x 方向是发生了变化的, 根据几何

关系有： $|\delta \mathbf{j}| = |\mathbf{j}| \Delta \alpha, \frac{r}{\tan \varphi} \Delta \alpha = \delta x \Rightarrow |\delta \mathbf{j}| = \frac{\delta x}{r/\tan \varphi}$ ，于是 $\mathbf{j}$ 在 x 方向的变化：

$$\left| \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \right| = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\delta \mathbf{j}|}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta x}{(r/\tan \varphi) \delta x} = \frac{\tan \varphi}{r}$$

同时注意到 $\delta \mathbf{j}$ 的方向是为 $-\mathbf{i}$ 。



▲ $\delta \mathbf{j}$ 与经度(左)和纬度(右)的关系

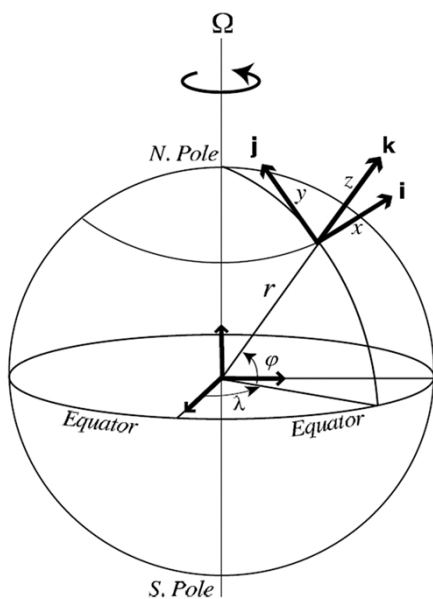
$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y}$ 的推导过程同前面的 $\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}$ ： $\left| \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \right| = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{|\delta \mathbf{j}|}{\delta y} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta \varphi}{r \delta \varphi} = \frac{1}{r}$ ，其方向为 $-\mathbf{k}$

综上所述可以得到 $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\frac{u \tan \varphi}{r} \mathbf{i} - \frac{v}{r} \mathbf{k}$

$$\textcircled{3} \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt} \times \mathbf{j}$$

将前面推导得出的结论直接代入有： $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{u}{r} \mathbf{i} + \frac{v}{r} \mathbf{j}$

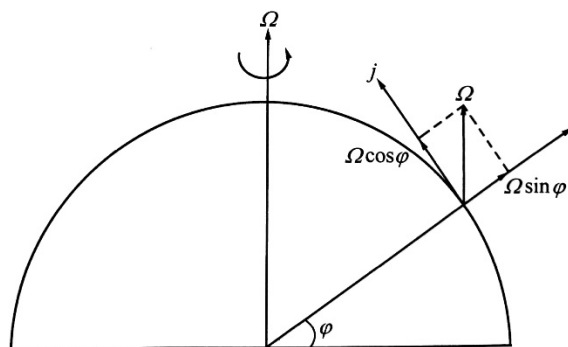
✧ 关于速度全导数的推导，这里再推荐读者另一种推导方式。



$$\begin{cases} \mathbf{i} = -\sin \lambda \mathbf{e}_1 + \cos \lambda \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{j} = -(\cos \lambda \mathbf{e}_1 + \sin \lambda \mathbf{e}_2) \sin \varphi + \cos \varphi \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{k} = (\cos \lambda \mathbf{e}_1 + \sin \lambda \mathbf{e}_2) \cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为球面上建立的坐标系的三个方向的单位矢量, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为以地心为原点建立的坐标系上的三个方向的单位矢量, 将 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 投影到 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 上面, 得到的表达式如上, 然后就可以进行数学上的求导同样也可以得到相应的表达式, 读者不妨自己尝试一下。

(3) 科氏力的表达式



▲ 地球自转角速度矢量的分解

地球上的任意一个经圈所在平面必然包含了地轴, 由此可知, Ω 在 $\mathbf{i}$ 方向上没有分量, 从而有 $\Omega = \Omega \cos \varphi \mathbf{j} + \Omega \sin \varphi \mathbf{k}$, 故科氏力的表达式可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -2\Omega \times \mathbf{V} = -2(\Omega \cos \varphi \mathbf{j} + \Omega \sin \varphi \mathbf{k}) \times (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \\ &= (2\Omega v \sin \theta - 2\Omega w \cos \theta) \mathbf{i} - 2\Omega u \sin \theta \mathbf{j} + 2\Omega u \cos \theta \mathbf{k} \\ &= (fv - \tilde{f}w) \mathbf{i} - fu \mathbf{j} + \tilde{f}u \mathbf{k} \end{aligned}$$

其中 $f = 2\Omega \sin \theta$ 称为科氏力参数, 记 $\tilde{f} = 2\Omega \cos \theta$ 。

综上, 可以得到球坐标系下的大气运动(动量)方程如下:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{r} + \frac{wu}{r} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + f\tilde{v} - \tilde{f}w + F_\lambda \\ \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{r} + \frac{wv}{r} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - fu + F_\varphi \\ \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \tilde{f}u + F_r \end{cases} \quad (*)$$

首先来看看方程是否满足绝对角动量守恒。绝对纬向速度为 $u + \Omega r \cos \varphi$ ，从而可以得到单位质量质点对地轴的角动量为 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{u} = r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi) \mathbf{i}$ ，根据角动量定理，有 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ，在绝对(惯性)参考系中 $\mathbf{i}$ 方向受到的力为水平气压梯度力和摩擦力，从而有

$$\frac{d}{dt} [r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi)] = r \cos \varphi \left(-\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda \right)$$

上式化简后可以发现与(*)的第一个方程一致，说明没有违背绝对角动量守恒。

将(*)式的三个方程分别乘以 u, v, w 再相加可以得到如下表达式：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz \right) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}$$

[注] $gw = g \frac{dr}{dt} = g \frac{d(a+z)}{dt} = \frac{d}{dt}(dz)$

上式表明，微团机械能的变化率等于气压梯度力功率与摩擦力功率的代数和，显然符合机械能守恒定律。

结合实际情况，(*)可以进行化简。首先对于大气的运动有两个假设。第一，**薄层近似假设**。由 $r = a + z$ ，当 r 处于不被微商地位时，可以用 a 来近似代替，处于微商地位时，有 $\partial r = \partial z$ 。第二，**传统近似**。 $u, v \sim 1-10 \text{ m/s}$, $w \sim 10^{-2} \text{ m/s}$, $w \ll u, v$ 。

在前面的两个假设下，同时为了满足科氏力与曲率项不做功，(*)又可以写为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \varphi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \cos \varphi \partial \lambda} + f_v + F_\lambda \\ \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \varphi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} - f_u + F_\varphi \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + F_r \end{cases}$$

[注] 利用两个假设近似后方程依然含有 $\frac{u^2 + v^2}{r}$, $\tilde{f}u$ 项, 为了满足科氏力与曲率项

不做功, 因此这两项必须略去。

9. 球坐标系下的连续方程

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

速度散度的物理意义为体积的相对变化率, 即 $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt}(\delta\tau)$, 在球坐标

系下, 体积微元的表达式为: $\delta\tau = r^2 \cos \varphi \delta\lambda \delta\varphi \delta r$, 从而

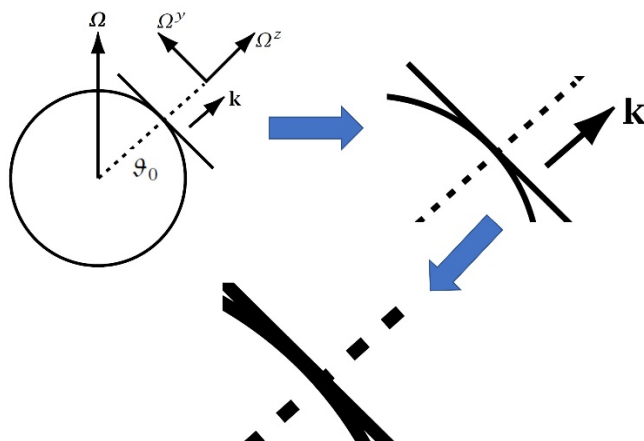
$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2 \cos \varphi \delta\lambda \delta\varphi \delta r} \frac{d}{dt} (r^2 \cos \varphi \delta\lambda \delta\varphi \delta r) \\ &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\delta u}{\delta \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\delta v}{\delta \varphi} + \frac{\delta w}{\delta r} + \frac{2w}{r} - \frac{v}{r} \tan \varphi \\ &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\delta u}{\delta \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\delta(v \cos \varphi)}{\delta \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta(w r^2)}{\delta r} \end{aligned}$$

$\delta\tau \rightarrow 0$ 取极限, 将 δ 换为 ∂ 。从而连续方程的表达式为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial(v \cos \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(w r^2)}{\partial r} \right] = 0$$

(感兴趣的读者可自行化简为 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 的形式)

10. 球坐标运动方程的简化——局地直角坐标系



物体的运动范围远小于地球(曲率)半径时,可认为物体所在的区域视为平面,此时的坐标系称为局地直角坐标系。此时, $\frac{di}{dt} = \frac{dj}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0$, 从而动量方程中的曲率项可以忽略。于是方程可以写为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \end{cases}$$

局地直角坐标系实际上是球坐标系的简化形式,它保持了球坐标系的框架,但忽略了球面曲率的影响。但是,局地直角坐标系和我们所说的直角坐标系还是有所区别的。

局地直角坐标系	笛卡尔直角坐标系
标架方向变化, 随地而异	标架方向固定
重力只出现在z方向	重力一般在水平面上也有分量
x, y的二阶交叉导数, 严格说来不相等, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, 故适用于中低纬局部地区, 不适用极区。	交叉导数相等

[注]局地直角坐标系中的二阶混合倒数:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \varphi} + \frac{\tan \varphi}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \end{cases} \Rightarrow \Delta = \frac{\tan \varphi}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

[注] 笛卡尔坐标系可以不建立在地球表面，任意位置都可以建立，而且它的 k 方向不必与球面矢量 r 的方向重合。局地直角坐标建立在地球表面，且 i, j, k 三个方向与球坐标的 i, j, k 矢量方向重合。

第二章 大气运动方程组的简化-尺度分析

▲ 为什么要进行尺度分析？

大气是多时空尺度运动，影响因子众多，描述大气运动的基本方程组十分复杂，且由于方程是高度非线性的，以目前的数学发展水平还难以给出精确解。而大气不同尺度的运动影响因子有所不同，只有略去次要因子，抓住主要因子，才能更加清晰地把握物理规律。

1. 尺度的概念

尺度：某一类运动系统中各物理量具有代表意义的量值称为该物理量的特征值，也即尺度。通常用它的**数量级**来表征其大小。

(1) 空间尺度 运动系统占据的空间范围，分为**水平(长度)尺度 L** 和 **铅直(厚度)尺度 D** (单位均为 m)。

如考虑的运动系统是涡旋(气旋、反气旋、台风等)，水平尺度可取**涡旋的特征半径**；如果研究的是**波动**，水平尺度可取为**特征波长的 $1/4$** ；铅直厚度尺度取系统的特征厚度。系统的特征主要依赖于系统的空间尺度，因此，一般用系统的水平尺度作为分类的依据。水平尺度一经确定，运动的性质就确定了。

运动	尺度	举例
大尺度运动	$L \geq 10^6 \text{ m}$	大气长波、气旋、反气旋、副高、阻塞高压、
中尺度运动	$L \sim 10^5 \text{ m}$	台风、小低涡、飑线、海陆风
中 α 尺度 (meso- α -scale)	250~2500 km	热带气旋、锋面、区域性降水
中 β 尺度 (meso- β -scale)	25~250 km	海陆风、山谷风
中 γ 尺度 (meso- γ -scale)	2.5~25 km	积云雨、山地积云、冰雹
小尺度运动 (micro-scale)	$L \leq 10^4 \text{ m}$	龙卷、小雷暴、积云

(2) **时间尺度**: 指运动系统演变经历一个阶段所需要的特征时间, 用符号 $\tau(s)$ 来表示。

一般来讲, 系统过程演变的越慢, 其时间尺度就越长, 系统的空间尺度越大, 其时间尺度也越长, 垂直速度越小; 反之亦然。如果以 C 表示系统移动或扰动传播的特征速度, 那么时间尺度 τ 可以认为是系统移动或扰动传播特征水平距离 L 所需要的时间, 即 $\tau = \frac{L}{C}$ 。

▲ 平流时间尺度

对于移动速度或传播速度不太快的运动系统, 一般可认为 $C \sim U$, 于是 $\tau = \frac{L}{U}$, 这样时间尺度不再是一个独立的尺度, 而是与平流变化项相联系, 因此称之为平流时间尺度。

(3) **速度尺度**: 给定空间尺度后对应的速度特征量。分为**水平速度尺度 U** 和**铅直速度尺度 W** (单位均为 m/s)。大气运动的水平速度一般远远大于垂直速度(水平速度的量级为 10^1 m/s , 垂直速度的量级为 10^{-2} m/s)。

(4) 热力学变量尺度

与运动学参量不同, 热力学参量的时、空变动值相对其本身很小, 达不到本身的量级。我们将热力学变量区分为两部分: 一是基本热力学变量, 它们仅是 z 的函数, 用 $\bar{p}(z), \bar{\rho}(z), \bar{T}(z), \bar{\theta}(z)$ 表示; 另一部分是相对于基本热力学变量的

偏差, 称为扰动热力学变量, 他们均是时空的函数, 用 p', ρ', T', θ' 表示。

$$\begin{cases} p = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t) \\ \rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t) \\ T = \bar{T}(z) + T'(x, y, z, t) \\ \theta = \bar{\theta}(z) + \theta'(x, y, z, t) \end{cases}$$



基本热力学参量的尺度记为 P, π, T^*, θ 扰动量的尺度记为 $\Delta P, \Delta \pi, \Delta T^*, \Delta \theta$

满足关系 $\frac{\Delta P}{P} \ll 1, \frac{\Delta \pi}{\pi} \ll 1, \frac{\Delta T^*}{T^*} \ll 1, \frac{\Delta \theta}{\theta} \ll 1$

2. 参量对时间和空间微商的简单分析

(1) 无量纲化

对于任一物理量, 都可以用实际值与其特征值相比得到一个没有单位的物理量即无量纲量。该关系可以表示为:

$$a^*(x, y, z, t) = \frac{a(x, y, z, t)}{A}$$

a 实际测得物理量; A 为该物理量的特征量, 它是一个常量, 表示该物理量的一般大小, 是有量纲的; a^* 是一个变量, 表示物理量的具体大小, 无量纲。

(2) 动力学参量的时空微商与尺度分析

假设有无量纲参数 $u^* = \frac{u}{U}, v^* = \frac{v}{U}, w^* = \frac{w}{W}, x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, z^* = \frac{z}{D}, \tau = \frac{t}{T}$ (即取平流时间尺度), 则有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{\partial v}{\partial z} \sim \frac{U}{D} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \sim \frac{\partial w}{\partial y} \sim \frac{W}{L} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{D} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{U^2}{L} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \sim \frac{UW}{L} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \sim \frac{U^2}{L} \\ u_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \sim w \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \sim \frac{UW}{L} \\ u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} \sim \frac{U^2}{D} \\ u_i \frac{\partial w}{\partial z} \sim w \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \sim \frac{UW}{D} \end{array} \right. \quad (u_i = u, v; x_i = x, y)$$

上式“ $\sim$ ”的意思为: 微商项的数量级与用特征量运算得到的数量级相当。例如,

以局地变化为例, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U}{\tau} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{U}{L/U} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{U^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*}$, 对于无因次量, 它们的数量级

均为 $10^0 = 1$ ，因此， $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的量级由 $\frac{U^2}{L}$ 来决定。

(3) 热力学参量的时空微商与尺度分析

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\Delta_h P}{L}, \frac{\partial \rho}{\partial x} \sim \frac{\partial \rho}{\partial y} \sim \frac{\Delta_h \pi}{L}, \frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{\partial T}{\partial y} \sim \frac{\Delta_h T^*}{L} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \sim \frac{\Delta_z P}{L}, \frac{\partial \rho}{\partial z} \sim \frac{\Delta_z \pi}{L}, \frac{\partial T}{\partial z} \sim \frac{\Delta_z T^*}{L} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \sim \frac{U \Delta_h P}{L}, \frac{\partial \rho}{\partial t} \sim \frac{U \Delta_h \pi}{L}, \frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{U \Delta_h T^*}{L} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \ln \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\frac{\bar{\rho} g}{\bar{p}} = -\frac{g}{R\bar{T}} \sim \frac{1}{H} \\ \frac{\partial \ln \bar{\rho}}{\partial z} = \frac{R\bar{T}}{\bar{p}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{p}}{R\bar{T}} \right) = -\frac{g}{R\bar{T}} \sim \frac{1}{H} \\ \frac{\partial \ln p}{\partial z} \sim \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} \sim \frac{1}{D} \end{array} \right.$$

上式中下标 h 表示水平， z 表示垂直。 H 表示大气标高($H \sim 10^4 m$)，若基本热力学参量的铅直厚度以标高来度量，则它们随高度的改变量可以达到本身的量级，这是基本热力学参量的一个重要性质。

	$L(m)$	$D(m)$	$U(m/s)$	$W(m/s)$	$\tau(s)$	$P(Pa)$	$\Delta_h P(Pa)$
大尺度	$\geq 10^6$	10^4	10	10^{-2}	10^5	10^5	10^3
中尺度	10^5	10^4	10	10^{-1}	10^5	10^5	10^2
小尺度	$\leq 10^4$	$10^3 \sim 10^4$	10	$10^0 \sim 10^1$	10^4	10^5	10^2
	$\Delta_z P(Pa)$	$T^*(K)$	$\Delta_h T^*(K)$	$\Delta_z T^*(K)$	$\pi(kg/m^3)$	$\Delta_h \pi(kg/m^3)$	$\Delta_z \pi(kg/m^3)$
大尺度	10^5	10^2	10^1	10^2	10^0	10^{-2}	10^0
中尺度	10^5	10^2	10^0	10^2	10^0	10^{-2}	10^0
小尺度	$10^4 \sim 10^5$	10^2	10^0	$10^1 \sim 10^2$	10^0	10^{-2}	10^0

▲ 不同尺度大气运动的基本尺度

[注] 由上表可以得到以下的结论：

- (1) 大尺度运动 $\tau = \frac{L}{U}$ ，而中、小尺度运动 $\tau > \frac{L}{U}$ ，故 $\tau \geq \frac{L}{U}$ ；
- (2) 大、中尺度运动 $D = H$ ，而小尺度运动 $D < H$ ，故 $D \leq H$ ；
- (3) 大、中、小尺度的水平速度尺度均为 $U = 10 m/s$ 。

3. 数量级运算规则

- (1) 不同尺度的变量求和，取最大的尺度项。例如 $A \sim 10^n, B \sim 10^{n-1}, C \sim 10^{n-2}$ ，则

$$(\pm A \pm B \pm C) \sim 10^n。$$

- (2) 相同尺度的物理量求和，如果它们之间没有依从关系，则其和(差)与单个数量级相同；若有依从关系，则它们的和差数量级可以小于单个数量级，需要

结合实际问题进一步分析。例如水平散度， $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L}$ ，但是 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} < \frac{U}{L}$ 。

- (3) 两个变量乘积的数量级一般为变量数量级的乘积。例如， $A \sim 10^n, B \sim 10^m$ ，那么 $A \cdot B \sim 10^{n+m}$ 。

4. 尺度分析的步骤

- (1) 根据水平尺度确定空间尺度，即属于大尺度，中尺度还是小尺度，从而确定其他变量的尺度；

- (2) 无量纲化，根据特征尺度估算某一项的数量级；

- (3) 尺度比较，保留大项，忽略小项，进行简化时注意两个原则：

- **原则 1：**简化中，尺度最大项至少保留两项，这样才能保证方程等号两边的量级相平衡。例如 $A \sim 10^n, B \sim 10^{n-1}, C \sim 10^{n-2}, D \sim 10^{n-3}$ ，则

$$A + B + C + D = 0 \quad \not\Rightarrow \quad A = 0$$

当 A, B 为最大项时，可以有 $A+B=0$ ，但是不能得到 $C+D=0$ 。

- **原则 2：**简化中，应该按照量级逐级保留，而不是保留了最大项，再保留第二大的项。

5. 大尺度运动方程组的简化及其性质

- (1) 连续方程的简化

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{U \Delta_h \pi}{L}$$

$$10^{-7}$$

$$\frac{U \Delta_h \pi}{L}$$

$$10^{-7}$$

$$\frac{W \Delta_z \pi}{D}$$

$$10^{-6}$$

$$\frac{\pi U}{L}$$

$$10^{-5}$$

$$\frac{\pi W}{D}$$

$$10^{-6}$$

大尺度运动连续方程的零级近似表达式为: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, 说明大尺度运动是

准水平无辐散的。一级近似为: $\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$, 对该式积分, 结合上

下边界条件($z=0, w=0, z \rightarrow \infty, \rho w=0$), 得

$$\int_0^\infty \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = 0$$

上式表明上下层速度辐合、辐散相互补偿, 从而使得整层大气是水平无辐散的, 这就是著名的达因(Dines)补偿原理。

(2) 水平运动方程的简化

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v - \tilde{f} w \\ \frac{U^2}{L} & \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{D} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\Delta_h P}{L} \quad f_0 U \quad f_0 W \\ 10^{-4} & \quad 10^{-4} \quad 10^{-5} \quad 10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u \\ \frac{U^2}{L} & \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{D} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\Delta_h P}{L} \quad f_0 U \\ 10^{-4} & \quad 10^{-4} \quad 10^{-5} \quad 10^{-3} \quad 10^{-3} \end{aligned}$$

由此可以写出零级近似与一级近似。

(3) 铅直运动方程的简化

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \tilde{f} u \\ \frac{UW}{L} & \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{D} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\Delta_z P}{D} \quad g_0 \quad f_0 U \\ 10^{-7} & \quad 10^{-7} \quad 10^{-8} \quad 10 \quad 10 \quad 10^{-3} \end{aligned}$$

可见, 在铅直方向上, 零级近似、一级近似甚至再高几级的近似, 其近似后

的表达式总是为 $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$ ，所以说对于大尺度运动，在铅直方向上是精确地满足准静力平衡的。

大尺度运动方程组零级近似与一级近似的比较

零级近似方程组

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

- ✓ 满足5个“准”：准地转平衡，准静力平衡，准定常，转水平无辐散，准水平运动
- ✓ 零级近似中无时间导数项，称其为**诊断方程**。

一级近似方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

- ✓ 含有时间导数项，水平运动方程为**预报方程**。
- ✓ 铅直方向上仍满足准静力平衡
- ✓ 满足达因补偿原理

图片制作：蒋斌

(4) 热力学方程的简化

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0$$

关于压强项，略去小量，有 $\frac{dp}{dt} \sim w \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g w$ ，从而热力学方程可以改写为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \left(\frac{g}{c_p} - \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$$

记 $\gamma_d = \frac{g}{c_p}$ ，表示大气的干绝热过程的

$$\begin{aligned} c_p \frac{dT}{dt} &= c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &\quad \frac{U \Delta_h T}{L} \quad \frac{U \Delta_h T}{L} \quad \frac{W \Delta_z T}{D} \\ &\quad 10^{-1} \quad 10^{-1} \quad 10^{-1} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ &\quad \frac{U \Delta_h P}{L \pi} \quad \frac{U \Delta_h P}{L \pi} \quad \frac{W \Delta_z P}{D \pi} \\ &\quad 10^{-2} \quad 10^{-2} \quad 10^{-1} \end{aligned}$$

温度递减率其值为 $\gamma_d \approx 9.8 K/km$ ； $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$ ，表示环境的温度递减率，其值为

$\gamma = 6.5 K/km$ 。上式表明，大尺度运动中温度的局地变化主要是由温度平流和铅

直运动决定的。

(5) 科氏参数的简化

将 $f = 2\Omega \sin \varphi$ 在纬度 φ_0 处进行一阶 Taylor 展开，有：

$$f \approx 2\Omega \sin \varphi_0 + 2\Omega (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi_0$$

而 $a(\varphi - \varphi_0) = y$ ，记 $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$ ， $\beta = \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{a}$ ，则 $f = f_0 + \beta y$ 。若令 L 代

表运动的经向水平尺度，则 $\frac{\beta y}{f_0} \sim \frac{\cos \varphi_0 L}{\sin \varphi_0 a}$ ，因此在中纬度地区，若物体的经向水

平尺度远小于地球半径($L/a \ll 1$)时，可取 $f \approx f_0$ ，即把 f 作为常数处理，这种近似称为 **f 平面近似**。

f 平面近似相当于完全没有考虑地球球面性所引起的 f 随纬度的变化。高一级的近似是所谓的 **β 平面近似**，其主要内容为：

① 当 f 处于系数地位不被微商时，取 $f \approx f_0$ ；

② 当 f 处于对 y 求微商地位时，取 $\frac{df}{dy} = \beta = \text{const}$ 。

显然， β 平面近似考虑了大尺度运动中 f 随纬度的变化。在低纬赤道地区， $f_0 \approx 0$ ，因而有 $f \approx \beta y = \frac{2\Omega}{a} y$ ，这称为赤道 β 平面近似。

β 平面近似在低纬好还是高纬好？

将科氏参数的 Taylor 展开严格写成拉格朗日余项形式

$$f = 2\Omega \sin \varphi_0 + 2\Omega (\varphi - \varphi_0) \cos \varphi_0 - \frac{2\Omega \sin \xi}{2!} (\varphi - \varphi_0)^2 \quad (\xi \text{ 介于 } \varphi \text{ 与 } \varphi_0 \text{ 之间})$$

由此可以知道， β 平面近似解与科氏参数的精确解之间误差为 $\frac{2\Omega \sin \xi}{2!} (\varphi - \varphi_0)^2$ ，

对于某一经向尺度为 L 的运动，满足 $a(\varphi - \varphi_0) = L$ ，从而误差的大小主要取决于 $\sin \xi$ 项，由此可知，在高纬度地区 β 平面近似所引起的误差较大。

6. 无量纲方程与无量纲参数

通过引入物理量的特征尺度(值), 我们可以得到无量纲量, 但是, 对于方程来说还是存在量纲的, 这时候如果将特征尺度进行相除, 从而可以得到无量纲的方程, 进一步, 我们将介绍一些无量纲参数。

我们以方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f v$ 为例, 引入相应的特征尺度

后, 方程变为 $\frac{U}{\tau} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \frac{UW}{D} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\Delta_h P}{\pi L} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + f_0 U f^* v^*$,

将方程两边同时除以 $f_0 U$ 得到无量纲方程

$$\frac{1}{\tau f_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{U}{f_0 L} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \frac{W}{f_0 D} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\Delta_h P}{\pi f_0 U L} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + f^* v^*$$

(1) 基别尔数 $\varepsilon = \frac{1}{f_0 \tau}$

表示局地惯性力与科氏力的尺度之比, 即

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{f v} \sim \frac{\frac{U}{\tau}}{f_0 U} = \frac{1}{f_0 \tau} = \varepsilon$$

所以当 $\varepsilon \ll 1$ 时, $\frac{\partial u}{\partial t}$ 可以相对 $f v$ 略去。由于 f_0 是大气中惯性运动的特征频率,

因此 f_0^{-1} 可视为惯性运动的特征时间 τ_e 因此 ε 又可以理解为惯性运动的时间尺度与所研究运动的时间尺度之比 ($\frac{\tau_e}{\tau}$), 它的大小可以反映运动变化的快慢程度。

显然 $\varepsilon \ll 1$ 的运动是“慢过程”; $\varepsilon \gg 1$ 的运动是“快过程”。

(2) Rossby 数 $Ro = \frac{U}{f_0 L}$

表示水平惯性力与水平科氏力之比, 即

$$\frac{\frac{\nabla_h \cdot V_h}{f v}}{\sim} \frac{\frac{U^2}{L}}{f_0 U} = \frac{U}{f_0 L} = Ro$$

当 $Ro \ll 1$ 时, 水平惯性力相对水平科氏力可以略去, 满足准地转平衡; 而当 $Ro \gg 1$ 时, 水平科氏力相对水平惯性力可以略去, 不满足准地转平衡。

(3) Richardson 数 $Ri = \frac{N^2 D^2}{U^2}$

表示大气中层结稳定度与垂直风切变之比，即

$$\frac{g \frac{\partial \ln \theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2} \sim \frac{N^2 D^2}{U^2} = Ri$$

显然，层结越不稳定 ($N^2 < 0$)，风的垂直切变越强，则越有利于湍流和对流运动的发展。负的 Ri 对应静力和动力不稳定，流动必将变成湍流状态；正的 Ri 对应静力稳定；如果 $0 < Ri < 1$ ，对应动力不稳定，流动的状态需要看历史情况，原来是湍流的仍将保持湍流。

(4) 无量纲厚度参数 $\lambda = \frac{D}{H}$

当 $\lambda \ll 1$ 时， $D \ll H$ ，系统为浅薄系统；

当 $\lambda \gg 1$ 时， $D \gg H$ ，系统为深厚系统

(5) 方程中 $\frac{\Delta_h P}{\pi f_0 UL}$ 项

对水平运动方程进行分析如下

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u$$

$$\frac{U}{\tau} \leq \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{D} \leq \frac{U^2}{L} \quad \frac{\Delta_h P}{\pi L} \quad f_0 U$$

由此可以得到它们的尺度关系满足 $\frac{\Delta_h P}{\pi L} \approx \frac{U^2}{L} + f_0 U \Leftrightarrow \frac{\Delta_h P}{\pi f_0 UL} \approx Ro + 1$ ，我们记

$R_1 = Ro + 1$ ，并规定 $Ro \leq 1$ 时， $R_1 = 1$ ； $Ro > 1$ 时， $R_1 = Ro$ ，于是有

$$\Delta_h P = \begin{cases} \pi f_0 UL, & Ro \leq 1 \\ \pi U^2, & Ro > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta_h P = R_1 \pi f_0 UL$$

所以方程中的 $\frac{\Delta_h P}{\pi f_0 UL}$ 项可以用无量纲参数 R_1 来表示。

(6) 方程中 $\frac{W}{f_0 D}$ 项

在分析这个项之前，我们先来对热力学参量的尺度描述。

对状态方程 $p = \rho R T$ 两边取对数，有

$$\ln \left[\bar{p} \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}} \right) \right] = \ln \left[\bar{\rho} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \right] + \ln R + \ln \left[\bar{T} \left(1 + \frac{T'}{\bar{T}} \right) \right]$$

注意到 $\ln \bar{p} = \ln \bar{\rho} + \ln R + \ln \bar{T}$ ，且 $\frac{p'}{\bar{p}}, \frac{\rho'}{\bar{\rho}}, \frac{T'}{\bar{T}} \ll 1$ ，根据等价无穷小关系

$\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$ ，上述方程可以继续简化为

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'}{\bar{T}}$$

同样对于位温 $\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ ，利用上述同样的方法，得到 $\frac{\theta'}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\kappa} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \left(\kappa = \frac{c_p}{c_v} \right)$ 。

状态方程与位温关系是不能简化的，因此由他们推出的扰动量的关系式也是不能

化简的，所以 $\frac{p'}{\bar{p}}, \frac{\rho'}{\bar{\rho}}, \frac{T'}{\bar{T}}, \frac{\theta'}{\bar{\theta}}$ 应该具有相同的数量级，即

$$\frac{\Delta \pi}{\pi} \sim \frac{\Delta T^*}{T^*} \sim \frac{\Delta \theta}{\theta} \sim \frac{\Delta P}{P} \sim \pi g H \begin{cases} \frac{f_0 UL}{gH}, Ro \leq 1 \\ \frac{U^2}{gH}, Ro > 1 \end{cases} \Leftrightarrow R_1 \frac{f_0 UL}{gH}$$

那么 W 又该如何用个特征尺度值来表示呢？对位温表达式取对数后取微分有：

$$c_p d \ln \theta = c_p d \ln T - R d \ln p = \frac{Q}{T}$$

对于干绝热过程，有 $\frac{d \ln \theta}{dt} = 0$ ，类似前面的方法展开后进行尺度分析如下：

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \nabla_h \cdot \mathbf{V}_h + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \frac{N^2}{g} w = 0$$

$$\frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \frac{1}{\tau} \leq \frac{U}{L} \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \quad \frac{U}{L} \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \quad \frac{W}{D} \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \leq \frac{U}{L} \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \quad \frac{N^2}{g} W$$

由上可知有尺度方程

$$\frac{U}{L} \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \approx \frac{N^2}{g} W \Rightarrow W = \frac{gU}{N^2 L} \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} = \begin{cases} \frac{f_0 U^2}{N^2 H}, Ro \leq 1 \\ \frac{U^3}{N^2 L H}, Ro > 1 \end{cases} \Leftrightarrow R_1 \frac{f_0 U^2}{N^2 H}$$

经过上面的分析后我们可以对 $\frac{W}{f_0 D}$ 进行化简如下

$$\frac{W}{f_0 D} = \frac{R_1 \frac{f_0 U^2}{N^2 H}}{f_0 D} = R_1 \cdot \frac{D}{H} \cdot \frac{U^2}{N^2 D^2} = \frac{\lambda R_1}{Ri}$$

第三章 p 坐标 铅直坐标变换

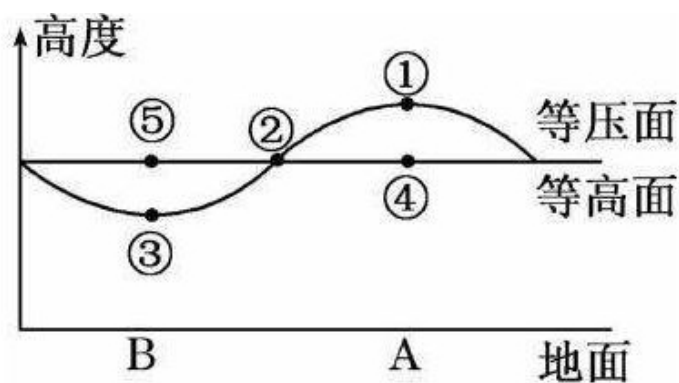
1. 等高面与等压面

(1) 等高面

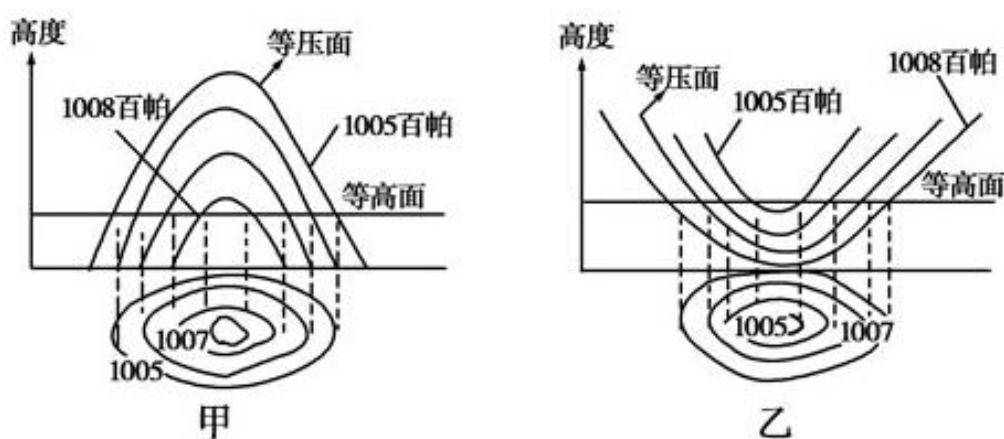
等高面是指海拔高度相等的点组成的空间平面。如海平面就是海拔高度为零的等高面。

(2) 等压面

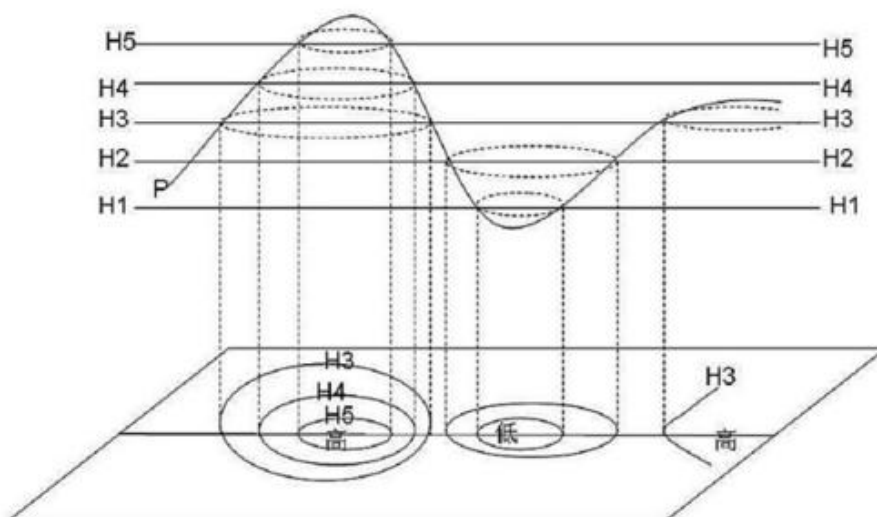
等压面是指气压相同的面。在充满平衡流体空间，连接压强相等的各点所组成的面，即空间气压相等的各点所组成的面。一般情况，由于同一高度各地气压不相等，等压面在空间不是平面，而是像地形一样起伏不平。



(a) 等高面与等压面



(b) 等高面的画法



(c) 等压面的画法

▲ 等压面与等高面区别

- ▲ 在等高面图上，用等压线表示气压的空间分布。地面图上的等压线，是地面观测站将观测值换算到平均海平面上处的气压值(又称海平面气压订正)
- ▲ 在等压面图上，用等高线表示气压的空间分布。等压面凸起的地方，表示在同一高度上，气压比四周高。在图上为一组闭合等高线构成的高值区。等压面凹下，表示同一高度上，气压比四周低。在图上为一组闭合等高线构成的低值区。因此，在等压面图上，由等高线的分布可反映等压面的起伏，表示气压的空间分布状况。
- ▲ 地面研究海平面等压线图（即等高面图），高空研究一组等压面图

2. 使用 p 坐标系的数学和物理条件

p 坐标系和 z 坐标系一样，具有相同的水平坐标 (x, y) 和时间变量 t ，因此要使得 (x, y, p) 与空间点 (x, y, z) 一一对应，归结为铅直方向上 p 与 z 一一对应。设在 z 坐标系中，气压 p 是变量场， p 是 x, y, z, t 的函数，即 $p = p(x, y, z, t)$ ，由隐函数存在定理，若满足以下条件：

- (1) $p = p(x, y, z, t)$ 连续且具有连续偏导数；
- (2) 当固定 x, y, t 时， $p = p(x, y, z, t)$ 是 z 的单调函数，即： $\frac{\partial p}{\partial z} \neq 0$ 。

则有 $z = z(x, y, p, t)$ 存在，且是 x, y, p, t 的单值函数，存在连续偏导数。

[注] 隐函数存在定理知识点回归：[高等数学学习笔记——隐函数存在定理](#)

在大气运动的物理过程中，如何维持 $\frac{\partial p}{\partial z} \neq 0$ 的条件呢？我们知道，在大尺度运动中，大气具有静力平衡的性质： $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g < 0$ ，即气压随高度单调递减。

综上：建立 p 坐标系的数学条件为 p 是 z 的单调函数，物理条件为满足静力平衡近似。

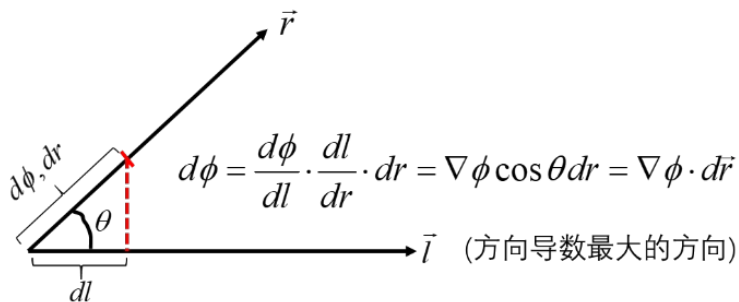
▲ 用静力平衡近似去描述中小尺度运动时，往往差别较大，可能的原因有：

- (1) 水汽的加入。水汽的加入往往以一种“非线性”的形式加入，水汽的加使得浮力发生变化，同时，水汽的相变也会使得大气不稳定性增加；
- (2) 湍流不稳定过程导致湍流应力发生变化。

因此在中小尺度中要慎用“静力平衡近似”，也即 p 坐标系用来描述中小尺度运动时不太准确。

3. 静力平衡下的大气结构

静力平衡下， $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ ，代入状态方程 $p = \rho R T$ ，有 $g dz = -R T d \ln p$ 。重力场是有势场，所以有 $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$ ，两边同时点乘 $d\mathbf{z}$ ，注意到 $\mathbf{g}$ 的方向(向下)与 $\mathbf{z}$ 的方向(向上)相反，所以有 $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{z} = -g dz = -\nabla \Phi \cdot d\mathbf{z} \Rightarrow d\Phi = g dz$ ($d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$ 的推导过程见下图)。于是可以得到高度为 z 处的重力位势为： $\Phi = \int_0^z d\Phi = \int_0^z g dz$



定义位势高度： $Z = \int_0^z \frac{d\Phi}{g_0} = \int_0^z \frac{g}{g_0} dz$ ，单位为位势米(gpm)，这里的 g_0 应看成

仅是一个数值，表示全球海平面上重力加速度的平均值，其值为 $g_0 = 9.80665 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{gpm})$ 。位势高度的另一种物理意义为表示单位质量的物体从海平面上升到某高度克服重力所作的功。

▲ 使用位势高度的优势

- ① 在等位势面上研究空气运动，由于重力与等位势面垂直，就没有重力切向分力的影响。这样就使我们在处理问题时比较简单，所以等位势面也就是我们通常所说的水平面；
- ② 可以不考虑重力加速度随纬度和高度的变化，根据实测的气压和温度就可以计算位势高度，比较方便

在定义了位势高度以后， $gdz = -RTd \ln p$ 又可以写成 $dZ = -\frac{RT}{g_0} d \ln p$ ，该式表明位势高度随时气压的变化仅取决于温度。在铅直方向上积分有

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1 = -\frac{R}{g_0} \int_{p_1}^{p_2} T d \ln p$$

定义两层等压面之间的平均温度为 $\bar{T} = \frac{\int_{p_1}^{p_2} T d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p}$ ，于是

$$\Delta Z = -\frac{R\bar{T}}{g_0} \int_{p_1}^{p_2} d \ln p = \frac{R\bar{T}}{g_0} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

若给定初始条件为海平面，即 $Z=0, p=p_0$ ，那么上式可化简为

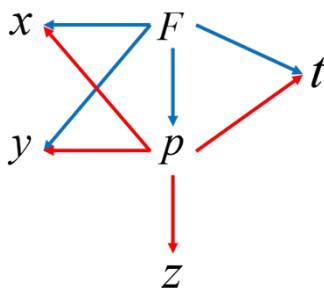
$$Z(p) = \frac{R\bar{T}}{g_0} \ln \frac{p_0}{p} \Leftrightarrow p(Z) = p_0 \exp\left(-\frac{g_0}{R\bar{T}} Z\right)$$

即气压随高度呈指数减小，且平均温度越低，这种减弱越迅速。

4. z 坐标与 p 坐标的转换—— p 坐标系下的方程组

在 p 坐标系中，设任意变量场可以表示为 $F(x, y, p, t)$ ，而在 z 坐标系中

$p(x, y, z, t)$, 将 p 坐标系中的变量场在 z 坐标系求偏导, 根据复合函数求导链式法则(变量之间的关系如下图所示)有:



▲ 各变量之间的关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z \\ \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z \end{array} \right. \xrightarrow{F \rightarrow z} \left\{ \begin{array}{l} 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p + \frac{\partial z}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z \\ 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial z}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z \\ 1 = \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \right) \\ 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \frac{\partial z}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z \end{array} \right. \quad (p \text{ 坐标系中 } z = z(x, y, p, t))$$

以第一个方程为例, 不带下标可以写为

$$\frac{\partial F(x, y, p(x, y, z, t), t)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, y, p, t)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, p, t)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

从数学上来说 $F(x, y, p(x, y, z, t), t)$ 的自变量是 x, y, z, t , $F(x, y, p, t)$ 的自变量是 x, y, p, t 且 p 还是中间变量, 所以方程两边如果简写的话方程两边的 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 中的 F 是不一样的。

(1) p 坐标中的全导数

$$\frac{dF(x, y, p, t)}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_p + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_p \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_p \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{dp}{dt}$$

将 $\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v$ 代入, 并令 $\omega \equiv \frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z + v \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z + w \frac{\partial p}{\partial z}$, 有

$$\frac{dF(x, y, p, t)}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_p + u \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_p + v \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_p + \omega \frac{\partial F}{\partial p}$$

ω 称为 p 坐标系中的铅直速度, 又称 ω 速度, 他表示微团气压的个别变化率。对于天气尺度的系统来说, 有

$$\frac{\partial p}{\partial t} \sim 10 \text{ hPa/d}, u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \sim 1 \text{ hPa/d}, \omega \frac{\partial p}{\partial z} \sim 100 \text{ hPa/d}$$

因此取零级近似有 $\omega \approx w \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g w$ 。显然, 当 $\omega < 0$ 时, $w > 0$, 空气做上升运动; 反之, 空气做下沉运动。

(2) 水平运动方程

水平气压梯度力(以 x 方向为例): $-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p$, 于是水

平运动方程可以写为:

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dt} \right)_p = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p + fv \\ \left(\frac{dv}{dt} \right)_p = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p - fu \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{V}_h}{dt} = -\nabla_p \Phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{V}_h$$

(3) 铅直方向运动方程

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \Leftrightarrow \frac{g \partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}$$

(4) 连续方程

体积微元的表达式为 $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$, 又 $\delta p = -\rho g \delta z$, 于是有

$\delta m = \rho \delta\tau = -\frac{\delta x \delta y \delta p}{g}$, 根据质量守恒, 由 $\frac{1}{\delta m} \frac{d}{dt}(\delta m) = 0$, 有

$$\frac{1}{\delta x \delta y \delta p} \frac{d}{dt}(\delta x \delta y \delta p) = \frac{1}{\delta x} \delta \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{1}{\delta y} \delta \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{\delta p} \delta \left(\frac{dp}{dt} \right)$$

分别取极限可以得到连续方程的表达式为: $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$

[注] 连续方程的另一种推导方法

z 坐标系中的连续方程为 $\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$ ，将 $\frac{d\rho}{dt}$ 进行展开，代入静力平衡方程

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \xrightarrow{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g} -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{1}{g} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial p}{\partial z}$$

上式中 $\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial p}{\partial z} = u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)$ ，根据前面的

分析， $p(x, y, z, t)$ 具有连续的偏导数，所以

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right), u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

根据求导法则 $(uv)' = u'v + uv'$ ，有

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{g} \left[u \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] \\ & = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{g} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

上式第一项与首相合并后为

$$-\frac{1}{g} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(w \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dp}{dt} \right) = \rho \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (\text{I})$$

根据变换关系 $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_p + \frac{\partial F}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_p - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z$ (其他项类比该表达式)，第二项可以化为

$$\rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_p - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_z - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_z - \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (\text{II})$$

结合(I)(II)同样可以得到连续方程的形式。

(5) 热力学方程

热力学第一定律 $c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q} \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} - \frac{\omega}{\rho c_p} = \frac{\dot{Q}}{c_p}$, 将温度的全导数在 p 坐标

标系下展开有

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p + \omega \frac{\partial T}{\partial p}$$

代入原表达中有 $\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p + \omega \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{1}{\rho c_p} \right) = \frac{\dot{Q}}{c_p}$

考虑到 $\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial T}{\partial z}$, 有 $\omega \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{1}{\rho c_p} \right) = \frac{\omega}{\rho g} \left(-\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g}{c_p} \right) = \frac{\omega}{\rho g} (\gamma - \gamma_d)$, 定义静

力稳定度参数 $S_p = \frac{1}{\rho g} (\gamma_d - \gamma) = \frac{RT}{\rho g} (\gamma_d - \gamma)$, 得到最终的热力学方程表达式为:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p - S_p \omega = \frac{\dot{Q}}{c_p}$$

5. 边界条件

$$\omega = \frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z + v \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z + w \frac{\partial p}{\partial z}$$

依据 P35 页的转换关系, 有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z = \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_p, \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p, \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p, \text{于是可以得到 } p \text{ 坐标系下}$$

的 ω 表达式为

$$\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{p}{RT} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_p + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p - g w \right]$$

■ 下边界条件

对于平坦的地面, $z=0, w_0=0$, 若近似认为大气下边界上气压分布均匀,

地表与某一个等压面 p_0 重合, 那么 p 坐标系下的下边界条件可以写为

$$p = p_0 \quad \omega_0 = \frac{p_0}{RT_0} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_p + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p \right]_{p_0}$$

由于 $\omega \approx -\rho g w$, 对于平坦地面, 有 $p = p_0$ $\omega_0 = 0$

■ 上边界条件

$$p \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$$

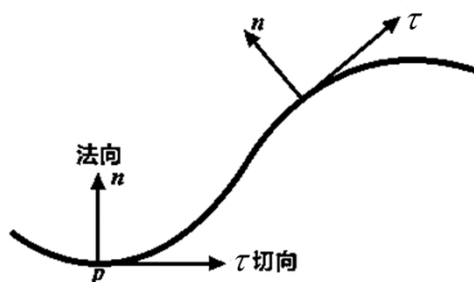
6. p 坐标系的优缺点

- (1) p 坐标系中的大气运动方程组减少了一个场变量, 密度的影响隐含在等压位势变化之中, 气压梯度力项成为线性项, 形式简单;
- (2) 连续方程具有较简单的形式, 成了一个诊断方程, 大气运动方程组只由三个预报方程和两个诊断方程构成;
- (3) 日常工作业务中采用的等压面分析方法, 便于利用 p 坐标系方程组进行诊断计算与分析;
- (4) 等压面相对水平面的坡度很小, 可以认为是准水平的, 因此, 虽然在 p 坐标系中分析的是等压面上要素分布的特征不易给人有直观理解, 但由于等压面是准水平的, 它近似反映了等压面平均高度上的要素水平分布特征。

缺点: 难以正确给出下边界条件; 对于中小尺度运动不满足静力平衡条件, 不能用 p 坐标系运动方程组来描述它们的运动规律。

第四章 自由大气中的平衡流场

1. 自然坐标系及有关方程的转换



自然坐标系分为沿轨迹切向和法向两个方向, 单位矢量分别记为 τ, n 。需要

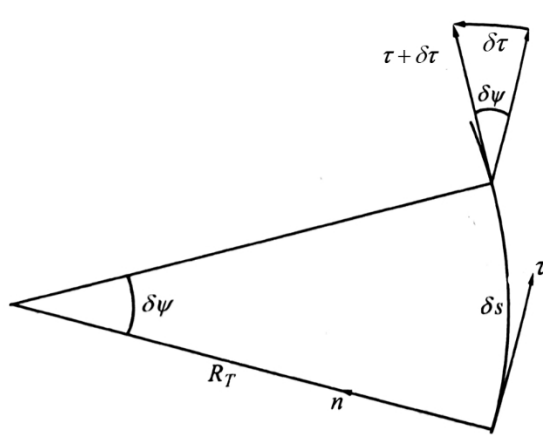
指出的是，这里的 $\mathbf{n}$ 的定义与数学上的定义有所不同，它始终指向水平气流运动方向，即切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的左侧。

(1) 加速度表达式

在自然坐标系下，速度表达式为 $\mathbf{V} = V\boldsymbol{\tau}$ ，于是加速度的表达式为：

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + V\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

下面主要讨论 $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$ 的结果。



假设空气微团经过 δt 时间运动了距离 δs ，如上图所示，其中 R_T 表示微团轨迹的曲率半径，因为 δs 很小，因此可以近似认为空气微团在做以 R_T 为半径的圆周运动。图中 $\delta\boldsymbol{\tau}$ 方向为 $\mathbf{n}$ ，根据几何关系有： $|\delta\boldsymbol{\tau}| = \delta\psi = \frac{V\delta t}{R_T}$ ，于是

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{|\delta\boldsymbol{\tau}|}{\delta t} \mathbf{n} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \cdot \frac{V\delta t}{R_T} \mathbf{n} = \frac{V}{R_T} \mathbf{n}$$

从而加速度的表达式为 $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{R_T}\mathbf{n}$ ， $\mathbf{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau}$ 称为切向加速度，

$\mathbf{a}_n = \frac{V^2}{R_T}\mathbf{n}$ 称为法向加速度(向心加速度)。

(2) 科氏力 因为科氏力始终和速度方向垂直，所以科氏力写为 $fV\mathbf{n}$

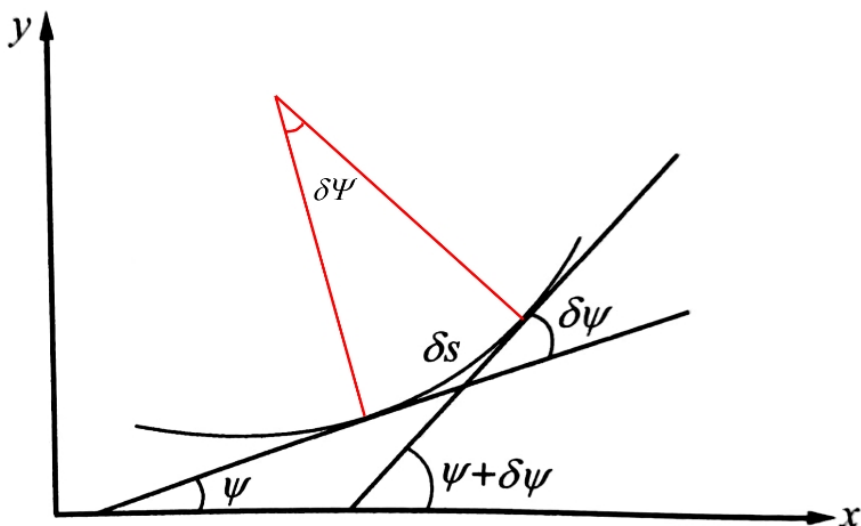
(3) 压强梯度力 $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\mathbf{n}$

这样水平运动方程 $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - f\mathbf{k} \times \mathbf{V}$ 在自然坐标系下的分量形式为:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{V^2}{R_T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - fV \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial s} \right) \end{cases}$$

2. 流线与轨迹

- (1) 轨迹: 空气微团的实际运动路径。
- (2) 流线: 在某一时刻, 水平流场中与水平速度矢量相切的一簇有向曲线。
- (3) 曲率: 平面上曲线弧段切线方向改变角与弧段长度之比的极限值。



根据上述的有关定义, 得到流向和轨迹的曲率定义如下

$$\begin{cases} k_T = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta s} = \frac{d\Psi}{ds} \\ k_s = \lim_{\delta s \rightarrow 0, t=t_0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta s} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} \end{cases}$$

对 $d\Psi$ 进行全微分再展开有

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds + \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt \Leftrightarrow \frac{d\Psi}{ds} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{dt}{ds}$$

由此可以得到关系 $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = V(k_T - k_s) = V \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_s} \right)$ (R_T, R_s 分别为轨迹、流线的曲率

半径), 这个关系又称为**布拉通(Blaton)公式**。在气象上, 称 $\frac{d\Psi}{dt}$ 为风向角沿着轨

迹的绝对变化率，称 $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ 为某一时刻风向角沿着流线的局地变化率。布拉通公式表明，局地风向不随时间发生变化时，流线与轨迹才重合，反之也成立。

3. 平衡流场的基本模式与性质

(1) 地转风

➤ **概念：**在大气运动的水平方向上，水平气压梯度力和水平地转偏向力相平衡下的大气风场。

➤ **公式：**对大气运动方程进行 0 级简化，即只保留每项中数量级最大的项，有：

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{cases} \Leftrightarrow V_g = -\frac{1}{f\rho} \nabla_h p \times \mathbf{k}$$

在自然坐标系下来看，达到地转平衡时，空气微团将做匀速直线运动，所以

$\frac{dV}{dt} = 0$ ；此时流场的等压线为一族平行的直线，可以认为是 $|R_T| \rightarrow \infty$ ，从而 $\frac{V^2}{R_T} = 0$ ，

于是地转风的大小为： $V_g = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$

➤ 地转风的特点

- ① 忽略了加速度、摩擦力项以及垂直速度引起的水平地转偏向力项，适用于中高纬自由大气大尺度运动；
- ② 南北纬 5° 以内不可能建立地转平衡关系，因为在赤道处 $\phi=0^\circ$ ，科氏力参数为 0，而在 5° 以内， $\sin \phi$ 又很小，地转偏向力也比较小；
- ③ 地转风的大小正比于气压梯度力，反比于纬度。同一纬度上，气压梯度力越大，意味着地转偏向力也要越大，而较大的地转偏向力必然需要较大的地转风速；在水平气压梯度力相同时，纬度越高，科氏力参数越小，对应的地转风也越大。
- ④ 由地转风可以得到著名的白贝罗定律：在北半球，背风而立，高压在右，低压在左，南半球则相反。

⑤ 地转风的散度为 0。

$$\begin{cases} u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \\ v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} \end{cases}$$

$$\nabla_p \cdot \vec{V}_g = -\frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) + \frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

▲ 利用 “ p ” 坐标系的求散度

(2) *惯性运动

➤ 定义: 压强水平分布均匀(压强梯度为 0)时, 科氏力与惯性离心力相平衡的流场称为惯性流, 或称为惯性运动。

➤ 公式

根据定义, 在自然坐标系下, 有 $\frac{V_i^2}{R_T} + fV_i = 0 \Rightarrow R_T = -\frac{V_i}{f}$ 。 V_i 代表惯性运动

的速度, 为一常数。由于 f 随纬度的变化很小, 因此可以认为微团运动的轨迹是一个以 $|R_T|$ 为半径的惯性圆。因为在自然坐标系下速度总是大于 0, 因此

$R_T < 0$, 故在北半球是反气旋式的。在大气中, 这种运动不易被观察到, 对天气的影响也是微不足道的。

(3) *旋衡运动

- **定义** 当空气质点做强烈旋转运动时，离心力变得很重要，因为离心力与风速的二次方成正比，而科氏力只与风速的一次方成正比，当风速大，曲率半径小时，科氏力仍然可能被忽略。这种情况下，气压梯度力同惯性离心力处于平衡的流动称为旋衡运动。

➤ **公式**

根据定义： $\frac{V_c^2}{R_T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \Rightarrow V_c = \sqrt{-\frac{R_T}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}}$ ，根号下的

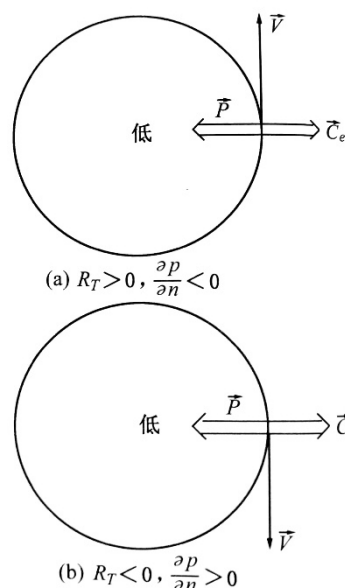
项需满足大于 0，因此又分为了两种情形：

$R_T > 0, \frac{\partial p}{\partial n} < 0$ 和 $R_T < 0, \frac{\partial p}{\partial n} > 0$ ，如右图。惯性离心力和

科氏力的比值为 $\frac{V^2/R_T}{fV} = \frac{V}{fR_T}$ (有点类似罗斯贝数)，假定离涡旋中心 300m，龙卷

的切向速度为 30m/s，而 $f \sim 10^{-4} s^{-1}$ ，则有 $\frac{V}{fR_T} \sim 10^3 \gg 1$ ，因此可以认为科氏力

可以忽略，但这并不是说科氏力不起作用，虽然前面给出了两种情况，实际上，在北半球的龙卷多数是气旋式的，即在龙卷的发展初始阶段科氏力使得气流右偏，从而建立起绕低压中心的气旋式环流。



(4) 梯度风

- **定义**：在没有或不考虑摩擦力时，气压梯度力、地转偏向力和惯性离心力三力平衡称为梯度风平衡。此时的风称为梯度风。

▲ **梯度风高度**：梯度风是在不考虑摩擦的情况下，气压梯度力，地转偏向力和惯性离心力平衡时的风场。但在实际大气中，由于受到地表摩擦的作用，只有离地面 300-500 米以上的地方，风才不受地表的影响，能够在气压梯度力的作用下自由流动，达到所谓梯度风速度，而将出现这种速度的高度称之为**梯度风高度**。地面粗糙程度不同，近地面风速变化的快慢不同。地面越粗糙，能量损失多，风速变化越快，梯度风高度将越高；反之，地面越平坦，能量损失少，风速变化将越慢，梯度风高度将越小。

➤ 公式

用 V_G 表示梯度风，由于有梯度风时，等压线与流线重合，所以 $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ ，从而只需考虑法向方程

$$\frac{V^2}{R_T} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + fV = 0$$

上述是一个关于 V 的一元二次方程，通解为 $V_G = -\frac{R_T}{2}f \pm \frac{R_T}{2}\sqrt{f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$ 。对于

选取那个解，需要进一步讨论，但是，有几点是可以明确的：

- ◆ 在自然坐标系下， $V_G > 0$ ；
- ◆ 根据风压定律，有 $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$ （梯度的方向是函数增长最快的方向，所以梯度方向为小值指向大值方向）；
- ◆ 为保证根号下的式子有意义， $f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ ；
- ◆ $R_T > 0$ 为气旋， $R_T < 0$ 为反气旋。

对于气旋式环流， $R_T > 0$ ，若取“-”号，则 $V_G < 0$ ，这与我们的自然坐标取法是相矛盾的，因此只能取“+”号，即在气旋中，梯度风速率应该为

$$V_G = -\frac{R_T}{2}f + \frac{R_T}{2}\sqrt{f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$$

在反气旋式环流（大尺度系统）中， $R_T < 0$ ，而且 $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$ ，也就是说 f^2 要减去一个正值，如果取“-”号，即 $V_G = -\frac{R_T}{2}\left(f + \sqrt{f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}\right)$ ，这意味着气压梯度力越大的时候， V_G 越小，这与我们所说的“气压梯度力越大，风速越快”是相违背的，因此，在反气旋中也只能取“+”号

通过以上的讨论，我们可以知道，对于气旋和反气旋，梯度风的速率都为

$$V_G = -\frac{R_T}{2}f + \frac{R_T}{2}\sqrt{f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}, \text{ 不难看出，梯度风的大小与曲率半径，地转参}$$

数，以及气压梯度密切相关。对于气旋环流，当 $\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right| \rightarrow 0$ 时， $V_G \rightarrow 0$ ；当

$\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right| \rightarrow \infty$ 时， $V_G \rightarrow \infty$ ，也就是说，气旋式环流的风速和气压梯度可以无限增

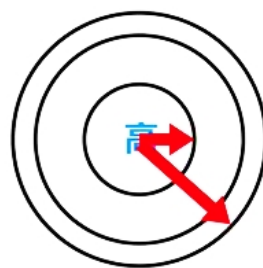
大，没有上限。而对于反气旋环流，因为 $R_T < 0$, $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$ ，

需要满足 $f^2 - \frac{4}{R_T\rho}\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ ，由此有 $\left|\frac{\partial p}{\partial n}\right| \leq \left|\frac{\rho f^2 R_T}{4}\right|$ ，这就意味

着在反气旋式环流中风速和气压梯度不能无限增大，可以

求出 $(V_G)_{\max} = -\frac{R_T}{2}f$ 。在高压的外围，因为曲率半径较大，

可以有较大的气压梯度；而在高压的内部，由于曲率半径较小，气压梯度必须较小才行。这在天气图上反映为：对于低压，越向中心，风越大，气旋中心等压线密集；对于高压，越向边缘，风越大，高压中心等压线稀疏。



➤ 梯度风与地转风的比较

$$\begin{cases} \frac{V_G^2}{R_T} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + fV_G = 0 \\ V_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_g}{V_G} = 1 + \frac{V_G}{fR_T}$$

由上式可以知道，在气旋式环流中 ($R_T > 0$)， $\frac{V_g}{V_G} > 1$ ，即地转风比梯度风大；

而在反气旋中恰好相反，再根据 $(V_G)_{\max} = -\frac{R_T}{2}f$ ，可以得到在反气旋环流中的

最大梯度风与地转风的关系： $(V_G)_{\max} = 2V_g$

4. 热成风原理

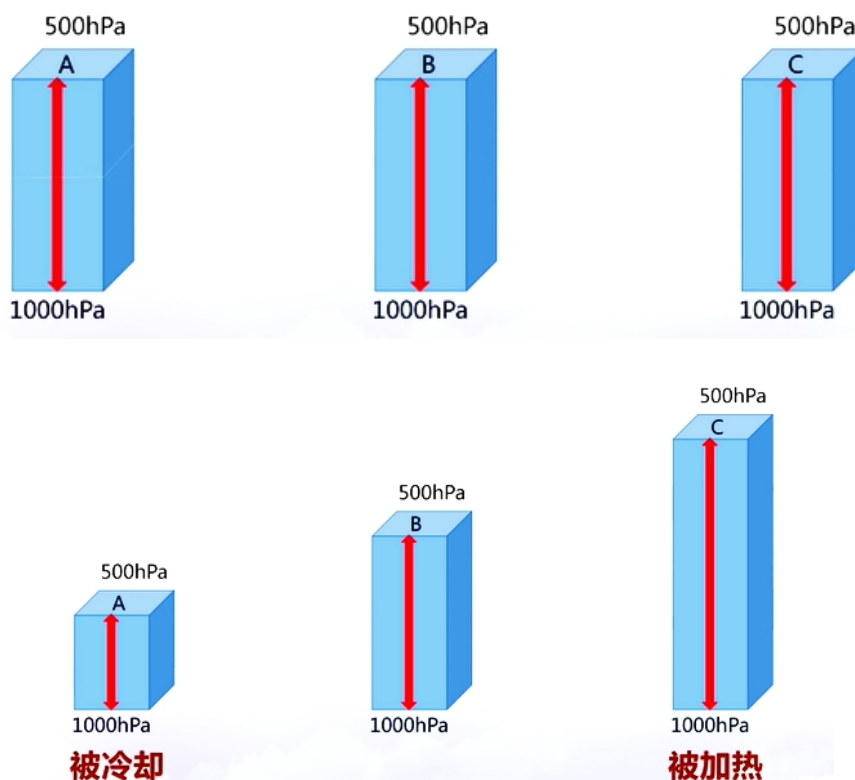
(1) 概念：地转风随高度的改变量称热成风(用 V_T 表示)，即上下两层地转风之差。

在“ P ”坐标中，地转风的表达式为
$$\begin{cases} u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases}$$
，这表明地转风的大小

与等压面的坡度是有关的，即**坡度越大，地转风的速率越大**。

根据静力学方程，有 $z_1 - z_0 = \frac{R\bar{T}}{g} \ln \frac{p_0}{p_1}$ ，由此可知，在给定等压面上，

其与基准参考平面 p_0 之间的距离取决于气柱的温度 (如下图所示)。因此，
当温度引起等压面之间的坡度不一致时，地转风随高度就发生了变化，而这个变化量，就是热成风。

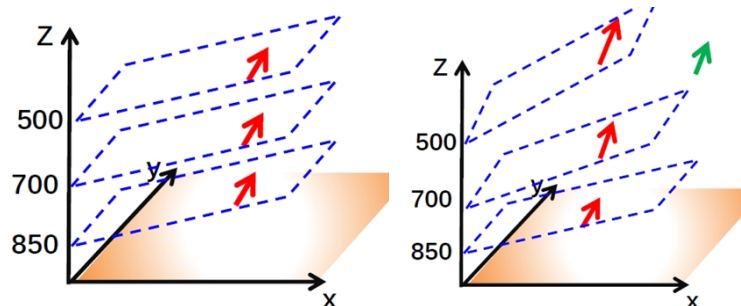


▲ 温度不均匀导致的等压面倾斜

▲ 正压大气与斜压大气

正压大气：地转风不随高度变化，温度均匀的大气(等高线与等温线重合)。

斜压大气：地转风随高度变化，温度分布不均匀。



▲ 等压面间的平行(左)与不平行(右)

(2) 热成风的表达式

$$\vec{V}_T = \vec{V}_{g1} - \vec{V}_{g0} \xrightarrow{\text{写成分量形式}} \begin{cases} u_T = -\frac{g}{f} \frac{\partial(z_1 - z_0)}{\partial x} \\ v_T = -\frac{g}{f} \frac{\partial(z_1 - z_0)}{\partial y} \end{cases} \xrightarrow{\text{令 } h = z_1 - z_0} \vec{V}_T = \frac{g}{f} \vec{k} \times \nabla h$$

h 越厚表示温度越高
h 越薄表示温度越低

以上是热成风最基本的表达式。而根据静力学方程，有

$$h = z_1 - z_0 = \frac{R\bar{T}}{g} \ln \frac{p_0}{p_1}, \text{ 因此, 热成风的表达式又可以改写为: } \vec{V}_T = \frac{R}{f} \ln \frac{p_0}{p_1} \vec{k} \times \nabla \bar{T}$$

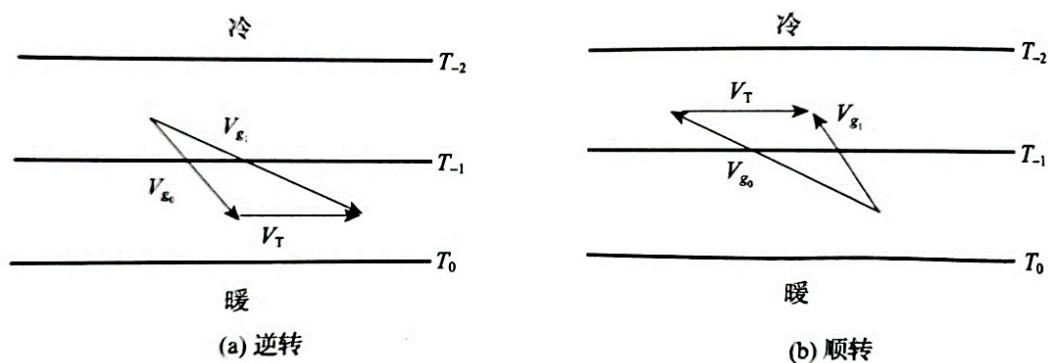
($\nabla \bar{T}$ 为两等压面之间的平均温度梯度)，它更加直接的体现出“热”字的来源。

显然，在锋区附近，温度梯度很大，所以锋区附近的热成风很大。

(3) 热成风的特点 ★

- ④ 热成风与等平均温度线平行，北半球背热成风而立，低温在左，高温在右；
- ⑤ 热成风风速大小与平均温度梯度或厚度梯度成正比，与纬度成反比，等温线越密集热成风越大。

(4) 热成风的重要应用——温度平流



▲ 地转风随高度变化与冷暖平流

如上图，根据温度的分布，可以判断出热成风的风向。对于(a)的逆转，可以看出地转风具有由北向南的分量，风从冷区吹向暖区，即气层中有冷平流；对于(b)的顺转，可以看出地转风具有由南向北的分量，风从暖区吹向冷区，即气层中有暖平流。

热成风可以用来判断不稳定度。例如根据某单站高空风图判断出热成风先顺转，后逆转——也就是说下层越来越热，上层越来越冷，此时的大气显然是不稳定的。



除此之外，利用热成风可以判断不稳定度的方位。如下图为某地的高空风图，我们发现 925~850hPa 之间与 850~700hPa 之间形成的热成风方向变化较大，可以把它拿出来单独分析（如左图）

◀ 某地的高空风站图（不同高度之间的连线即为热成风）



图片制作：蒋斌

根据热成风风向判断冷暖区域

▲ 利用热成风判断不稳定的方位

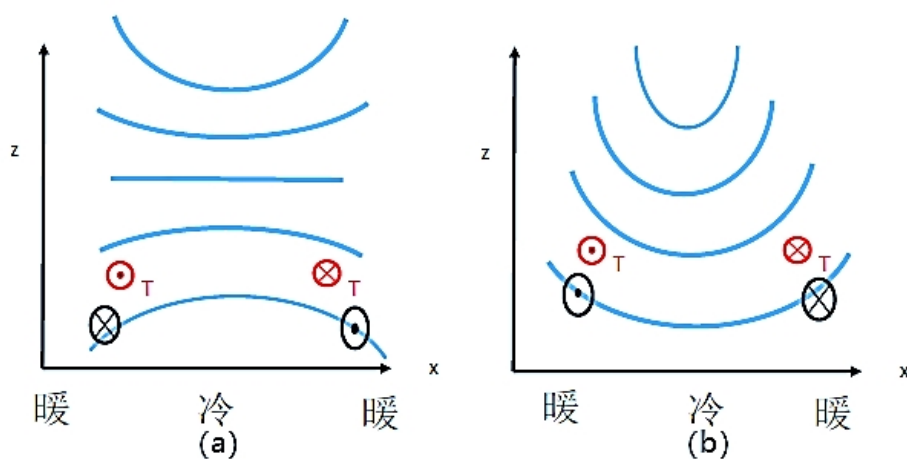
(5) 热成风应用拓展——深厚系统与浅薄系统

浅薄系统：冷高压、暖低压；

深厚系统：冷低压、暖高压。

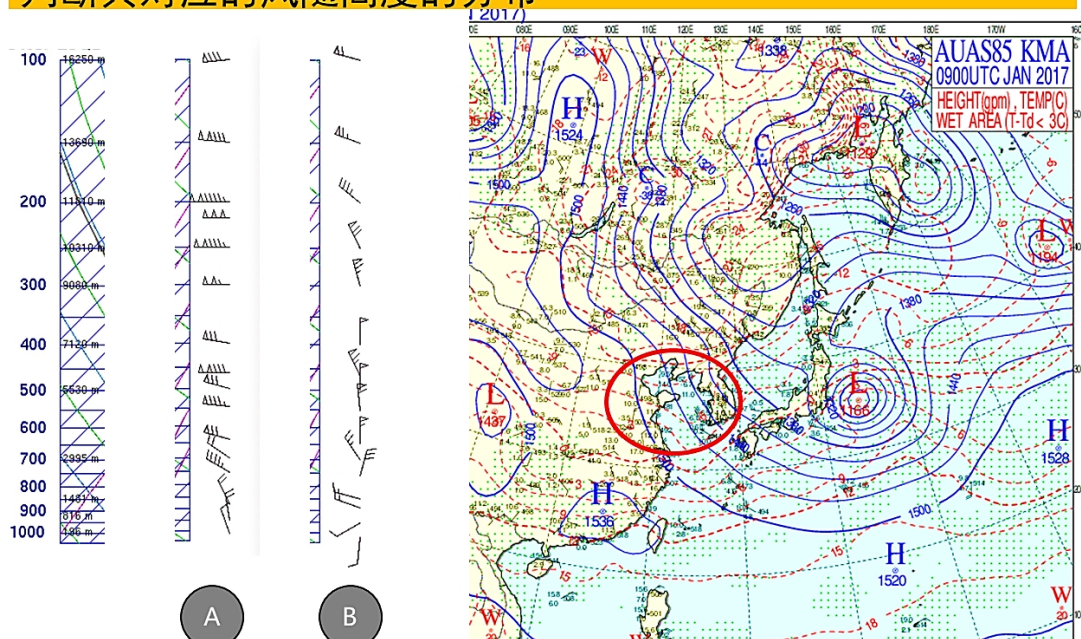
简单来说，如果低空的形势在高空被削弱，甚至出现与低空相反的趋势，那么称这种系统为浅薄系统；如果低空的形势一直发展到高空，甚至得到了加强，那么这种系统称为深厚系统。下面我们从热成风的角度来理解浅薄与深厚系统。

如下图所示为系统的剖面图，蓝色线条为等压面。对于图(a)，这是一个冷高压，因为近地面处等压面上凸，使得中心气压比周围高，产生辐散，在科氏力的作用下产生气旋式环流(图中黑色的 $\otimes, \odot$ ，代表气流方向)。此时再根据“暖-冷-暖”的温度差场配置得到红色 $\otimes, \odot$ 表示的热成风流场，显然热成风的输送方向与实际气流的输送方向恰好相反，从而使得中心气压与周围气压的梯度减小，等压面的上凸减弱，到了高空甚至出现下图。图(b)为冷低压，读者可以仿照上述的解释理解。



【牛刀小试】A 和 B 两条曲线哪一条可能代表青岛站的探空曲线图？

看天气图中标注区域的温度平流，
判断其对应的风随高度的分布



【分析】A 根据天气图可知，在青岛站上空有强烈的冷平流，根据热成风原理，垂向风应该发生逆转，据此可以判断出 A 图可以代表当前形势下的探空曲线。

5. 地转偏差

(1) 概念：实际风与地转风之差 $\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{V}_g$ 称为地转偏差，或偏差风。

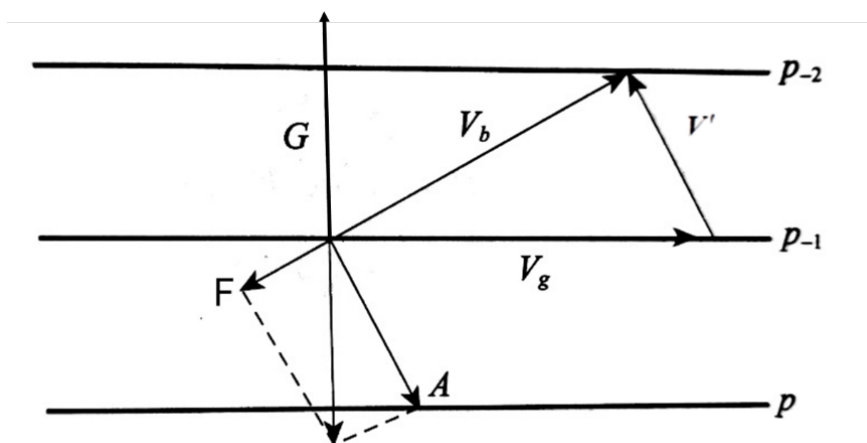
(2) 边界层中的地转偏差

在边界层的大气中，下垫面与空气的湍流交换比剧烈，由此产生了较大的摩擦（下垫面越粗糙，摩擦作用越大）。在边界层中，主要是摩擦力、气压梯度力和地转偏向力三力的平衡，即平衡方程为：

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + F_x \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + F_y \end{cases} \quad (\text{矢量式为: } 0 = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F})$$

又根据公式 $\mathbf{V}_g = -\frac{1}{f\rho} \nabla_h p \times \mathbf{k}$ ，代入上述矢量平衡方程，有 $0 = f \mathbf{k} \times \mathbf{V}_g - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}$ ，

亦即 $\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{V}_g = -\frac{1}{f} \mathbf{k} \times \mathbf{F}$ ，所以地转偏差指向摩擦力的右侧，且与其垂直。下图表示了 $\mathbf{V}'$ 与 $\mathbf{F}$ 的关系。正是因为有地转偏差的存在，实际风打破了与等压线的平行，使得空气在水平面内有辐合和辐散现象，并由此产生大气垂直方向的运动。



▲ 边界层中力的平衡 (图中字符说明: $\mathbf{V}_b$ 表示边界层的实际风速; $\mathbf{F}$ 表示摩擦力; $\mathbf{A}$ 表示科氏力; $\mathbf{G}$ 为气压梯度力)

(3) 自由大气中的地转偏差 (没有摩擦力)

在自由大气中，当地转偏向力和水平气压梯度力不平衡时就会产生加速度，

根据水平运动方程，有：
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(v - v_g) \\ \frac{dv}{dt} = -f(u - u_g) \end{cases}$$
，矢量形式为 $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = f(\mathbf{V} - \mathbf{V}_g) \times \mathbf{k}$ ，由

此可以解得地转偏差 $\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{V}_g = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ ，也就是说，地转偏差与加速度方向

垂直，且指向加速度方向的左侧。对 $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ 展开 (在自然坐标系下)，有：

$$\mathbf{V}' = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} + \omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \right) = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3$$

下面将对 $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ 分别做一个简单的讨论。

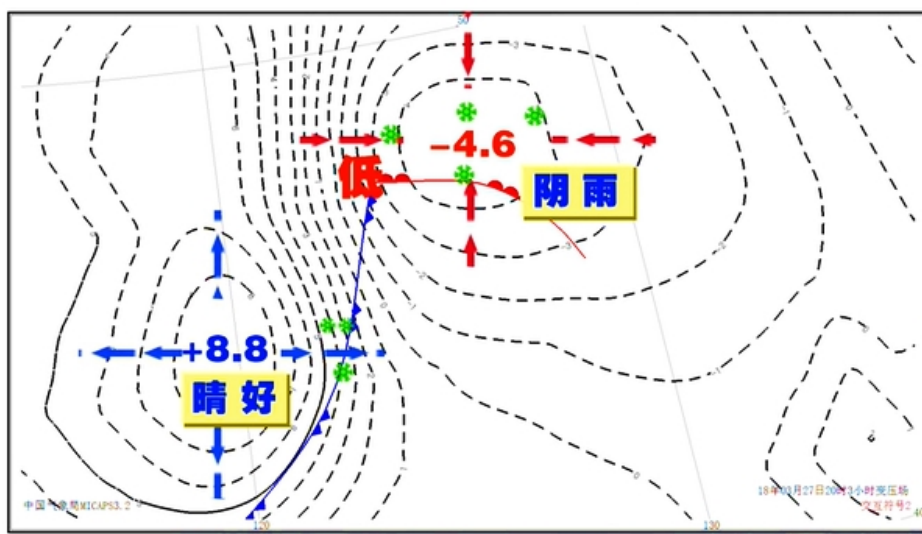
① $\mathbf{D}_1 = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$

这一项表示局地加速度，它是由气压梯度力的局地变化造成气压梯度力和地转偏向力的不平衡。

地转风近似代替实际风

$$\left. \begin{aligned} V_g &= -\frac{1}{f\rho} \nabla_h p \times \mathbf{k} \\ V_g &= -\frac{1}{f} \nabla_p \phi \times \mathbf{k} \\ D_1 &= \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \right\} \longrightarrow D_1 = \begin{cases} -\frac{1}{f^2 \rho} \nabla_h \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \\ -\frac{g_0}{f^2} \nabla_p \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right) \end{cases}$$

由上可知， **D_1 与变压梯度或者变高梯度的大小成正比，且与变压梯度或者变高梯度的方向一致（即由大值指向小值）**。这种由变压梯度或者变高梯度表示的地转偏差，称为**变压风**。在地面天气图上可以通过 3h 变压线来定性变压风的强弱和方向。。一般来说，负变压中心位于暖锋的前方，对应变压风的辐合，正变压中心位于冷锋的后方，对应变压风的辐散。



▲ 正变压中心辐散，负变压中心辐合

$\nabla V = \nabla(V_g + V') = \nabla V'$ ，实际风的散度取决于地转偏差的散度。

$$② \quad D_2 = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times V \frac{\partial V}{\partial s}$$

在自然坐标系中，以 τ_0, n_0 分别表示流线切向和法向方向的单位向量， $\mathbf{k}$ 为垂

直方向的单位向量，则实际风 V 可以写成 $V\tau_0$ ，于是 D_2 可以进一步展开为：

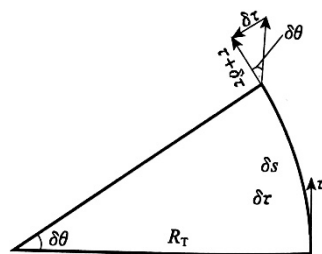
$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{f} \mathbf{k} \times V \frac{\partial V \tau_0}{\partial s} \\ &= \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \left(V \frac{\partial V}{\partial s} \tau_0 + V^2 \frac{\partial \tau_0}{\partial s} \right) \\ &= \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \left(V \frac{\partial V}{\partial s} \tau_0 + \frac{V^2}{R_s} \mathbf{n}_0 \right) \\ &= \frac{1}{f} V \frac{\partial V}{\partial s} \mathbf{n}_0 - \frac{1}{f} \frac{V^2}{R_s} \tau_0 \end{aligned}$$

其中，称 $D_{2n} = \frac{1}{f} V \frac{\partial V}{\partial s} \mathbf{n}_0$ 为法向偏差，称 $D_{2\tau} = -\frac{1}{f} \frac{V^2}{R_s} \tau_0$ 为切向偏差，下面进一步

分别讨论这二者的影响。

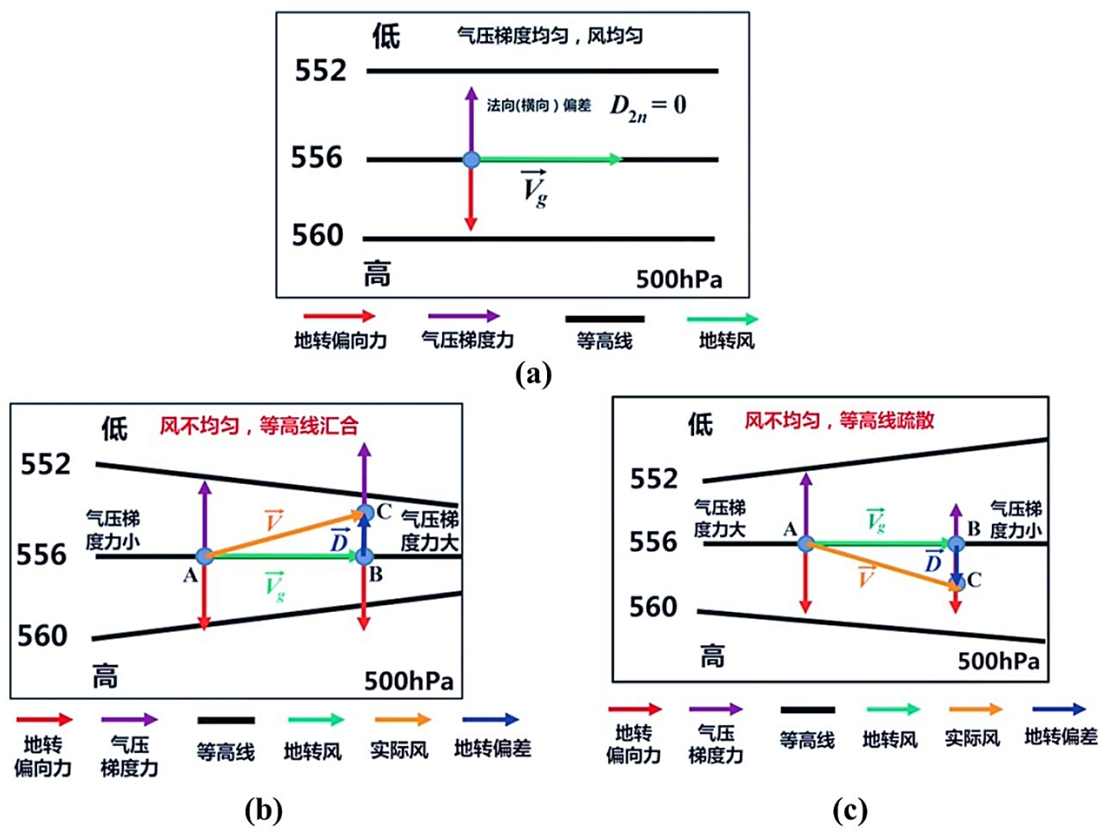
▲ 请读者自行推导 $\frac{\partial \tau_0}{\partial s} = \frac{1}{R_r} \mathbf{n}_0$ （提示： $\frac{\partial s_0}{\partial s}$ 表示方向

的改变量，可反映轨迹的弯曲程度）

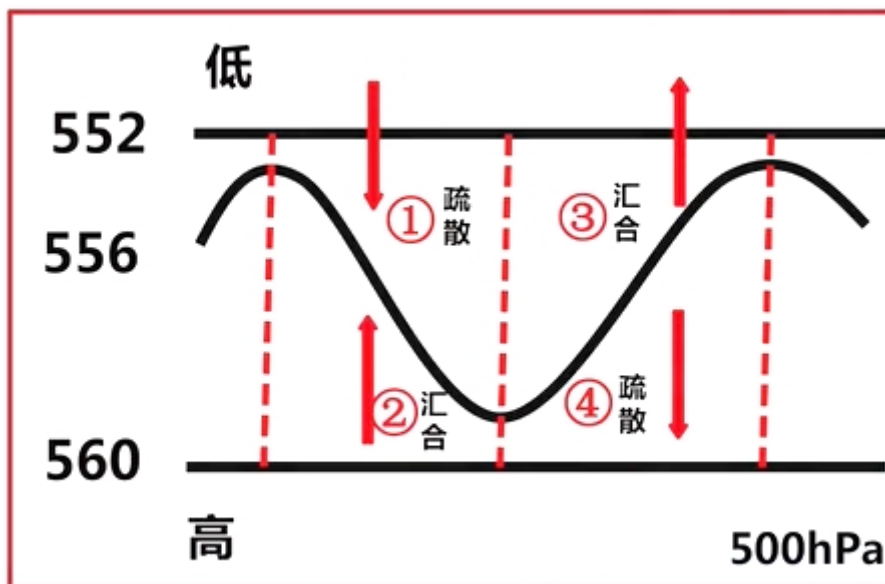


➤ 法向地转偏差的分析

如下图所示，在地转平衡下，风沿着等高线吹，那么此时 $D_{2n}=0$ （图(a)）；当等高线出现辐合、辐散的时候（也就是等压线不平行，有交汇或者发散，图(b)、(c)），等高线密集的地方气压梯度力大，稀疏的地方气压梯度力小，于是引起了实际风与等高线的交汇。从下图可以知道，等高线汇合，法向地转偏差指向低压；等高线疏散，法向地转偏差指向高压。



▲ 讨论法向偏差的影响



▲ 利用等高线的辐合辐散，可以判断法向地转偏差

(图中左区域有偏差风辐合，右侧有偏差风辐散)

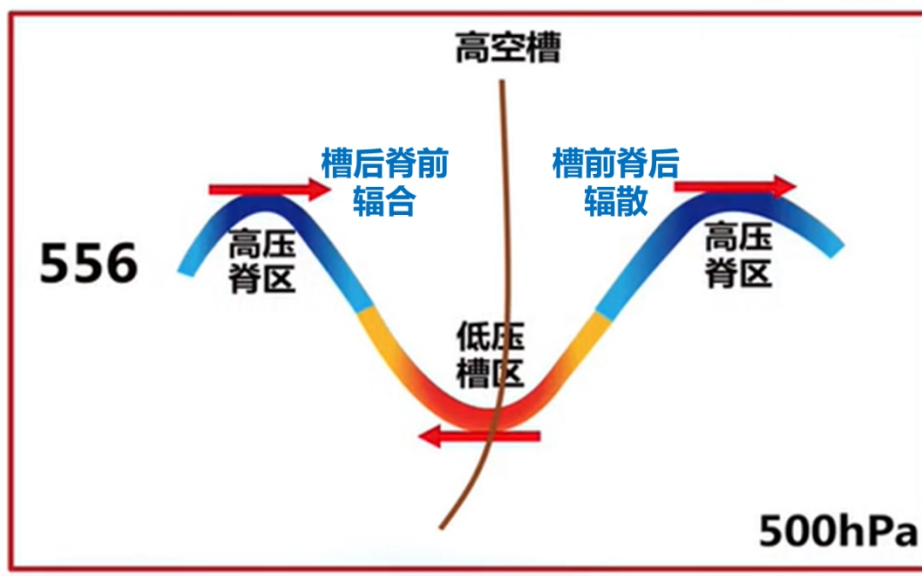
➤ 切向地转偏差的分析

它表示流线曲率不等于零的情况下，由于气压梯度力和地转偏向力不平衡时所产生的法向（向心）加速度所对应的切向地转偏差。结合切向偏差的公式

$D_{2\tau} = -\frac{1}{f} \frac{V^2}{R_T} \tau_0$ ，当等高（压）线呈反气旋式弯曲时（ $R_T < 0, D_{2\tau} > 0$ ），就有指向

流线方向的地转偏差；当等高（压）线呈气旋式弯曲时（ $R_T > 0, D_{2\tau} < 0$ ），就有

指向流线相反方向的地转偏差。由此可以判断辐合辐散情况（如下图）。



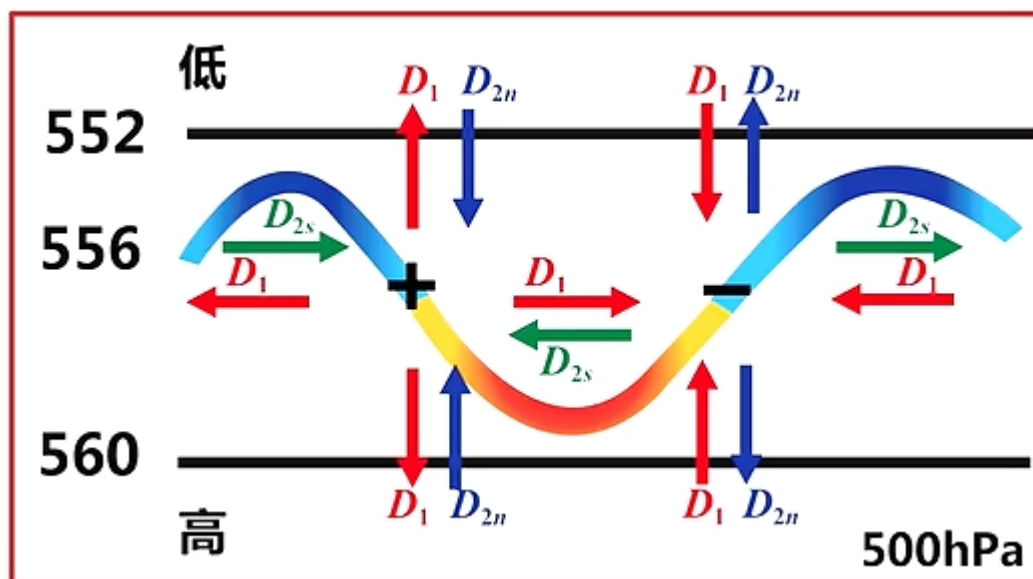
▲ 利用曲率来判断切向偏差

③ $D_3 = \frac{w}{f} k \times \frac{\partial V}{\partial p}$ —— 对流加速度引起的地转偏差

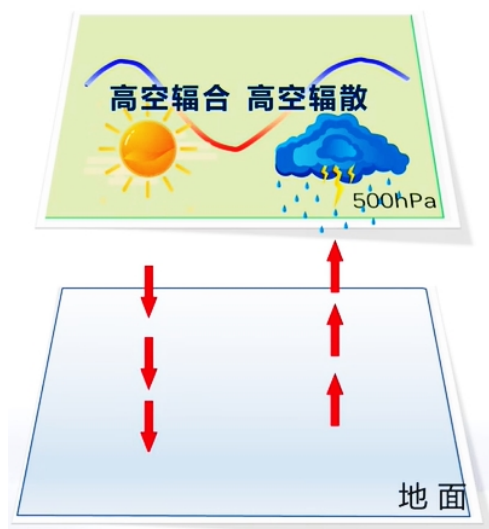
▲ 下面针对水平地转偏差做一个小结

在水平运动中，地转偏差可以分为三项来进行表示：

- (1) 变压风（ D_1 ）——利用三小时变压来判断；
- (2) 法向地转偏差（ D_{2n} ）——利用等高（压）线辐合辐散判断；
- (3) 切向地转偏差（ D_{2s} ）——利用等高（压）线的曲率判断。



那么，如果把上述三项综合判断，那么效果如何呢？结论是：高层以纵向、横向辐散辐合（ D_{2n} , D_{2r} ）为主；低层以变压风 D_1 辐散辐合为主，同时近地层考虑摩擦。因此，在高空的槽前，偏差风辐散；在高空槽后，偏差风辐合。于是，在高空槽前必然有大气的上升运动，经常出现降水等天气；而在高空槽后，相应的有大气的下沉运动，对应的天气通常晴好，并且由于静稳，冬天常常出现雾霾天气。



▲ 由高空辐合辐散引起的对流

6. 铅直速度的估算

上升运动是形成云雨天气的基本条件，而铅直运动对天气系统的发生发展

具有指示意义。大尺度运动中铅直速度量级仅为: 10^{-2}m/s , 而水平速度的量级为 10^0m/s , 目前还不能精确的测量铅直速度, 因此需要通过理论关系中换算出来。

(1) 利用连续方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

对连续方程在 p_0 到 p 积分可以得到 $\omega(p) = \omega(p_0) - \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p dp$

利用边界条件 $p = p_0, \omega = 0$, 且水平散度的积分可以用平均值代替, 于是

$$\omega(p) = (p_0 - p) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p}$$

▲ 积分连续方程计算铅直速度虽然简单, 但不易精确计算, 由于风的观测精度

有限, 而且水平速度散度 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p$ 的量级要小 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p$ 一个量级。

$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p$ 是“两项大值的微差”, 这会严重影响计算的精度。

(2) 利用热力学方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p - S_p \omega = \frac{\dot{Q}}{c_p}$$

在绝热状态下, $\omega = \frac{1}{S_p} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}_h \cdot \nabla_p T\right) \approx \frac{1}{S_p} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}_s \cdot \nabla_p T\right)$

▲ 绝热法的缺点是要计算温度局地变化率, 除非两次观测时间间隔很小, 否则不能精确确定, 此外静力稳定参数 S_p 数值很小, 它们的计算精度对整个计算结果也会有很大的影响。

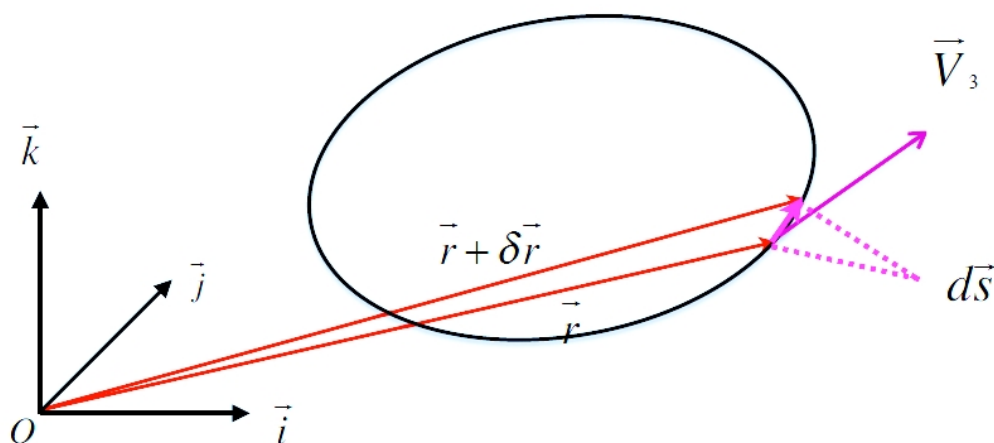
第五章 环流定理与涡度方程

1. 速度环流

流场中某一闭合物质曲线上的速度切向分量沿该闭合物质曲线的线积分, 定义为速度环流。以 C 表示环流, 则 $C = \oint_L \vec{V} \cdot d\vec{r}$ 。

[几点说明]

- (1) 环线方向有正负之分, 沿环线走, 积分区域在左侧, 则为正方向。
- (2) 对于单联通区域, 以逆时针方向为正环流大于 0, 称为 **气旋式环流**; 环流小于 0, 称为 **反气旋式环流**。



2. 绝对环流定理

绝对速度的环流称为绝对环流, 以 C_a 表示: $C_a = \oint_L \vec{V}_a \cdot d\vec{r}$ 。绝对环流随时间的变化率称为绝对环流加速度, 容易证明: 绝对环流加速等于绝对加速度环流。

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_a}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_L \vec{V}_a \cdot d\vec{r} = \oint_L \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_L \vec{V}_a \cdot \frac{d_a (d\vec{r})}{dt} \\
 &= \oint_L \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_L \vec{V}_a \cdot d\left(\frac{d_a \vec{r}}{dt}\right) \\
 &= \oint_L \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_L \vec{V}_a \cdot d\vec{V}_a \\
 &= \oint_L \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{r} + \frac{1}{2} \oint_L dV_a^2 \\
 &= \oint_L \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{r}
 \end{aligned}$$

不计摩擦的绝对动量方程为

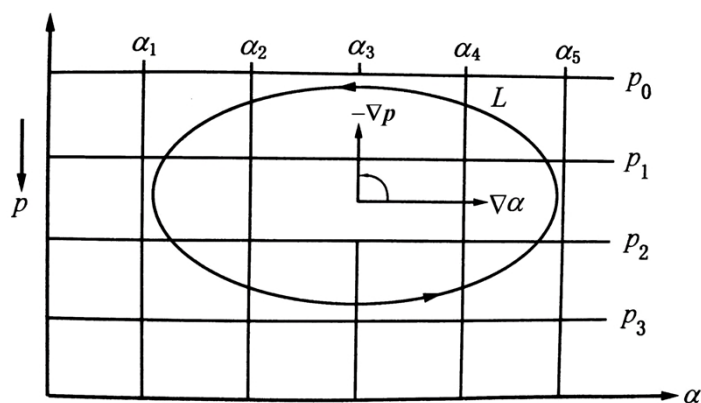
$$\frac{d_a V_a}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_a$$

上式中 $-\nabla \Phi_a = \mathbf{g}^*$ 表示万有引力产生的力场。于是

$$\begin{aligned} \frac{dC_a}{dt} &= \oint_L \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_a \right) \cdot d\mathbf{r} = -\oint_L \alpha dp \quad (d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}) \\ \frac{dC_a}{dt} &= -\oint_L \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot d\mathbf{r} \xrightarrow{\text{Stokes定理}} \\ &= -\int_S \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) d\mathbf{S} = \int_S \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} d\mathbf{S} = \int_S \nabla \alpha \times (-\nabla p) d\mathbf{S} \end{aligned}$$

上式右端称为**力管项**。对于正压大气，密度(ρ)、比容(α)仅是压强的函数，等密度面与等压面平行($\nabla \rho \times \nabla p = 0$)，从而力管项为 0，得到 $\frac{dC_a}{dt} = 0$ ，因此，**正压大气中绝对环流守恒**，此即 **Kelvin 环流定理**(一般表述为：在无粘性、正压流体中，若外力有势，则沿由相同流体质点组成的封闭曲线的速度环量在随体运动过程中恒不变)。

当 $\nabla \alpha$ 方向转向 $-\nabla p$ 方向是逆(顺)时针时，按右手螺旋规则规定力管项为正(负)值，这种结构使气旋(反气旋)性环流加强，如下图所示(下标越大表示数值也越大)。也可以根据 $\nabla \alpha \times (-\nabla p)$ 判断 $-\oint_L \alpha dp$ 的正负。

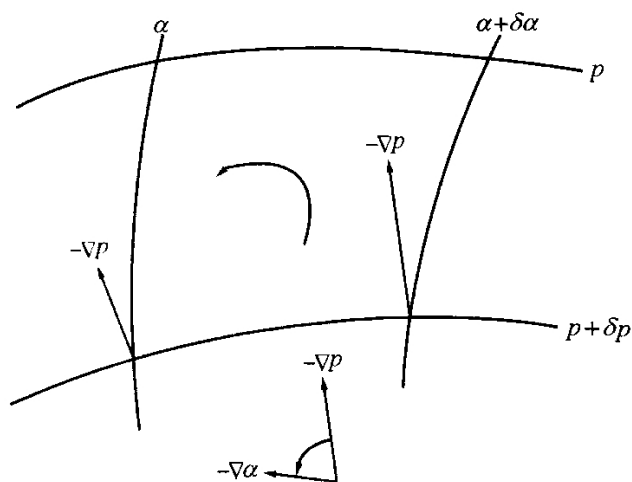


▲ 压容力管的计算

在斜压大气中等压面和等比容面是相交的，间隔一个单位的等压面和等比容

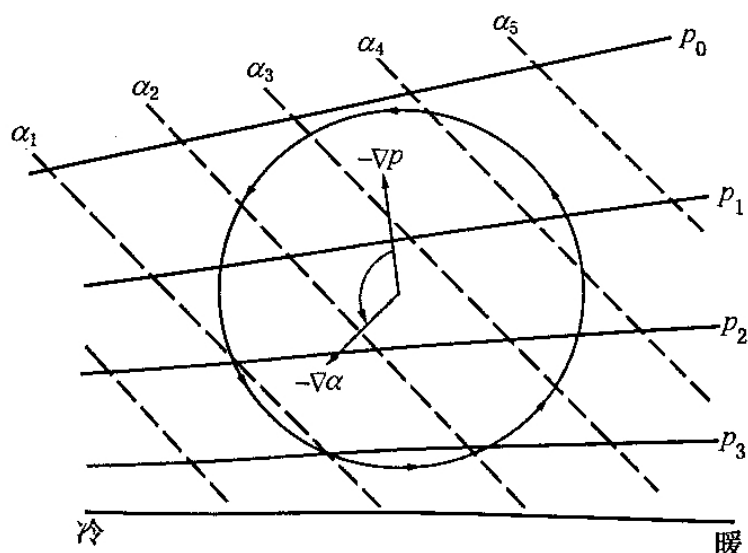
面相交割成的管子，称作单位压容力管，简称力管。在 $(\alpha, -p)$ 坐标系中，若间隔一个单位画出一系列的等压线和等比容线，则图中每一方格代表一个单位面积，它代表一个单位力管。可见，积分 $-\oint_L \alpha dp$ 就等于环线所包围的单位力管数。一般情形下环线包围的力管有正有负，所以 $-\oint_L \alpha dp$ 应理解为环线所包围的正负力管的代数和，令 $-\oint_L \alpha dp = N$ ，则 $\frac{dC_a}{dt} = N$ 。

3. 力管动力作用的理解



▲ 力管动力作用示意图

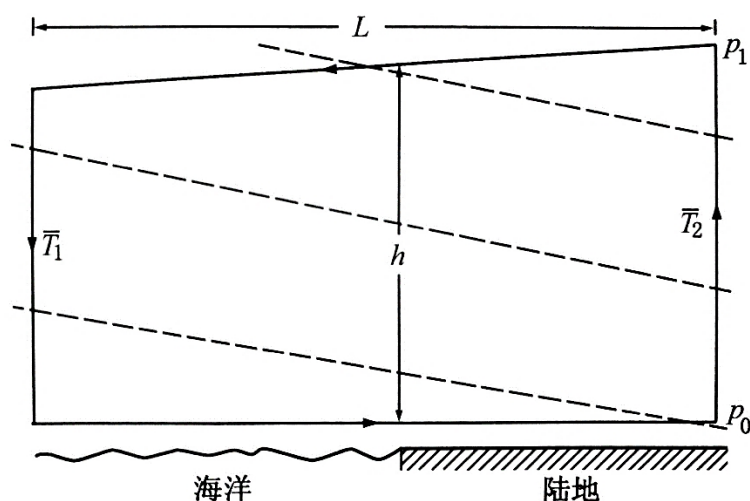
假设有一单位力管，并设力管所包围面积中的空气初始时是静止的，如上图所示。从该图中可看出，环线上气压梯度力分布不均匀(等压面之间距离越近表示气压梯度力越大)，这种不均匀性就相当于有一力矩作用于空气团。于是，空气团就有了逆时针转动的趋势，产生了逆时针方向上的环流，此时根据右手螺旋规则， $\nabla \alpha \times (-\nabla p)$ 的方向也为逆时针，从而逆时针方向上环流增强，使得促使密度较小的空气微团由高压流向低压，而密度较大的空气微团趋于由低压流向高压。



▲ 非均匀加热产生的力管和环流

力管存在的充分与必要条件是大气斜压性，而大气的斜压性最终可归结为非均匀加热的结果。假设起始时大气是正压的，各等压面等比容面彼此和地面平行。此后由于下垫面有非均匀加热。根据静力平衡方程，等压面要向冷区倾斜；因为同一等压面上高温处比容大($p\alpha = RT$)，低温处比容小，所以等比容面向暖区倾斜。于是大气由正压状态转变为斜压状态，出现了力管，进而出现了环流(如上图)。直接热力环流常可以用来解释海陆风和山谷风的形成。

【举例】利用环流定理求解海陆风大小。



设陆上平均气温为 $\bar{T}_2$ ，海上平均气温为 $\bar{T}_1$ 。在上层，等压面坡度远小于等比容面坡度，近似认为它是水平的，故水平环线上积分为零，于是

$$\frac{d_a C_a}{dt} = \left(- \int_{p_0}^{p_1} R T d \ln p \right)_{land} + \left(- \int_{p_1}^{p_0} R T d \ln p \right)_{sea} = R \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) (\bar{T}_2 - \bar{T}_1)$$

令 $\bar{v}$ 为沿环线的平均切向速度，便可求出

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = R \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \frac{(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)}{2(h+L)}$$

4. 相对环流定理

由于地球的旋转，有关系 $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ ，于是绝对速度环流可以表示为

$$\oint_L \mathbf{V}_a \cdot d\mathbf{r} = \oint_L \mathbf{V}_r \cdot d\mathbf{r} + \oint_L (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow C_a = C + C_e$$

C, C_e 分别表示相对环流与牵连环流。已知运算法则

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

结合 stokes 公式，有 $C_e = \oint_L (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}$ ，注意到

$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \cos \varphi \mathbf{j} + \Omega \sin \varphi \mathbf{k}$ ， $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，所以

$$\begin{aligned} \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) &= (\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - \cancel{\mathbf{r} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega})} + \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} \\ &= 2\boldsymbol{\Omega} \end{aligned}$$

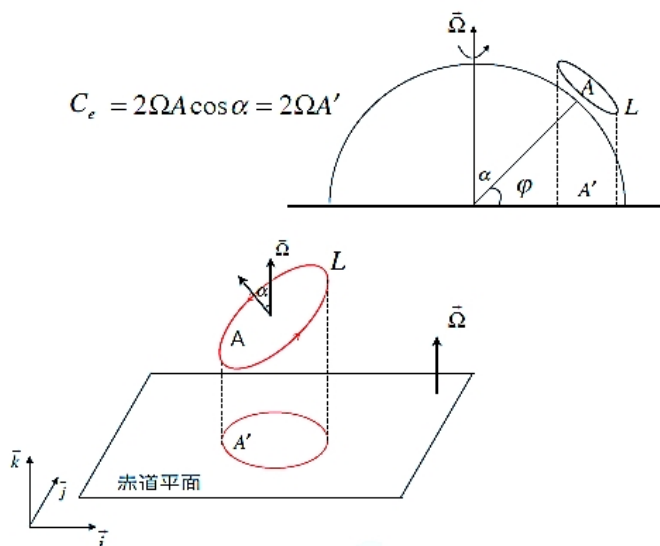
[注] $\boldsymbol{\Omega}$ 是一个有旋的矢量场 (有旋向量场的散度为 0)，所以 $\mathbf{r} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 0$ ；而 $\boldsymbol{\Omega}$

为常矢量与空间、时间均无关，所以 $(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = 0$ (或者从另一个角度来理解: $\boldsymbol{\Omega}$

的全导数为 $\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega}$ ，而 $\boldsymbol{\Omega}$ 是不随时间变化的，所以 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = 0$ ，又

$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ，从而推出 $(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = 0$)

$$C_a = C + 2\Omega A'$$



▲ 面积 A 的投影情况

于是相对环流定理可以表示为

$$\frac{d_a C_a}{dt} = \frac{dC}{dt} + 2\Omega \frac{dA'}{dt} \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} = -\oint_L \alpha dp - 2\Omega \frac{dA'}{dt}$$

即相对环流变化由力管项和惯性项共同作用。对于正压大气，相对环流变化完全由惯性项决定。我们以正压大气来看看惯性项如何起作用。

$$\frac{dC}{dt} = -2\Omega \frac{d}{dt}(A \sin \varphi) = -f \frac{dA}{dt} - \tilde{f} A \frac{d\varphi}{dt}$$

上式表明，环线所包围的面积改变和平均纬度改变都可引起相对环流发生变化。

环线所包围的面积的改变与水平辐合辐散有关；纬度的改变与流体的南北向运动有关。力管项和惯性项只决定于气压、密度和速度的瞬时分布，这意味着由大气的瞬时热力状态和运动状态即可确定物质环线上环流随时间的变化率，因此相对环流定理具有预报意义。

5. 涡度

(1) 定义：速度的旋度称为涡度， $\omega = \nabla \times V$

$$\omega = \nabla \times V = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

根据 Stokes 定理， $\oint_L V \cdot d\mathbf{r} = \int_A \nabla \times V \cdot d\mathbf{A} = \int_A \omega \cdot d\mathbf{A}$ ，即沿闭合环线上的环流等于

环线所包围面积上的涡通量(涡管强度)(或者说沿任意闭合环线上的环流等于环线所包围面积上涡度法向分量的积分)。

[涡度与环流的比较]

- **涡度**代表速度场的**微分**性质，是流体旋转特征的**微观**量度
- **环流**代表速度场的**积分**性质，是流体旋转特征的**宏观**量度

(2) 绝对涡度与牵连涡度

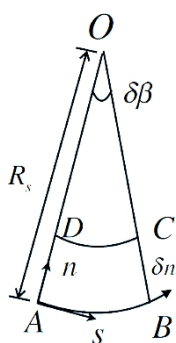
$$\text{由速度关系 } V_a = V + \Omega \times r \rightarrow \nabla \times V_a = \nabla \times V + \nabla \times (\Omega \times r) \Leftrightarrow \omega_a = \omega + 2\Omega$$

上式中 ω_a 称为绝对涡度， ω 称为相对涡度，考虑到大气具有准水平运动的性质，我们不把 2Ω 称为牵连涡度，一般我们更多的考虑涡度铅直分量，并将他们简称为涡度(注意不要引起误解)。方程两边同时点乘 $\mathbf{k}$ ，此时在局地直角坐标系下 $\Omega = \Omega \cos \varphi \mathbf{j} + \Omega \sin \varphi \mathbf{k}$ ，于是可以得到

$$\zeta_a = \zeta + f$$

其中 ζ_a 称为绝对涡度， $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 称为相对涡度， $f = 2\Omega \sin \varphi$ 称为牵连涡度。

(3) 自然坐标系下的涡度表示



➤ 推导方法一

如左图所示， $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{CD}$ 可分别看成是以 O 为圆心，以 R_s 和 $R_s - \delta n$ 为半径的圆弧，而 O 点是流线的曲率中， R_s 是曲率半径，根据环流的定义，沿 ABCDA 的相对环流为

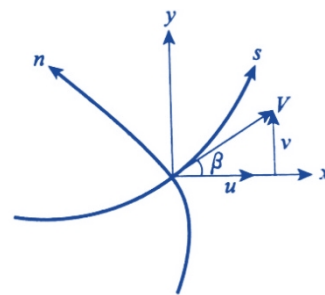
$$\delta C = V R_s \delta \beta - \left(V + \frac{\partial V}{\partial n} \delta n \right) (R_s - \delta n) \delta \beta$$

环流包围的面积为 $\delta A = R_s \delta n \delta \beta$ ，由 Stokes 环流定理，有

$$\zeta = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta C}{\delta A} = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

➤ 推导方法二

如右图，有 $u = V \cos \beta, v = V \sin \beta$ ，代入涡度表达式后，得到：



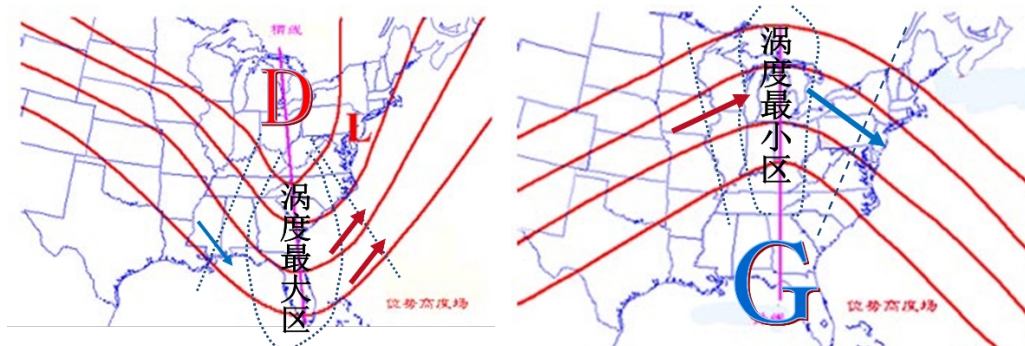
$$\zeta = \frac{\partial}{\partial x}(V \sin \beta) - \frac{\partial}{\partial y}(V \cos \beta) = \sin \beta \frac{\partial V}{\partial x} + V \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} - \cos \beta \frac{\partial V}{\partial y} - V \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

上式令 $\beta \rightarrow 0$ （也就是令 x 轴与 s 轴相切），代入上式，得到自然坐标系下的涡度方程表达式：

$$\zeta = V \frac{\partial \beta}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

① 曲率涡度 $\frac{V}{R_s}$

槽线、脊线、气旋、反气旋中心等区域或其附近地区，曲率涡度较大

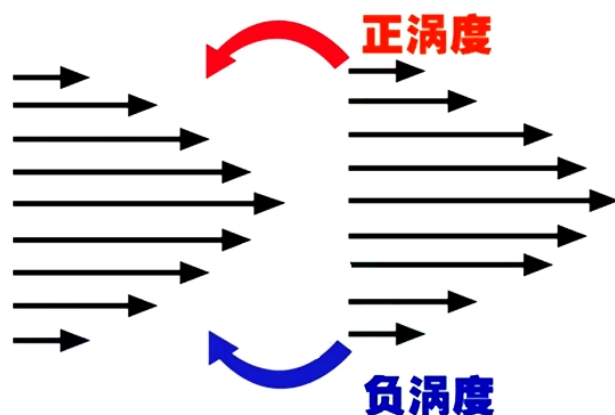


▲ 槽脊附近涡度平流示意图

如上图所示，槽线（左图）为气旋式弯曲，所以具有正涡度，在弯曲最大处曲率半径小，从而曲率涡度有最大值，并向两边递减至 0（图中两侧的虚线即为零涡度平流线）。于是，在槽后具有负涡度平流，在槽前有正涡度平流。用同样的方法分析，可以得到在脊后具有正涡度平流，在脊前具有负涡度平流。

② 切变涡度 $-\frac{\partial V}{\partial n}$

在锋区、急流区，切变涡度较大。气旋式切变涡度为正，反气旋式切变涡度为负。



▲ 切变涡度示意图

6. 流函数和势函数

(1) 流函数的引入

在数学上，满足 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ 是 $-vdx + udy$ 成为某函数 $\psi(x, y)$ 全微分的充要条

件，即有 $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -vdx + udy$ ，此时 $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ，称 $\psi(x, y)$ 即流函数。

无辐散运动，即纯粹的涡旋运动，是大气运动的最基本的运动形式之一，其运动条件为 $\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ，可见在大气的运动中速度可以用流函数表示。对于二维流动，流线方程为 $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ ，化简得到 $-vdx + udy = d\psi = 0$ ， $\psi = \text{const}$ 称为

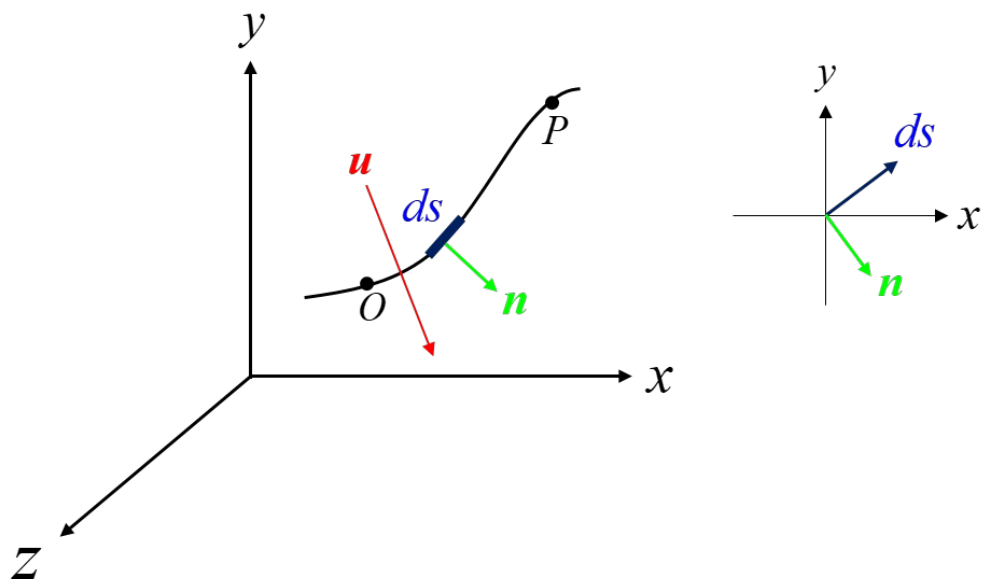
流线。引入流函数后，相对涡度可以表示为 $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla^2 \psi$

[流函数的物理意义]

单位时间内流过连接空间两点的某一曲线流体的体积。如下图所示，单位时间内自左向右流过曲线 OP 的单位厚度的 (z 方向) 流体体积为：

$$V = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_O^P (u n_x + v n_y) ds$$

由图可知， $n_x ds = dx, n_y ds = -dy$ ，代入上式有 $V = \int_O^P u dy - v dx = \psi_P - \psi_O$



(2) 速度势的引入

无旋运动是大气运动的另一基本运动形式。根据数学中的结论有“无旋必有势”，因此，大气的速度可以用一个势函数 φ 表示，满足

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \Rightarrow u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

速度与等势线垂直；流动(或说速度)是从低位势指向高位势；等位势线密集的地方，速度值大；等位势线稀疏的地方，速度值小。

一般情形下水平速度场是很复杂的，但总可以视为上述两种基本运动形式叠加的结果。可以证明，一般情形下水平速度可分为无辐散和无旋两部分运动的速度之和，即 $V = V_\psi + V_\varphi$ ，其中 V_ψ 是无辐散的，称为旋转风； V_φ 是无旋的，称为辐散风。无辐散风沿等流函数线吹，背风而立，高值在右；辐散风沿速度势梯度方向吹，与等势线垂直。

(3) 流函数与势函数之间的关系

① 势函数与流函数均满足 Laplace 方程，因此都是调和函数。它们之间的关系

$$\text{满足} \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}, \text{即 } \varphi \text{ 和 } \psi \text{ 满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann, C-R)条件, 因此}$$

φ 和 ψ 可以组成一个解析函数。

② 流函数的等值面和势函数的等值面正交

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

7. 泰勒-普劳德曼(Taylor-Proudman)定理

不计外力的矢量形式的动量方程为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi$$

根据矢量运算法则 $\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \frac{V^2}{2} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ ，代入上式可以化简为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\Phi + \frac{V^2}{2} \right)$$

其中 $-\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega}) = -\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}_a$ ， $\boldsymbol{\omega}_a$ 即为绝对涡度，对上
面的方程两边取旋度有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}_a) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}$$

其中 $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega})}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t}$ ，根据矢量运算法则，有

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}_a) = (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}_a (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a) - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_a$$

并注意到 $\mathbf{V} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a) = 0$ (旋度的散度为0)，所以可以得到绝对涡度方程如下：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega}_a (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_a = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}$$

从左到右，各项分别称为局地变化项、扭曲项(速度分布不均匀使得涡线的形状发生了变化——即涡度的重新分布)、散度项、平流项和力管项(斜压项)。

对于均质不可压的正压定常流动，涡度方程有如下简化

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \nabla \rho \times \nabla p = 0, \frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt} = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0$$

而 $|\boldsymbol{\omega}| \ll |\boldsymbol{\Omega}|$, 所以 $\boldsymbol{\omega}_a \approx 2\boldsymbol{\Omega}$, 于是有 $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0$, 这是一个类似于平流输送项的表达, 也就是说 $\mathbf{V}$ 沿 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向的导数为 0, 或者说 $\mathbf{V}$ 沿 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向不变, 在 [Primitive Equation](#) 近似下, 有 $2\boldsymbol{\Omega} = f\mathbf{k}$, 可以得到 $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 即我们所说的 Taylor 柱。

8. 涡度方程的导出

(1) 方程推导: 不计摩擦的水平动量方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \quad (①) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \quad (②) \end{cases}$$

下面计算 $\frac{\partial}{\partial x}(②) - \frac{\partial}{\partial y}(①)$, 其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(①) &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} v + f \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x}(②) &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} u - f \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \\ &\quad \downarrow \\ &\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y} v - f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

因为铅直涡度的定义为 $\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, 所以上述式子最终化简为:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\
& = -\frac{\partial f}{\partial y} v - f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial y} v - (f + \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

因为 f 仅是 y 的函数, 所以对上述公式进一步变形可以得到

$$\frac{d(f + \zeta)}{dt} = -(f + \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

其中 $\zeta_a = \zeta + f$, ζ_a 称为绝对涡度, ζ 称为相对涡度(牵连涡度), f 称为地转涡度。上述方程得到即为涡度方程。

$$(2) \text{ 散度项 } -(f + \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

中高纬天气尺度运动中 $\zeta \sim 10^{-5} s^{-1}$ 而 $f \sim 10^{-4} s^{-1}$, 故一般情形下 $f + \zeta$ 为正值。

因此当有水平辐散 ($\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} > 0$) 时, 绝对涡度要减小; 有水平辐合时

($\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} < 0$), 绝对涡度要增加。在正压条件下, 假设运动是水平的, 在水平面

上取一物质面积元 δA , 此种情形下绝对涡管强度守恒:

$$\frac{d[(\zeta + f)\delta A]}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d(\zeta + f)}{dt} = -(\zeta + f) \frac{1}{\delta A} \frac{d\delta A}{dt}$$

根据速度散度的物理意义: $\frac{1}{\delta A} \frac{d\delta A}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, 也就是说水平辐合辐散引起的绝对

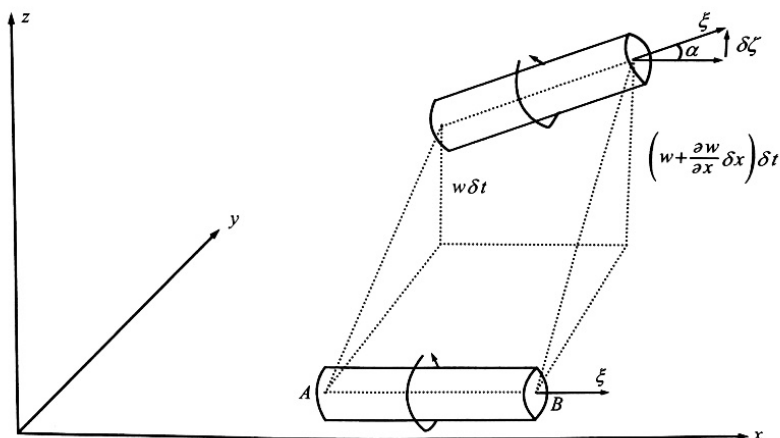
对涡度变化, 是由于涡管强度守恒所要求的。

$$(3) \text{ 涡管扭曲(倾侧)项 } -\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

令水平涡度 $\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, $\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$, 将上式进行改写

$$-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} = \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y}$$

也就是说, 当水平涡度存在时, 垂直速度的分布不均会引起垂直方向涡度大小的改变, 我们来简单的认识一下它的影响机制。



▲ 涡管的倾斜

如上图所示, 设 t_0 时沿 x 轴有一水平涡管 AB , 并假设只有 $\xi > 0, w > 0, \frac{\partial w}{\partial x} > 0$

由于垂直速度分布不均匀, 经过 δt 时间后 B 点将会发生位移 $\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x\right) \delta t$, 因此使得整个涡管发生了倾斜, 涡度在铅直方向上产生了分量, 从而影响到了铅直方向的涡度变化。

(4) 力管项 $\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$

因为

$$\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \mathbf{k} \right]$$

所以的这一项可以改写为 $\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p \right)$, 显然这是一项与力管有关的项, 与大气的斜压性有关。

9. 涡度方程的尺度分析——天气尺度

天气尺度下各特征尺度为

水平尺度	$L \sim 10^6 m$
铅直尺度	$D \sim H \sim 10^4 m$
水平速度尺度	$U \sim 10^1 m/s$
铅直速度尺度	$W \sim 10^{-2} m/s$
时间尺度	$\tau \sim \frac{L}{U} \sim 10^5 s$
地转参数	$f_0 \sim 10^{-4} / s$
β	$\frac{df}{dy} = \frac{2\Omega \cos \varphi}{a} \sim 10^{-11} / ms$
重力加速度	$g \sim 10^1 / s^2$
$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{W}{H} \sim 10^{-6} / s$
$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$f_0 U \sim 10^{-3} m/s^2 \quad f_0 \sim 10^{-4} / s$
$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \sim \frac{\partial \ln \rho}{\partial y}$	$\frac{\Delta_h \pi}{\pi L} \sim 10^{-8} / m$
$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$	$\frac{U}{L} \sim 10^{-5} / s$
$\frac{\zeta}{\delta} \sim \frac{U}{L} \frac{H}{W} \sim 10^1$	$\frac{\zeta}{f} \sim \frac{U}{L f_0} \sim 10^{-1}$

对于天气尺度来说, 相对涡度比水平散度大一个量级, 相对涡度比牵连涡度小一个量级。故散度项中 ζ 可以略去。涡度方程各项的量级为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} - w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \beta v - f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim 10^{-10}, u \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sim v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sim 10^{-10}, w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \sim 10^{-11}, -\beta v \sim 10^{-10}$$

$$f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sim 10^{-10}, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \sim 10^{-11}, \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \sim 10^{-11}$$

因此, 涡度方程最终可以简化为:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \beta v - f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \frac{d_h(\zeta + f)}{dt} = -f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

可见在天气尺度水平运动中, 绝对涡度的变化完全是散度作用的结果。如果认为运动水平无辐散, 则绝对涡度守恒。在简化后的局地涡度表达式中, 称

$$-u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\mathbf{V}_h \cdot \nabla \zeta \text{ 为相对涡度平流项, } -\beta v \text{ 为牵连涡度平流项, 它是由南北}$$

方向的气流输送引起局地涡度的改变。

10. p 坐标系下的涡度方程和散度方程

不计摩擦的水平运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f v (1) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - f u (2) \end{cases}$$

(1) 涡度方程

采用和前面同样的推到方法, 即 $\frac{\partial}{\partial x}(2) - \frac{\partial}{\partial y}(1)$, 可以得到涡度方程表达式如下:

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta_p}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta_p}{\partial y} - \omega \frac{\partial \zeta_p}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial y} v - (f + \zeta_p) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right)$$

假设运动水平无辐散, 通过尺度分析同样可以得到 $\frac{d}{dt}(\zeta_p + f) = 0$ 。相对于直角坐标系而言, 在 p 坐标系下少了力管项, 但这并不是表明大气的斜压性就不影响涡度变化了。实际上, 大气的斜压性间接地体现在了散度项中。设大气运动是绝热的, 则空气微团将沿等熵面(或等位温面)运动, 对于正压大气, 则等压面与等位温面相重合, 因此, 空气微团也是沿等压面运动, 于是 $\omega = 0$, 而由 p 坐标连

续方程可知： $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p = -\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$ ，此时等压面上的水平散度也一定为零，

涡度没有变化。那么反过来讲，对于斜压大气，散度项就可能影响涡度。

(2) 散度方程

求 $\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(2)$ ，得局地散度表达式如下：

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -u \frac{\partial \delta}{\partial x} - v \frac{\partial \delta}{\partial y} - \omega \frac{\partial \delta}{\partial p} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi + f \zeta_p - u \frac{\partial f}{\partial y}$$

或写为

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = (\mathbf{V}_h \cdot \nabla) \delta - \omega \frac{\partial \delta}{\partial p} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \nabla_p \omega \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial p} - \nabla_p^2 \Phi + f \zeta_p - (\mathbf{k} \times \mathbf{V}_h) \cdot \nabla_p f$$

- $(\mathbf{V}_h \cdot \nabla) \delta$ ：散度平流项；
- $-\omega \frac{\partial \delta}{\partial p}$ ：散度的铅直输送；
- $-\nabla_p \omega \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial p}$ ：水平风速的铅直切变效应，当有风的铅直切变、等压面上铅直速度分布的不均匀将引起散度的变化。
- $-\nabla_p^2 \Phi$ ：等压面的坡度改变项。
- $f \zeta_p, -(\mathbf{k} \times \mathbf{V}_h) \cdot \nabla_p f$ ：均表示与旋转效应有关。

原始的散度方程固然复杂，我们下面对大尺度方程通过尺度分析进行简化。

	$L(m)$	$D(m)$	$U(m/s)$	$W(m/s)$	$\tau(s)$	$\Delta_z P(Pa)$
大尺度	$\geq 10^6$	10^4	10	10^{-2}	10^5	10^5

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta}{\partial t} \sim \frac{\delta}{\tau} \sim 10^{-11}, \omega \frac{\partial \delta}{\partial p} \sim \frac{\omega \delta}{\Delta_z p} \sim 10^{-12}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \sim \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \sim \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10} \\ J_p(u, v) \sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10}, \nabla_p \omega \cdot \frac{\partial V_h}{\partial p} \sim \frac{\omega U}{L \Delta_z p} \sim 10^{-11}, \nabla_p^2 \Phi \sim \frac{f_0 U L}{L^2} \sim 10^{-9} \\ f \zeta_p \sim f_0 \frac{U}{L} \sim 10^{-9}, -(\mathbf{k} \times \mathbf{V}_h) \cdot \nabla_p f \sim \beta U \sim 10^{-10}\end{aligned}$$

[注] 对于大尺度运动, 满足地转平衡, 所以根据 $0 = f v - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 得到 Φ 的尺度为

$f_0 U L$; 另外 $\omega = \frac{dp}{dt} \approx -\rho g w \sim 10^{-1} \text{ Pa/s}$; 关于 $\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ 的尺度, 因为对于大尺

度运动有准水平无辐散的特点 ($\nabla_h \cdot \mathbf{V}_h = 0$), 从而不能认为 $\frac{U}{L} = \frac{W}{D}$, 实际上此时

$o\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) < o\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, 所以 δ 的尺度分析应为 $\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{D} \sim 10^{-6}$

对方程进行一级近似有 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\nabla_p^2 \Phi + f \zeta - \beta u$, 这一方程

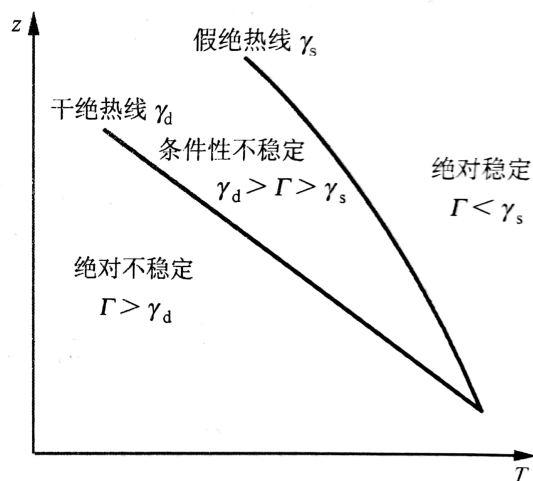
称为**平衡方程**(它是一诊断方程), 它把位势高度场和风场联系在一起。就大尺度运动而言, 风场和位势高度场之间能较好地满足这种平衡关系, 它比地转风关系要来得精确些。

若采用零级近似, 则有 $-\nabla_p^2 \Phi + f \zeta = 0$ 该方程中不出时间局地变化项、散度项和垂直运动项, 但出现涡度项, 说明对于大尺度运动, 不仅是准定常、准水平的, 而且还是准水平无辐散的, 主要以涡旋运动为主。

11. 位势涡度(Petionial Vorticity)守恒导出

(1) 位势温度与大气层结稳定性

位势温度的公式导出参考本资料 Page10, 公式为 $\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$,



利用气层垂直减温率 Γ 落在上图的不同区域便可以判断该气层的静力稳定度。“条件性不稳定”是指大气层结对饱和气块是不稳定的，而对未饱和气块是稳定的。

(2) 位势涡度方程的导出

已知绝对涡度方程为

$$\frac{d\omega_a}{dt} + \omega_a(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\omega_a \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \quad (1)$$

对连续方程变形有

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

将②代入①中，消去散度项，有

$$\frac{d\omega_a}{dt} + \rho \omega_a \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - (\omega_a \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_a}{\rho} \right) - \left(\frac{\omega_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} \quad (3)$$

对于干绝热过程

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\theta = 0 \xrightarrow{\text{对方程求梯度}} \nabla \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\theta \right] = \frac{\partial \nabla \theta}{\partial t} + \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \theta) = 0$$

根据矢量微分法则 $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

$$\nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \theta) = \nabla \theta \times \boldsymbol{\omega} + (\nabla \theta \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\nabla \theta$$

所以 $\frac{d\nabla \theta}{dt} + (\nabla \theta \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla \theta \times \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (4)$ ，将 $\nabla \theta \cdot (3) + (4) \cdot \frac{\omega_a}{\rho}$ 得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho} \right) = \frac{\nabla \theta \cdot (\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^3} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho} \right) = 0$$

上式即为在无摩擦、干绝热过程条件下的空气微团的埃特尔(Ertel)位涡度守恒定律，式中 $\frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho}$ 称为位势涡度。

律，式中 $\frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho}$ 称为位势涡度。

[注] 上述方程推导过程中一些略过的步骤：

① $\nabla \theta \times \omega \cdot \frac{\omega_a}{\rho} = 0$ 。因为 $\omega_a = \omega + 2\Omega$ ，从数学上来讲这三个矢量是共面的，而

$\nabla \theta \times \omega$ 形成的矢量与 ω 垂直，也即与 ω_a 垂直，所以点乘为 0；

② 为什么 $\left(\frac{\omega_a \cdot \nabla}{\rho} \right) V \cdot \nabla \theta = \left(\frac{\nabla \theta \cdot \nabla}{\rho} \right) V \cdot \omega_a$ ？我们可以对 $(A \cdot \nabla) B \cdot C$ 进行展开标量

分析：

$$\begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}$$

显然 A 与 C 交换位置不影响最终的结果。

③ 为什么 $\frac{\nabla \theta \cdot (\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^3} = 0$ ？根据位温的表达式可知 $\theta = \theta(\rho, p)$ ，所以

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \theta}{\partial p} dp$$

前面我们提到过，对于任何一个标量 ϕ (Page31)，有 $d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$ ，所以上式可

以继续化简为 $\nabla \theta = \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \nabla \rho + \frac{\partial \theta}{\partial p} \nabla p$ ，显然可以得到

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} \nabla \rho + \frac{\partial \theta}{\partial p} \nabla p \right) \cdot (\nabla \rho \times \nabla p) = 0$$

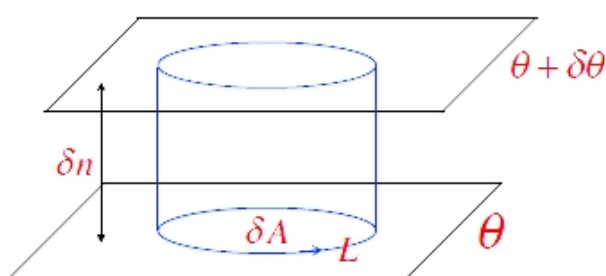
④ 关于 $\nabla(V \cdot \nabla \theta)$ 的运算，老师课件上以及一些资料上为

$\nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \theta) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla \theta + \nabla \mathbf{V} \cdot \nabla \theta$, 此时等式右边为一个张量(矩阵)的形式, 但是这个算法本人尚未没有找到合适的数学解释, 对于 Nabla 算子的运算法则, 笔者尚未进行系统学习, 感兴趣的读者可以对这个问题进行探索。常用几个的 Nabla 算子运算公式:

a) 关于 Nabla 算子的一些矢量公式的推导

b) 玩转矢量分析公式推导

(3) 对位势涡度守恒的物理理解



根据位温的表达式, 可以知道, 在等位温面上, 密度仅为压强的函数, 应用绝对环流定理可知

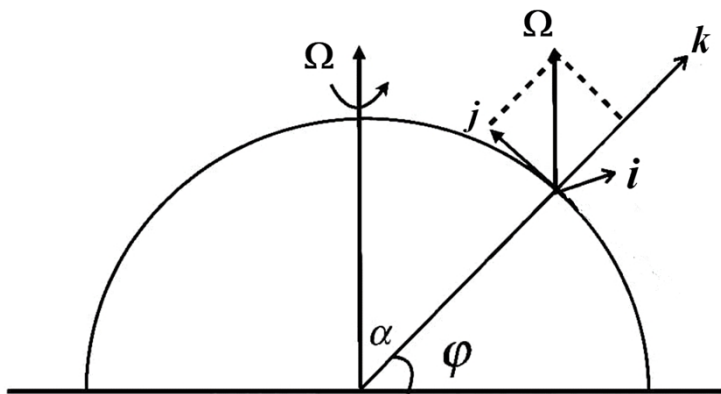
$$\frac{dC_a}{dt} = -\oint_L \alpha dp = 0 \Leftrightarrow C_a = \oint_L \mathbf{V}_a \cdot d\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{n} dS = \text{const} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{n} dS = \text{const}$$

根据质量守恒, 气柱的质量 $m = \rho \delta n \delta S = \text{const}$, 另外对于某一等位温面, 有

$\delta\theta = |\nabla\theta| \delta n = \text{const}$, 综合上述三个条件, 可得

$$\frac{C_a \nabla \theta}{m} = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \mathbf{n} \delta S \cdot |\nabla \theta| \delta n}{\rho \delta n \delta S} = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \theta}{\rho} = \text{const}$$

12. 位涡方程的简化



绝对涡度 ω_a 有三个分量

$$\begin{cases} \xi_a = \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \eta_a = \eta + \tilde{f} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} + 2\Omega \cos \varphi \xrightarrow{\text{大尺度运动}} \xi_a \sim \eta_a \sim 10^{-3} / s, \zeta_a \sim 10^{-4} / s \\ \zeta_a = \zeta + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\Omega \sin \varphi \end{cases}$$

于是 $\frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho} = \frac{\theta}{\rho} \left(\xi_a \frac{\partial \ln \theta}{\partial x} + \eta_a \frac{\partial \ln \theta}{\partial y} + \zeta_a \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \right)$, 而

$$\frac{\partial \ln \theta}{\partial x_i} (x_i = x, y, z) = \frac{1}{\bar{\theta} + \theta'} \frac{\partial (\bar{\theta} + \theta')}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right)$$

根据前面尺度分析(Page28)可知, $\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \sim \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \sim R_1 \frac{f_0 U}{gH}$, 对于大尺度运动, $R_1=1$,

所以 $\frac{\partial \ln \theta}{\partial x} \sim \frac{\partial \ln \theta}{\partial y} \sim \frac{f_0 U}{gH} \sim 10^{-8} / m$, 对于垂向的变化应采用静力稳定度参数

$N^2 = g \frac{\partial \ln \theta}{\partial z}$ 进行估计, $N \sim 10^{-2} / s \Rightarrow \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \sim 10^{-5} / m$, 代入位势涡度方程中有

$$\xi_a \frac{\partial \ln \theta}{\partial x} \sim \eta_a \frac{\partial \ln \theta}{\partial y} \sim 10^{-11}, \zeta_a \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \sim 10^{-9}$$

略去较小的项, 可以得到简化后的位涡守恒方程为 $\frac{d}{dt} \left[(\zeta + f) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = 0$, 如果大

气满足准静力平衡, 那么在 p 坐标系下又可以表示为 $\frac{d}{dt} \left[(\zeta + f) \frac{\partial \theta}{\partial p} \right] = 0$ 。实际

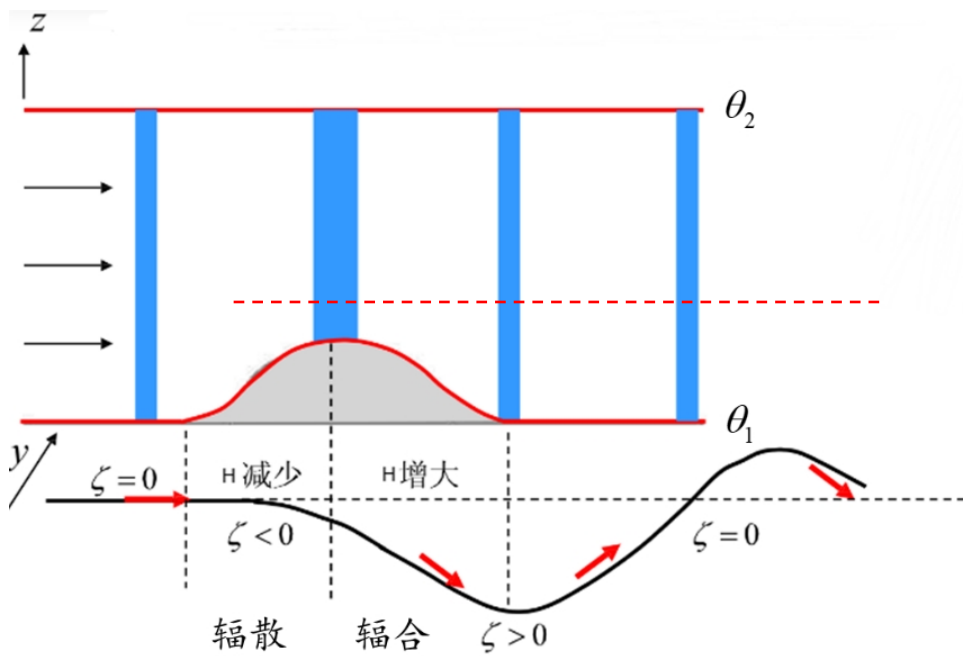
上, 在干绝热过程中, 气块沿等位温面运动, 所以 $\delta\theta = \text{const}$, 从而位涡守恒的形式常常写为 $\frac{\zeta + f}{H} = \text{const}$ 。

13. 位势涡度守恒的应用

(1) β 效应引起的位势涡度变化

冷空气南下过程中, 冷气团变薄(仅在低层有反映), 主要是因为冷空气南下过程中 f 在不断减小, 为了保证位涡守恒, 冷气团的厚度也应该相应地减小。

(2) 地形槽(背风槽)的形成



假设有一山脉东西对称, 南北宽度无限, 有一绝热、均匀且定常的西风气流, 无水平切变, 南北宽度无限层结稳定。

① 初始阶段, 气流无旋, 所以 $H = H_0, \zeta = 0, \zeta_a = f_0$;

② 上山阶段, $H \downarrow \rightarrow \zeta_a \downarrow \rightarrow \zeta < 0 \rightarrow V < 0 \rightarrow \zeta \downarrow \rightarrow f \downarrow$ 。出现负涡度后, 气柱不会马上在科氏力的作用下向南移动, 所以在上山的初期随着气柱的缩短相对涡度会继续减小。当反气旋涡度增大到一定程度时, 在内力的作用下(北边的科氏力比南边的大), 反气旋开始向南移动, 此时 f 开始减小。假设此时的相对涡度增大(即反气旋旋转减弱), 则内力减小, 不能使气柱向南运动,

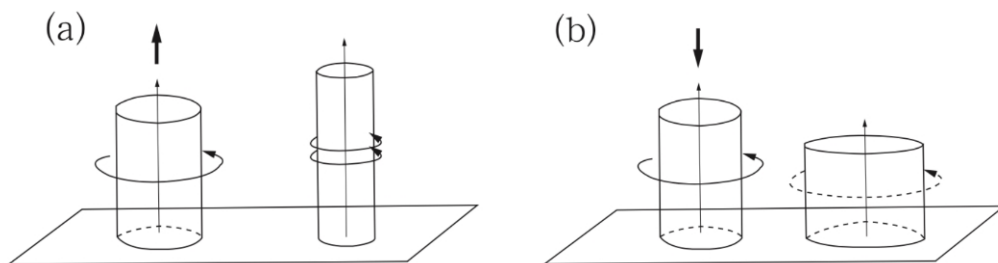
且绝对涡度 $\omega + f$ 也不一定满足总体减小趋势, 所以 ζ 应继续减小, 到达山顶处相对涡度达到最小值。

③ 下山阶段, $H \uparrow \rightarrow V < 0 \rightarrow f \downarrow \rightarrow \zeta \uparrow (\zeta < 0)$ 。到达山顶时, 反气旋性涡度达到最小值, 在下山的过程中, H 开始增大, 此时由于气流仍具有向南的速度(向南运动), 所以 f 仍在减小, 为了满足位势涡度守恒, ζ 必须要增大 (ζ 如果继续减小, 那么绝对涡度总体减小, 而此时 H 在增大, 显然不满足位势涡度守恒的条件了), 此时相对涡度为负值。

④ 再次到达山脚, 此时 $H = H_0, f < f_0, \zeta > 0$ 。由此可见, 到达山脚是具有气旋性涡度, 从而气流具有向北的速度。

⑤ 在继续向北运动的过程中, $f \uparrow, \zeta \downarrow$, 当再次回到初始的纬度时, 又有 $\zeta = 0, \zeta_a = f_0$, 此时气流仍具有向北的速度, 因此不会停下而是继续向北运动, 如此往复, 山后的等高线呈现出一种波动状。

(3) 铅直运动与涡度变化

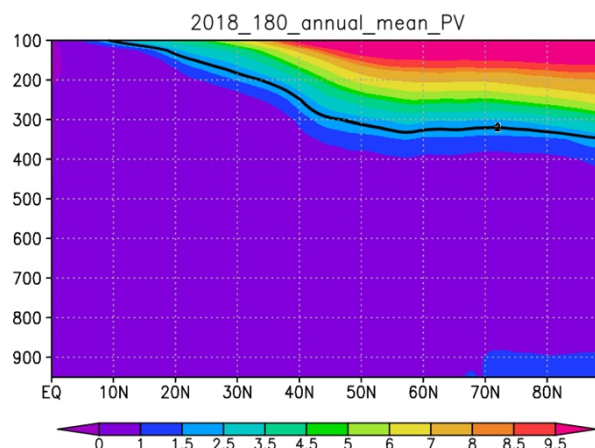


图(a) 对流层辐合上升, 气柱拉长导致涡度增大;

图(b) 对流层辐散下沉, 气柱缩短导致涡度减小。

以图(a)为例, 对于一定质量的气柱, 原来按照逆时针旋转, 如果大气有水平辐合, 在北半球, 科氏力在运动方向的右侧, 从而产生了一个逆时针环流, 根据 Stokes 环流等于涡通量, 从而气柱的涡度要增大, 根据位势涡度守恒可以知道, $\omega \cdot n \delta S = \text{const}$, 当涡度增大时, 气柱的面积应该减小, 故气柱要被拉长(在流体力学中, 称为“涡管的拉伸效应”)。

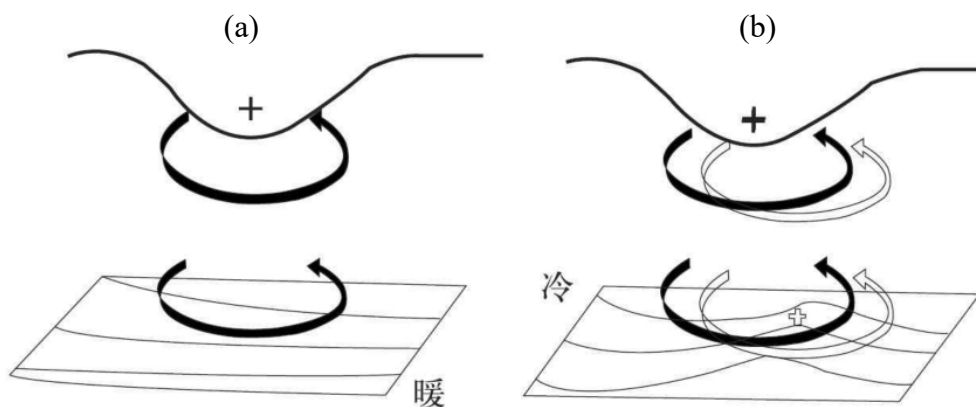
(4) 位势涡度扰动对地面系统的影响



位涡随高度和纬度增加的，其数量级为 $o(q) = 10^{-6} m^2 \cdot s^{-1} \cdot K$ ，定义 $1PVU = 10^{-6} m^2 \cdot s^{-1} \cdot K$ ，通常把 1.5~2.0 PVU 面定义为动力对流层顶。

高层正的 IPV(等熵位涡)距平与一个很强的气旋式环流对应。这个环流可一直伸展到地面，当 IPV 距平移动到一个斜压区上空时，低层环流在温度场中诱发出一个波动，波峰形成一个正的温度距平。也就是说，地面附近的正的温度距平和高层的正的 IPV 距平相对应。地面的这个温度距平可以建立自己的气旋式环流，这个环流向，上伸展可加强

高层的环流。从而形成一个上下层异常环流相互促进的过程(正反馈)。



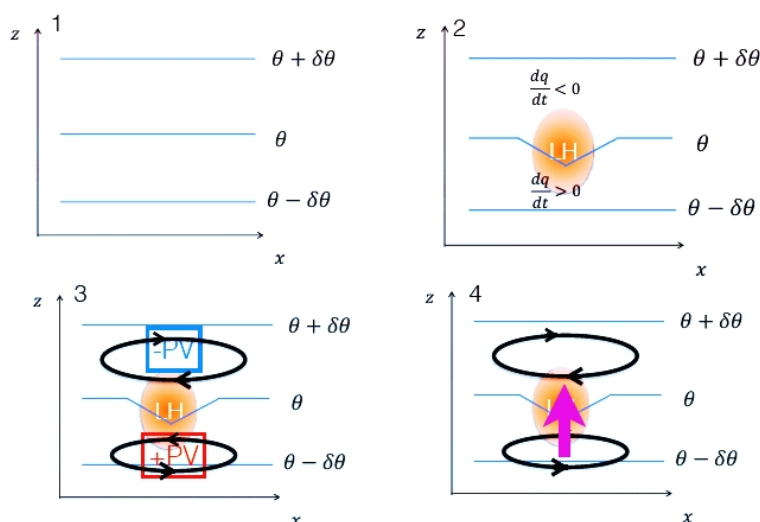
上图为高空正位涡异常相伴的气旋生示意图。图(a)表示对流层顶正的位涡异常，用实心的“+”符号表示。由位涡异常引发的环流用实箭头表示，在下部边界处位温的等值线用细线表示。前面提到，低层位涡异常也能激发出一个气旋性环流，在图(b)中用空心的“+”符号表示，这气旋性环流延伸到高空加强了由

高空正位涡异常激发出的环流形势(Hoskins et al., 1985)(图片在文献的第 53 页, 链接见本章末尾)

(5) 非绝热加热过程中位涡的变化与对流的加强

考虑非绝热加热项后的位势涡度显然不守恒了, 其表达式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_a \cdot \nabla \theta}{\rho} \right) = \frac{\omega_a}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$$



初始时刻等位温面相互平行(图 1), 某一时刻中间的等位温面向下弯曲, 从而使得下低层的 $\frac{dq}{dt} > 0$, 高层的 $\frac{dq}{dt} < 0$ (图 2), 亦即高层有一个负的位涡异常, 低层有一个正的位涡异常。前面提到, 负异常对应反气旋环流, 空气下沉, 正异常对应气旋, 空气上升, 由此形成上下的对流。

参考资料

[1] [第四章 环流与涡度](#)

[2] [《动力气象学》大气中的涡旋运动](#)

[3] [On the use and significance of isentropic potential vorticity maps](#)

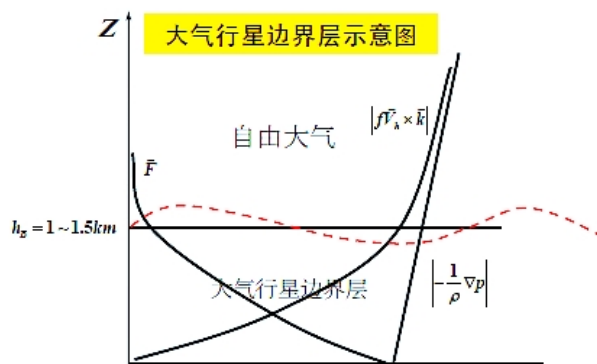
第六章 大气行星边界层

1. 大气边界层(Atmospheric Boundary Layer, ABL)的定义

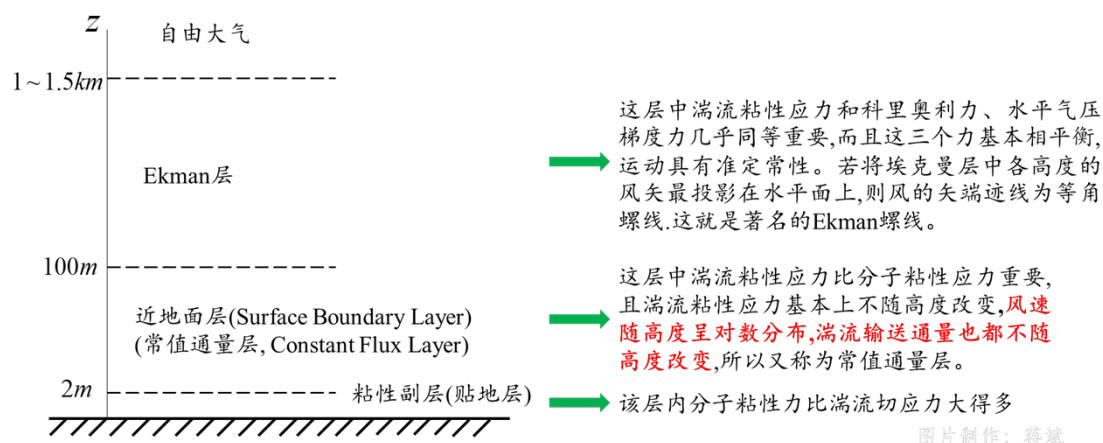
在接近地球表面的一层大气中,强烈的风的铅直切变和下垫面非均匀加热,常会引起湍流的发展,这层大气称为行星边界层。中纬度行星边界层的厚度平均为1~1.5km,约含大气全部质量的10%。

▲ 另一种定义: 存在各种尺度的湍流, 湍流输送起著重要作用并导致气象要素日变化显著的低层大气。

2. 大气边界层的结构



通常我们根据边界层中湍流粘性应力、气压梯度力和科氏力对不同层次空气运动作用的大小, 通常把大气边界层分为三层。



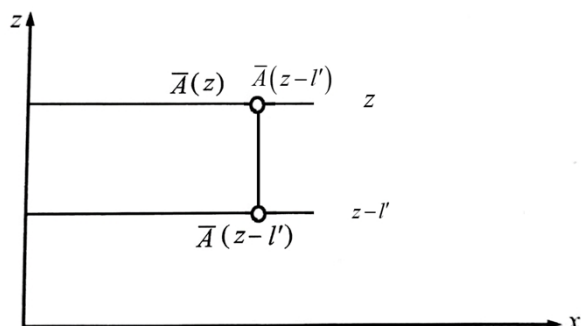
3. 混合长理论

雷诺平均方程组和基本方程组的基本形态相同,但雷诺平均方程组中多了一

些湍流项。方程的数目没有增加，却增加了未知的变量，这就意味着雷诺平均方程组是不闭合的。为了求解，必须将湍流项用其他平均量表示出来，这称为湍流参数化方法，或称闭合问题。这是湍流理论和应用研究中的难题。

普朗特(Prandtl)和卡曼(Von Karman)发展了半经验的混合长理论。混合长理论作了如下的假设：

- (1) 和分子一样，湍涡在运动的起始高度上具有该高度上的平均物理属性；
- (2) 在湍流运动中存在一个混合长 l' ，湍涡移动一个混合长后才与四周混合，在此以前其具有的物理属性保持不变(守恒)。



如上图所示，考虑某一物理属性 A ，设属性 A 的混合长为 l' ，根据混合长理论的假设，湍涡自 $z-l'$ 高度解脱出来时，将携带该高度的平均属性 $\bar{A}(z-l')$ ，且在它移至 z 高度之前将保持其属性不变。当湍涡到达 z 高度尚未与周围混合之前，就会引起该高度上属性的脉动。所以 z 高度上 A 的瞬时值和脉动值满足关系

$$\begin{cases} A(z) = \bar{A}(z) + A' \\ A(z) = \bar{A}(z-l') \end{cases} \Rightarrow A' = -[\bar{A}(z) - \bar{A}(z-l')] \xrightarrow[\text{略去高阶项}]{\text{Taylor展开}} = -l' \frac{\partial \bar{A}}{\partial z}$$

l' 与 w' 同号，比如湍涡自上向下运动，有 $w' < 0$ ，则 l' 应理解为负值，这样才能保证一些系数为正值。例如，考虑湍流引起的垂直方向上的动量输送，有 $\tau_{zx} = -\rho \overline{w'u'} = \rho \overline{w'l'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \rho K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ ，式中 K_m 称为湍流粘性系数(湍流动量交换系数、涡动扩散系数)。

[注] 对于二阶张量的一个理解

对于一个普遍二阶张量，其表达式可以定义为： $-\rho u'_j A'$ 。 A' 表示某一物理量 A 的脉动量，符号 $u'_j = (u', v', w')$ ，它表示物理量 A 的输送方向(例如 $u'_j = u'$ ，

表示输送沿着 x 轴方向), 即沿着 $x_j (x_j = x, y, z)$ 单位时间内单位面积 (这里的面积是指垂直于 x_j 的面积) 输送的物理量。例如, $-\overline{\rho w' u'}$ 表示沿着垂向上单位面积 (这个面在 xOy 平面上) 单位时间的脉动动量输送; $-\overline{\rho w' c_p \theta'}$ 表示沿着垂向上单位面积单位时间的脉动热量输送。

假设湍流脉动速度“各向同性”, 从而各方向上的脉动速度应具有相同的量级, 即 $o(u') = o(v') = o(w')$, 从而有 $w' \sim u' = cl' \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$ (c 为不为 0 的常数; 加绝对值是为了保证 l' 与 w' 同号), 于是

$$K_m = \overline{l' w'} = \overline{cl'^2} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| > 0$$

上式中 $l^2 \equiv \overline{cl'^2}$ 称为动量的平均混合长。

【混合长理论的一些缺点】

- ① 混合长理论假设湍流混合的过程是一个不连续的过程, 这是不合理的。实际过程中湍流在运动过程中不断和周围空气交换质量, 逐渐失去它原有的物理属性;
- ② 假设湍流从起始高度开始移动时携带该高度上的平均属性值, 这也是不合理的;
- ③ 动量在输送过程中, 由于受到气压梯度力和分子粘性力的作用, 将随时间而改变, 因此, 动量不守恒。

4. 湍流稳定性判据——(梯度理查森数, Gradient Richardson Number)

(1) 阿基米德浮力与层结作用

由牛顿第二定律, 单位质量的气块在垂直方向上的受力为: $\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$

上述中 ρ 为气块的密度, w 为气块垂直方向的速度, 再假设环境空气密度为 ρ_e ,

压强为 p_e ，根据气块模型的静力平衡假设，有 $p \approx p_e$, $\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial z} = -g$ 。联立上述两

个方程有 $\frac{dw}{dt} = g \frac{\rho_e - \rho}{\rho} = B$ ， B 称为净阿基米德浮力。

设环境的温度与气块的温度分别为 T_e, T ，根据状态方程，有： $\frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e}$ ，而

上式可化为：

$$\frac{dw}{dt} = g \frac{T - T_e}{T_e}$$

令 Γ, γ 分别表示环境与气块的垂直减温率，假设气块初始位置处于平衡，且气块的温度为 T_0 ，在经过一段微小的虚位移 dz 后，有：

$$\begin{cases} T = T_0 - \gamma dz \\ T_e = T_0 - \Gamma dz \end{cases} \Rightarrow T - T_e = (\Gamma - \gamma) dz \Rightarrow \frac{dw}{dt} = g \frac{\Gamma - \gamma}{T_e} dz$$

① $\Gamma > \gamma$ ，此时 $\frac{dw}{dt}$ 与气块移动方向 dz 同向，即气块总是有离开平衡位置的趋势，

这时候的大气层节为**不稳定层结**；

② $\Gamma = \gamma$ ，此时大气的垂直运动不发展也不衰减，为**中性层结**；

③ $\Gamma < \gamma$ ，此时 $\frac{dw}{dt}$ 与气块移动方向 dz 总是方向相反，气块有回到平衡位置的趋势，即气块的垂直运动受到了抑制，为**稳定层结**。

(2) *Ri number* 的导出

湍流对平均运动永远是起耗散作用，这是因为湍流总是将平均动能转化为湍动能，所以平均运动项又可以称为湍动能生成项。 Ri 数的定义为

$$Ri = \frac{\text{层结对湍流的作用}}{\text{平均流对湍动能的供给}} = \frac{g/\bar{T}(\Gamma - \gamma)}{\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)^2} = \frac{g \frac{\partial \ln \theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)^2}$$

当 $Ri < 1$ 时，湍流增强，有利于对流发展；当 $Ri > 1$ 时，湍流将被抑制，不利

于对流的发展。

5. 中性层结下近地面层的风廓线

前面提到过，在近地面层中风向不随高度变化，且风度大小满足对数定律，下面利用混合长理论得出这一规律。

假设近地面层的风沿 x 方向吹。有 $\frac{\tau_{zx}}{\rho} = -\overline{w'u'} = u_*^2$ ，其中 u_* 是另一个具有速度

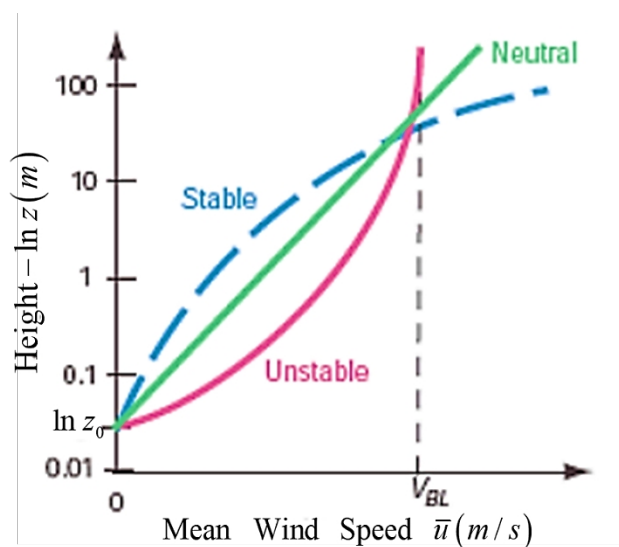
度量纲的非负常数，称为**摩擦速度**。根据混合长理论，有

$$u_*^2 = K_m \frac{d\bar{u}}{dz}, K_m = l^2 \frac{d\bar{u}}{dz} \left(\text{近地面层} \frac{d\bar{u}}{dz} > 0 \right)$$

考虑到空气微团越靠近地面越受地面制约，混合长或湍涡尺度应与离地面高度成正比，所以有 $l = \kappa z$ (κ 称为冯卡曼常数，一般取 0.41)，代入上式中有

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}$$

z_0 表示地表粗糙度，在 $z=z_0$ 处， $\bar{u}=0$ 。上式即为对数风廓线公式，在 $\ln z - \bar{u}$ 中，中性层结条件下的风廓线是一条直线(一次函数)。在其他情况下，稳定度将会对廓线产生影响，风廓线将有所改变，如下图所示。关于非中性层结下分廓线公式的导出，一般采用莫宁-奥布霍夫(Monin-Obukhov)相似理论来求解，感兴趣的同学可以进一步查阅有关资料学习。



▲ 不同层结下的风廓线

[注] 对上图的一个理解：对于不稳定层结，因为其有利于湍流的混合，**所以上层的动量可以迅速下传使得低层的风速增大**，这就是为什么不稳定层结的风廓线呈现下凹状。

6. Ekman 层的风速分布

在进行推导风速分布规律时，我们作如下假设：

- (1) 空气的密度是常数；
- (2) Rossby 数远小于 1，即惯性力项与动量方程中其他 3 项(科氏力、气压梯度力与湍流摩擦力)相比较小,可忽略；
- (3) 垂向湍流粘性系数为常数；
- (4) 正压边界层，气压梯度力不随高度改变、地转风不随高度改变；
- (5) 考虑 f 平面近似、定常运动。

根据以上假设，水平运动方程可以简化为

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + K_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{cases}$$

根据地转关系有 $\begin{cases} v_g = \frac{1}{f \rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u_g = -\frac{1}{f \rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$ ，代入上式可以得到 $\begin{cases} 0 = f(v - v_g) + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = -f(u - u_g) + K_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{cases}$

引入复变量 $W = (u - u_g) + i(v - v_g)$ ，则上面的方程可以改写为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - i \frac{f}{K_z} W = 0$$

上述方程为一个二阶常系数其次微分方程，特征方程为 $r^2 - \frac{if}{K_z} = 0$ ，注意到

$(1+i)^2 = 2i$ ，所以特征方程的解为 $r = \pm(1+i)\gamma$ $\left(\gamma = \sqrt{\frac{f}{2K_z}}\right)$ ，于是方程的通解

$$W = A e^{-(1+i)\gamma z} + B e^{(1+i)\gamma z}$$

边界条件:

$$\begin{cases} z=0, u=v=0 \\ z \rightarrow \infty, u=u_g, v=v_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0, W=W_0=-(u_g + iv_g) \\ z \rightarrow \infty, W=0 \end{cases}$$

代入边界条件有 $W = W_0 e^{-(1+i)\gamma z}$ 。称 $H_E = \sqrt{\frac{2K_z}{f}}$ 为 **Ekman 标高**，它是表征行星边界层厚度的特征量，其物理意义是平均湍流粘性力同科里奥利力有相同量级的气

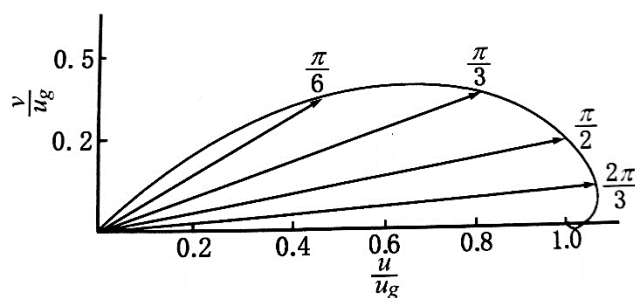
层高度。称 $De = \frac{\pi}{\gamma}$ 为 **Ekman 厚度**。将解的实部和虚部展开，有

$$\begin{cases} u = u_g \left(1 - e^{-\frac{z}{H_E}} \cos \frac{z}{H_E} \right) + v_g e^{-\frac{z}{H_E}} \sin \frac{z}{H_E} \\ v = v_g \left(1 - e^{-\frac{z}{H_E}} \cos \frac{z}{H_E} \right) + u_g e^{-\frac{z}{H_E}} \sin \frac{z}{H_E} \end{cases}$$

为了便于分析，我们假设地转气流沿着纬向吹，即 $v_g=0$ ，于是

$$\begin{cases} \frac{u}{u_g} = 1 - e^{-\frac{z}{H_E}} \cos \frac{z}{H_E} \\ \frac{v}{u_g} = e^{-\frac{z}{H_E}} \sin \frac{z}{H_E} \end{cases}$$

其对应的图像如下:



讨论:

$$(1) \text{ 风速大小 } V = \sqrt{u^2 + v^2} = u_g \sqrt{1 - 2e^{-\frac{z}{H_E}} \cos \frac{z}{H_E} + e^{-2\frac{z}{H_E}}}$$

$$(2) \text{ 风向 } \tan \theta = \frac{v}{u} = \frac{e^{-\gamma z} \sin \gamma z}{1 - e^{-\gamma z} \cos \gamma z}$$

- $z \rightarrow 0$ 时, $\tan \theta = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \gamma z}{e^{\gamma z} - \cos \gamma z} \xrightarrow[\text{分母Taylor展开}]{\text{洛必达法则}} 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$, 地表的风向与地转

风的夹角为 45° ;

- $z \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\sin \gamma z}{e^{\gamma z} + 1} \leq \frac{\sin \gamma z}{e^{\gamma z} - \cos \gamma z} \leq \frac{\sin \gamma z}{e^{\gamma z} - 1}$, 而 $|\sin \gamma z| \leq 1$, 从而

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin \gamma z}{e^{\gamma z} + 1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin \gamma z}{e^{\gamma z} - 1} = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin \gamma z}{e^{\gamma z} - \cos \gamma z} = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

即此时的风已经与地转风平行了。

- $W = W_0 e^{-(1+i)\frac{z}{H_E}} = W_0 e^{-\frac{z}{H_E}} e^{-i\frac{z}{H_E}} \Rightarrow |W| = |W_0| e^{-\frac{z}{H_E}}$, 即随着高度的增加, 边界层内的风速增大, 且方向向右旋转。 $\left(|W_0| = \sqrt{u_g^2 + v_g^2}, |W| = \sqrt{(u - u_g)^2 + (v - v_g)^2} \right)$

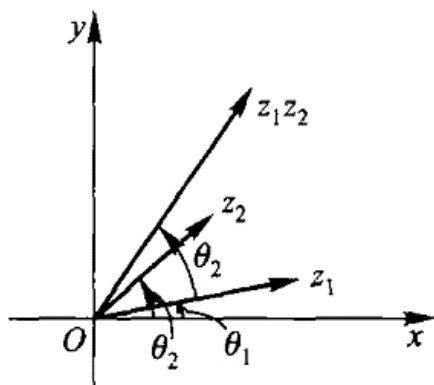
(3) **梯度风高度**: 表示第一次风向与地转风重合的高度, 用 H_B 表示。前面提到,

实际风与地转风风向重合时, 有 $\tan \theta = 0 \Rightarrow \sin \frac{z}{H_E} = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{H_E} = n\pi$, 根据梯度

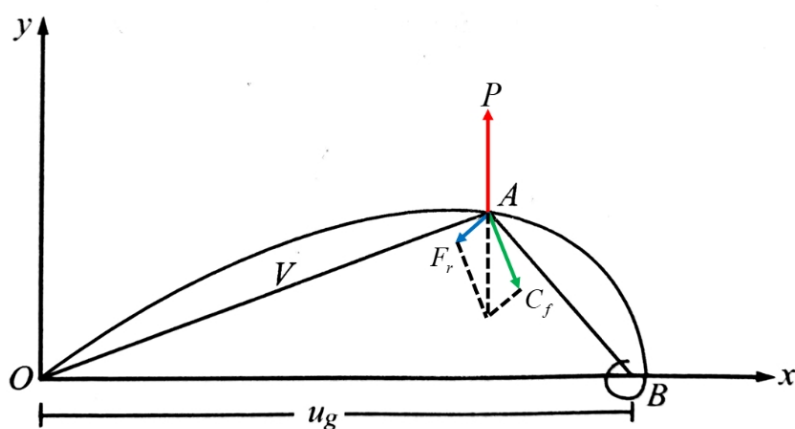
风高度定义, 有 $H_B = \pi H_E = De$ 。在梯度风高度之上, 大气才不受地表的影响, 才能够在气压梯度的作用下自由流动; 同时, 在梯度风高度之上, 风向并不是完全与地转风重合, 而是存在一定的摆动; 基本上可以将梯度风高度以上看做自由大气。

[回顾] 复变函数中复数乘法的几何意义

假设有两个复数为别为 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则二者的乘积为 $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, 即 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$, 其在复平面上的表示如下图。也可以理解为, 将 z_1 乘以 z_2 , 表示将 z_1 逆时针旋转 θ_2 度, 并且将 $|z_1|$ 拉长或者缩短 $|z_2|$ 倍。



▲ 利用 Ekman 螺线进行受力分析



受力分析过程：因为我们假设地转风沿着 x 方向吹，所以根据白贝罗定律，确定出气压梯度力的方向(红色箭头)；科氏力与运动方向垂直，确定出科氏力的方向(绿色箭头)；根据方程 $-\frac{1}{\rho}\nabla p - f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}_r = 0$ 及地转平衡 $-\frac{1}{\rho}\nabla p = f\mathbf{k} \times \mathbf{V}_g$ 得到 $\mathbf{F}_r = f\mathbf{k} \times (\mathbf{V} - \mathbf{V}_g)$ ，据此确定湍流摩擦力的方向。

由上图还可以发现，湍流摩擦力的方向并非与风向相反，而是存在一定的偏角。已知涡动应力(雷诺应力)可以表示为 $\tau_{zx} = \rho K_z \frac{du}{dz}$, $\tau_{zy} = \rho K_z \frac{dv}{dz}$ ，令 $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{zy}$ ，于是湍流摩擦力随高度的变化规律可以表示为

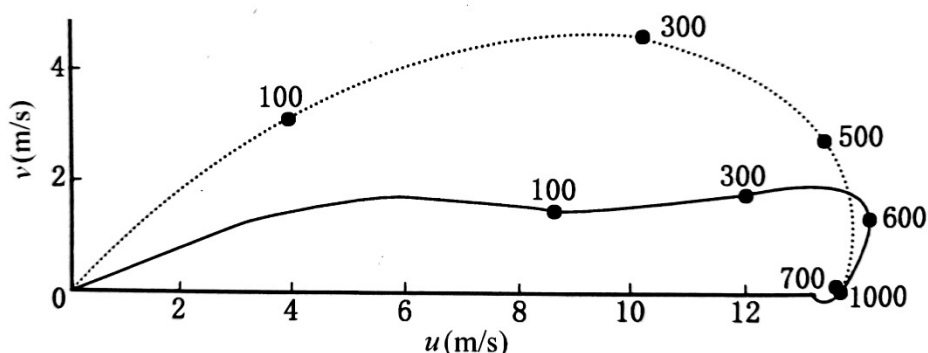
$$\tau = \rho K_z \frac{dW}{dz}, F_r = \frac{d\tau}{dz} = \rho K_z \frac{d^2 W}{dz^2} = -2i\rho K_z u_g \gamma^2 e^{-(1+i)\gamma z}$$

对上式继续化简，注意到 $e^{i\pi} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \gamma^2 = \frac{f}{2K_z}$ ，代入得到

$$F_r = \rho f u_g e^{-\gamma z} \cdot e^{i\left(-\gamma z - \frac{\pi}{2}\right)}$$

当 $z=0$ 时有 $F_r = \rho f u_g e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ ，可见在地面上，湍流摩擦力的大小为 $\rho f u_g$ ，方向与在风向的右后 45° ；随着高度的增加，湍流摩擦力做顺时针旋转，大小呈现指数衰减。

▲ 实际观测的近地面层的风速分布



▲ 1968 年 4 月 Jacksonville 得出的平均风速矢端迹线(实线)与 Ekman 螺线(虚线)可见实际风与 Ekman 理论值相比，其与地转风的夹角要更小。

7. Ekman 抽吸与二级环流

由于湍流摩擦作用，埃克曼层中风有指向低压一侧的分量(北半球)，由此将引起质量向低压一侧输送。选取一个铅直伸展至整个埃克曼层的单位截面积空气柱，Ekman 层内 u 分量沿着等压线吹，只有 v 分量才对向低压方向质量输送量有贡献，因此

$$M = \int_0^{H_B} \rho v dz \left(H_B = \frac{\pi}{\gamma} \right)$$

假定密度为常数，代入 Ekman 解的表达式有 $M = \rho u_g \int_0^{H_B} e^{-\gamma z} \sin \gamma z dz$ ，利用积

分公式 $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$ ，可以得到输送的质量表达式为

$$M = \frac{\rho u_g}{2\gamma} (e^{-\pi} + 1)$$

因为 $e^{-\pi} = 0.043 \ll 1$ ，所以有 $M = \frac{1}{2} \rho u_g H_E$ 。

水平辐合的强迫作用必然导致垂直运动。因为大气可认为是不可压缩流体，根据连续方程有

$$\rho \int_0^{H_B} \frac{\partial w}{\partial z} dz = -\rho \int_0^{H_B} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{H_B} \rho u dz \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^{H_B} \rho v dz \right)$$

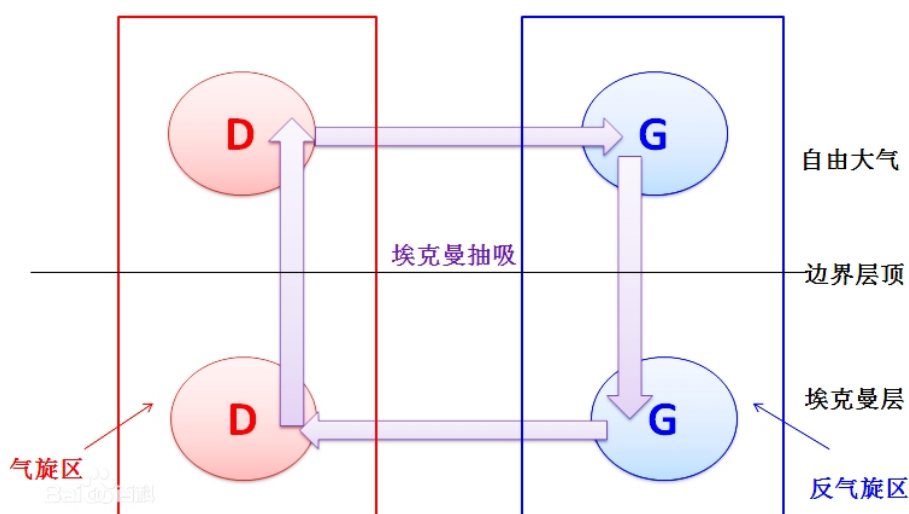
前面提到 v 分量对质量输送起作用，且 $z=0$ 时 $w=0$ ，所以有

$$\rho w(H_B) = -\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{2} \rho H_E \frac{\partial u_g}{\partial y} \Leftrightarrow w(H_B) = \zeta_g \left(\frac{K}{2f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

[注] 在自由大气中 u_g 沿着等高线(x 轴)吹，所以 $\frac{\partial u_g}{\partial x} = 0$ ；但是沿着 y 方向等高

线的疏密会有变化，从而 $\frac{\partial u_g}{\partial y} \neq 0$ 。

在气旋区， $\zeta_g > 0$ ，则 $w(H_B) > 0$ ，边界层顶存在上升运动，相应的在自由大气形成水平辐散；在反气旋区， $\zeta_g < 0$ ，则 $w(H_B) < 0$ ，边界层顶存在下沉运动，相应的在自由大气形成水平辐合。这种机制称为 **Ekman 抽吸或者 Ekman 泵**，这种机制下产生了次级环流。其具体的形成机制如下图所示。



- **一级环流(主环流):** 自由大气中不计湍流粘性的环流。(平直西风，槽脊，低压高压系统等)；

- **二级环流(次环流):** 在准地转涡旋场中, 由边界层湍流摩擦效应产生的强迫环流。即湍流摩擦使得气流在 Ekman 层中向低压一侧辐合, 在 Ekman 层顶发生铅直方向的输送, 形成了一个叠加在主环流并与主环流垂直的次级环流。

8. 二级环流与旋转减弱

(1) 二级环流的作用——使得边界层与自由大气发生物理量交换

➤ 从角动量角度

边界层中角动量小的空气, 输送到自由大气; 自由大气中角动量大的空气, 输送到边界层。结果是 由自由大气向边界层输送角动量。自由大气角动量减少, 大气旋转减弱边界层角动量增加, 以补偿耗散。

➤ 从涡度角度

在自由大气中, 二级环流使得气旋区产生辐散、反气旋区产生辐合, 其作用是使得气旋、反气旋的**旋转减弱**。而在边界层中则刚好相反, 二级环流使得气旋区产生辐合、反气旋区产生辐散, 以**补偿消耗**。(自由大气中忽略耗散, 是通过与边界层发生相互作用使得大气旋转减弱, **耗散发生在边界层**)

(2) 旋转减弱与天气系统的消亡

前面通过量纲分析(Page 69)得到的绝对涡度的表达式为

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f \frac{\partial w}{\partial z}$$

假设采用 f 平面近似, 从边界层顶(H_B)到对流层顶(H)做积分有

$$\int_{H_B}^H \frac{d\zeta}{dt} dz = f \int_{H_B}^H \frac{\partial w}{\partial z} dz \Leftrightarrow \frac{d\zeta_a}{dt} = f \frac{w(H) - w(H_B)}{H - H_B}$$

$H \sim 10^4 m, H_B \sim 10^2 m$, 所以 $H \gg H_B$; 在 $z=H$ 处, $w(H)=0$;

$w(H_B) = \zeta_g \left(\frac{K}{2f} \right)^{\frac{1}{2}}$, 代入上式有 $\frac{d\zeta_g}{dt} = -\frac{\zeta_g}{H} \sqrt{\frac{fK}{2}} \Rightarrow \zeta_g(t) = \zeta_g(0) e^{-\frac{t}{H} \sqrt{\frac{fK}{2}}}$, 由此

可知, 由于 Ekman 抽吸使地转风涡度随时间呈指数衰减。定义地转涡度的 e 折

时 间 $\tau_e = H \sqrt{\frac{2}{fK}}$, 取 $H \sim 10^4 m, K \sim 10 m^2 \cdot s^{-1}; f \sim 10^{-4} s^{-1}$, 有

$\tau_e \sim 4.5 \times 10^5 s \Rightarrow 4d$, 这个时间与天气系统实际消亡时间尺度相近, 可以表明:

次级环流引起的旋转减弱是引起天气系统消亡的最主要机制。下面再讨论“自由大气”本身的粘性耗散对大气旋转减弱的作用。取 x 方向的动量方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + \boxed{K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

若仅靠粘性耗散自由大气的旋转, 则有 $\frac{U}{\tau} = K \frac{U}{H^2} \Rightarrow \tau = \frac{H^2}{K} = 10^7 s \approx 115d$, 显然

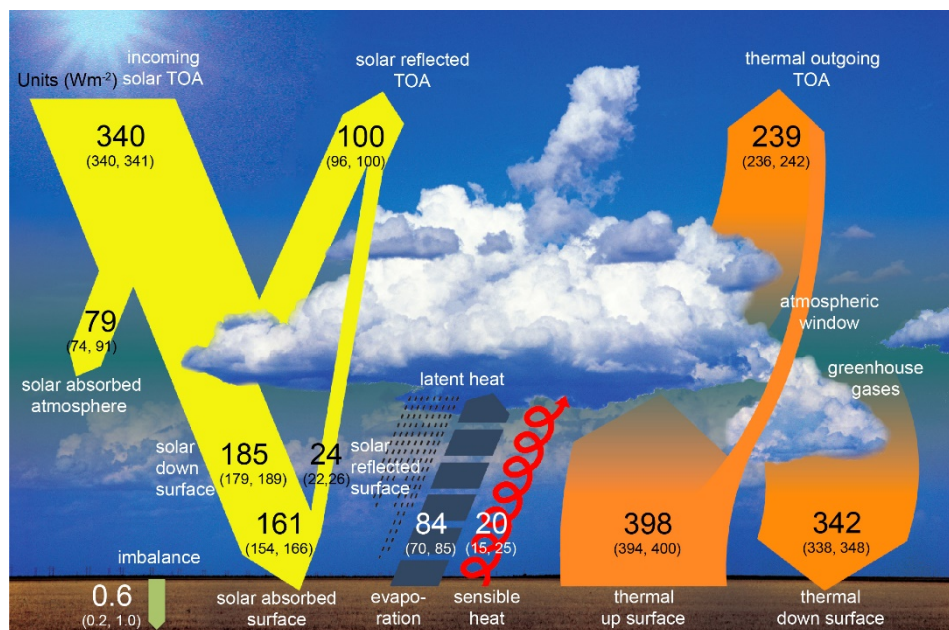
这与实际情况不符, 所以实际“自由大气”本身粘性耗散, 使天气系统衰亡的作用很弱, 可忽略粘性作用。

参考资料

- [1] [边界层气象学课件: CH04_近地面层及其廓线规律](#)
- [2] [Ekman 边界层动力学的理论研究](#)
- [3] [大气行星边界层 1](#)
- [4] [大气行星边界层 2](#)
- [5] [大气边界层](#)

第七章 大气能量学

1. 大气能量过程概述



▲ 全球年平均辐射收支示例图(IPCC, 2013)

大气中经常遇到的基本能量形式有：辐射能、内能、重力位能、动能等。从能量观点考虑，大气运动的最终能源应是太阳辐射能。大气本身只能吸收很少一部分太阳辐射能，太阳辐射能主要被下垫面吸收，然后通过湍流热量输送和辐射热量传递把热量传递给大气，使大气内能增加。此外，水分从下垫面蒸发时，蒸发过程中要消耗下垫面吸收的一部分太阳辐射能；水汽在大气中凝结时，释放出凝结潜热使大气得到热能。非绝热加热使大气内能增加的同时，将引起大气在铅直方向上膨胀，从而增加大气的重力位能。

太阳辐射能不能直接转换成大气动能，大气动能是由大气的内能、重力位能直接转换来的，而且只有包含力的过程，通过力对空气作机械功才可能实现内能、重力位能和动能之间的转换。

2. 大气中的基本能量形式（以铅直气柱为例）

(1) (重力)位能(Gravitational Potential Energy)

重力位能(简称为位能)是由于地球对空气微团的引力使其具有的一种内在能

力, 等于克服重力把该空气块抬升到高度 z 所作的功。质点处于地球表面附近重力场中任一点时, 都具有重力势能(位能)。

选取 $z=0$ 为零位能面, 则: 在 z 处单位质量气块的位能: $\Phi = gz$ 。对于某一高度为 h 的垂直空气柱, 单位面积上的位能可以表示为

$$\begin{aligned}\Phi^* &= \int_0^h \rho \Phi dz = \int_0^h \rho g z dz \quad (dp = -\rho g dz) = -\int_{p_0}^{p_h} z dp \\ &= -(pz) \Big|_{p=p_0}^{p=p_h} + \int_0^h p dz = -(pz) \Big|_{p=p_0}^{p=p_h} - \int_{p_0}^{p_h} \rho RT \cdot \frac{dp}{\rho g} = -(pz) \Big|_{p=p_0}^{p=p_h} + \int_{p_h}^{p_0} \frac{RT}{g} dp\end{aligned}$$

在地面处, $z=0$, 令 $h \rightarrow \infty$, 则 $p_h \rightarrow 0$, 于是上式可以化简为 $\Phi^* = \int_0^{p_0} \frac{RT}{g} dp$

(2) 内能(Internal Energy)

设空气温度为 $T(K)$, (比)定容比热为 c_v , 则单位质量空气微团的内能为

$$I = c_v T$$

对于干空气, $c_v = 717 J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$ 。同样的考虑高度为 h 的垂直空气柱, 单位面积上的内能可以表示为

$$I^* = \int_0^h \rho I dz = \int_0^h \rho c_v T dz = \int_0^{p_0} \frac{c_v T}{g} dp$$

▲ 内能与位能之间的关系



$$\Phi^* = \int_0^{p_0} \frac{RT}{g} dp = \frac{R}{c_v} \int_0^{p_0} \frac{c_v T}{g} dp = \frac{R}{c_v} I^* = 0.4 I^*$$

上述关系也表明, 大气的内能与位能的变化是同向的。

(3) 动能(Kinetic Energy)

单位质量的空气的动能为 $K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, 考虑高度为 h 的垂直空气柱, 单位面积上的动能可以表示为

$$K^* = \int_0^h \rho E dz = \int_0^h \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dz = \int_0^{p_0} \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2g} dp$$

由于 $w \ll u, v$ ，一般只考虑水平动能。

(4) 潜热能

系统中所有的水汽全部凝结所释放的热量，叫做潜热能。设空气的比湿为 q ，相变潜热为 L ，那么单位质量的空气微团的潜热能为 $H = Lq$ ，则单位面积的气柱的相变潜热能为

$$H^* = \int_0^h \rho H dz = \int_0^{p_0} \frac{Lq}{g} dp$$

[注] 相变潜热是温度的函数，其满足的微分关系式称为基尔霍夫方程

$$\frac{dL_v}{dT} = c_{pv} - c_w \quad (c_{pv}: \text{水汽比定压比热}; c_w: \text{液态水比定压比热})$$

根据实验数据有表达式 $\frac{dL_v}{dT} = -2323$ ，且 $T = 0^\circ\text{C}$ 时， $L_v = 2.5 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ，所以其经验表达式为

$$L_v = 2.5 \times 10^6 - 2323T$$

当有水分自地面蒸发时，大气的内能不增加，只有水汽凝结时放出热量供给大气才使大气内能增加。这样，我们在讨论大气中各种能量转换时，可以把大气看成是具有实际大气温度、气压的干空气，而把水汽发生凝结时所释放出的凝结潜热作为大气内部的热源。

(5) 压力能(Pressure Energy)

单位质量空气的压力能为

$$J = \alpha p = RT$$

对于单位面积的铅直气柱，其压力能为

$$J^* = \int_0^h \rho J dz = \int_0^{p_0} \frac{RT}{g} dp = \Phi^*$$

上式表明，位能与压力能相等。

3. 基本能量形式的组合及比较

(1) 显 (感) 热能

热力学第一定律(单位质量)为

$$\delta q = c_v dT + p d\alpha = dI + d(p\alpha) - \alpha dp = d(I + p\alpha) - \alpha dp = dh - \alpha dp$$

对于定压过程, 无相变时焓的增加等于空气所吸收的热量, 而空气在作水平运动时, 其热力变化可以近似看成是等压过程, 定义此过程中单位质量的空气所具有的焓称为显热能, 即

$$h = I + p\alpha = c_v T + RT = c_p T$$

可见显热能为内能和压力能之和, 它只与温度有关。

(2) 全位能

全位能即空气的内能和位能之和, 单位质量的空气微团具有的全位能为

$$P = I + \Phi = c_v T + gz$$

前面提到的位能与内能之间的关系表明内能和位能的变化是一致的, 所以在讨论能量转换时, 将内能和位能一并考虑可以使问题简化。

(3) 温湿能(湿焓)

指显热能与潜热能的和, 它与空气的温、湿状态都有关。若单位质量的湿焓用 h_m 表示, 则 $h_m = c_p T + Lq$

(4) 静力能

单位质量空气的动能除了高空急流附近极少数情形之外, 比显热能、位能、潜热能小 2~3 个数量级, 因此, 一般可不考虑。“静力”一词表示未考虑动能。

对单位质量的干空气, 干静力能或蒙哥马利位势(Montgomery Porential)是

$$\Phi_d = c_p T + gz$$

对单位质量的湿空气, 其湿静力能或湿蒙哥马利位势是

$$\Phi_m = c_p T + gz + Lq$$

(5) 总能量

$$E_t = \underbrace{c_v T}_{\text{内能}} + \underbrace{gz}_{\text{位能}} + \underbrace{\frac{1}{2}V^2}_{\text{动能}} + \underbrace{Lq}_{\text{潜热能}} + \underbrace{RT}_{\text{压力能}} = c_p T + gz + \frac{1}{2}V^2 + Lq = E_{dt} + Lq$$

4. 大气能量方程

(1) 动能方程

动能是天气系统强度的标识。

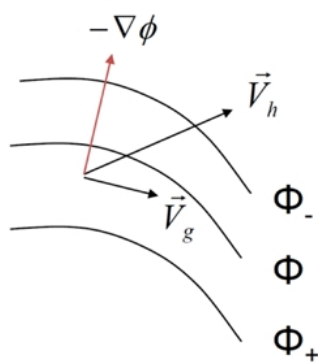
p 坐标系下的水平动量方程为

$$\frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} + (\mathbf{V}_h \cdot \nabla) \mathbf{V}_h + \omega \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial p} = -\nabla_h \Phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{V}_h + \mathbf{F}_r$$

两边同时点乘 $\mathbf{V}_h$ ，注意到 $\mathbf{V}_h \cdot u \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial x} = u \left(\mathbf{V}_h \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial x} \right) = u \frac{\partial K}{\partial x}$ ，有

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{V}_h \cdot \nabla K + \omega \frac{\partial K}{\partial p} = -\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi + \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{F}_r$$

上述方程表明，科氏力不做功， $\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{F}_r = -D$ ($D > 0$) 为粘性力项做负功(动能的摩擦损耗)，所以动能的来源只能来自位势梯度力的做功。单位质量质点的动能方程又可以表示为



$$\frac{dK}{dt} = -\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi - D$$

对于准地转运动，风沿着等 Φ 面吹，所以 $-\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \Phi = 0$ ，

即系统的动能不发生变化，由此我们推出如果需要系统的动能发生变化，需要风场穿过等位势高度线。例如

$-\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi > 0$ 时，压强梯度力做正功，系统的动能增大。

(2) 闭合系统中的动能方程的表现形式

▲ 闭合系统：与外界无质量的交换，即边界上的法向速度为零。

将(1)中得到的动能方程进行简化：

$$\begin{aligned}
V_h \cdot \nabla K + \omega \frac{\partial K}{\partial p} &= \nabla_h \cdot (KV_h) - K \nabla_h \cdot V_h + \frac{\partial(\omega K)}{\partial p} - K \frac{\partial \omega}{\partial p} \\
&= \nabla_h \cdot (KV_h) + \frac{\partial(\omega K)}{\partial p} - K \left(\nabla_h \cdot V_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} \right) \text{(连续方程)} \\
&= \nabla_h \cdot (KV_h) + \frac{\partial(\omega K)}{\partial p}
\end{aligned}$$

所以动能方程又可以写为

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla_h \cdot (KV_h) + \frac{\partial(\omega K)}{\partial p} = -V_h \cdot \nabla_h \Phi - D$$

对于一个质量为 M 的闭合系统，对上式做积分有

$$\int_M \frac{\partial K}{\partial t} dM + \int_M \nabla_h \cdot (KV_h) dM + \int_M \frac{\partial(\omega K)}{\partial p} dM = - \int_M V_h \cdot \nabla_h \Phi dM - \int_M D dM$$

- 左边第一项： $\int_M \frac{\partial K}{\partial t} dM = \frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM$ 。
- 左边第二项： $\int_M \nabla_h \cdot (KV_h) dM = \rho \int_{\tau} \nabla_h \cdot (KV_h) d\tau = \rho \int_S KV_{hn} dA$ (已知高斯散度定理为： $\int_V \nabla \cdot F dV = \int_S F \cdot n dS$ (n 为曲面 S 的外法线方向))。这一项的物理意义为：**穿过边界面的动量通量**，即单位时间空气通过流入、流出某边界面到达固定体积 τ 中所具有的动能，由于我们假定是封闭系统，不存在水平动量通量，所以这一项为 0。
- 左边第三项： $\int_M \frac{\partial(\omega K)}{\partial p} dM = \rho \int_{\tau} \frac{\partial(\omega K)}{\partial p} d\tau$ ，我们假设边界为刚壁，有

$$p = p_0, \omega = 0, p = 0, \omega = 0, \text{ 从而该项也为 } 0。$$

综上，封闭系统的动能方程可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M V_h \cdot \nabla_h \Phi dM - \int_M D dM$$

上式左边还可以写为 $\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = \frac{\partial K^*}{\partial t} = M \frac{\partial \bar{K}}{\partial t}$ ，其中 $\bar{K}$ 称为(质量)平均动能。这

样，上式的物理意义可以表述为：在封闭系统内，空气的平均动能变化取决于位势梯度力做功和摩擦损耗。

$-\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi$ 进行变形有

$$\begin{aligned} -\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi &= -\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi - \Phi \left(\nabla_h \cdot \mathbf{V}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} \right) \\ &= -\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi - \Phi \nabla_h \cdot \mathbf{V}_h - \frac{\partial(\Phi \omega)}{\partial p} + \omega \frac{\partial \Phi}{\partial p} \left(\text{静力平衡 } \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \right) \\ &= -\nabla_h \cdot (\Phi \mathbf{V}_h) - \frac{\partial(\Phi \omega)}{\partial p} - \omega \alpha = -\nabla \cdot (\Phi \mathbf{V}) - \alpha \omega \end{aligned}$$

所以 $-\int_M \mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi dM = -\int_M (\nabla_h \cdot (\Phi \mathbf{V}) + \alpha \omega) dM = -\int_M \alpha \omega dM$ ，故动能方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = -\int_M \alpha \omega dM - \int_M D dM$$

(3) 全位能方程

(为了与压强区别，这里的全位能符号用 E 表示)

已知全位能为 $E = c_v T + gz = c_p T$ ，热能方程为 $c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q}$ ，因此有

$$\frac{dE}{dt} - \alpha \omega = \dot{Q} (*)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{V}_h \cdot \nabla E + \omega \frac{\partial E}{\partial p} + E \left(\nabla_h \cdot \mathbf{V}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_h \cdot (E \mathbf{V}_h) + \frac{\partial(E \omega)}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \mathbf{V}) \end{aligned}$$

代入(*)式并积分(对封闭系统而言)

$$\int_M \frac{\partial E}{\partial t} dM + \int_M \nabla \cdot (E \mathbf{V}) dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \dot{Q} dM$$

由前面的讨论可知 $\int_M \frac{\partial E}{\partial t} dM = \frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM$, $\int_M \nabla \cdot (E \mathbf{V}) dM = 0$ ，故全位能方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \dot{Q} dM$$

5. 闭合系统的能量守恒与转换

(1) 全位能与动能的转化

$$\begin{cases} \text{动能: } \frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M \alpha \omega dM - \int_M D dM \\ \text{全位能: } \frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \dot{Q} dM \end{cases}$$

可以发现, $\int_M \alpha \omega dM$ 项同时在动能和全位能方程中出现, 且符号相反, 故是全位能和动能之间的转换项:

$$\int_M \alpha \omega dM \begin{cases} > 0 \Rightarrow E \uparrow, K \downarrow \Rightarrow E \rightarrow K \\ < 0 \Rightarrow E \downarrow, K \uparrow \Rightarrow K \rightarrow E \end{cases}$$

如果 $\omega=0$, 那么 $\int_M \alpha \omega dM = 0$, 所以垂直运动是闭合系统中动能与全位能转换的

必要条件。当暖空气上升、冷空气下沉时有

$$\begin{cases} \text{暖空气上升: } T_1 > 0, \omega < 0 \rightarrow \omega T_1 < 0 \\ \text{冷空气下沉: } T_2 > 0, \omega > 0 \rightarrow \omega T_2 > 0 \end{cases}, T_1 > T_2 \Rightarrow \omega T_1 + \omega T_2 < 0 \Rightarrow - \int_M \alpha \omega dM > 0$$

从另一个角度理解为: 暖空气上升、冷空气下沉, 使得整个系统的重心下降, 从而位能将减少, 动能增加。

【转换方向的判断】

因为 $\int_M \alpha \omega dM = \int_M \frac{R}{p} T \omega dM$, 所以转换方向取决于闭合系统中 ω 和 T 的“相关性”。

若各等压面上 ω 和 T 负相关, 即平均而言等压面上暖空气上升, 冷空气下沉, 则 $\int_M \alpha \omega dM < 0$, 全位能转换为动能; 反之, 若各等压面上 ω 和 T 正相关,

平均而言等压面上冷空气上升, 暖空气下沉, 则 $\int_M \alpha \omega dM > 0$, 动能转换为全位能。

(2) 闭合系统的动能+全位能方程

$$\int_M \frac{\partial}{\partial t} (K + E) dM = \int_M \dot{Q} dM - \int_M D dM$$

由上可知, 在绝热、无摩擦条件下, 总能量守恒。

【小结】

① 只有包含力的过程才能制造或消耗动能:

- 沿**气压梯度力**的水平运动, 若穿越等压线指向低压的运动, 则位能将转换为动能, 反之类推;
 - 抵抗**摩擦力**的大气运动, 将消耗动能;
 - 沿着**重力**方向即下降的大气运动, 位能将转换为动能, 反之类推;
 - **科氏力**的方向与运动方向垂直, 故它既不会增加也不会减少动能。
- ② 闭合系统的动能增加, 从**做功**的角度, 是压强梯度力做正功, 从**能量转换**的角度, 是全位能向动能转换的结果;
- ③ **全位能转化为水平动能, 其根本原因是斜压力管作用**。在正压大气中, 由于没有力管存在, 位能不能释放为动能。通常就以正压静止大气所具有的全位能作为全位能的基态。

6. 有效位能(Available Potential Energy, APE)

大气运动的最终能源是太阳辐射能, 但太阳辐射能不能直接转换为大气运动的动能。在静力平衡大气中, 太阳辐射能常以全位能的形式储存于大气之中, 并且只有通过穿越等压线的水平运动, 全位能才可能转换为大气运动的动能。所以, 对于全球大气而言, 全位能是动能唯一的源。摩擦总是要消耗动能的, 要维持全球大气运动, 全位能一定要不断地转换为动能。当大气处于某一状态时, 可用于转换为动能的能量只是全位能的一小部分, 这部分能量称为有效位能, 余下的称非有效位能。



(1) 定义(Lorenz, 1955)

大气现有状态下的全位能与经过绝热调整后达到层结稳定、等压面和等温面重合且呈水平分布状态(这一状态称为参考状态)时尚存的全位能之差, 定义为有效位能。

【几点说明】

- ① 讨论个别微团或某一气层的有效位能没有意义, 全位能针对**闭合系统**而言;

- ② 系统的最小全位能是绝热调整后产生的正压状态和稳定层结下的全位能；
- ③ 大气调整到参考状态的过程中，必有明显的上升和下沉运动；
- ④ 有效位能就是大气中总位能向动能转换的最大可能值。

(2) 有效位能表达式的导出

以 $P_{\min}^*$ 表示全位能的最小可能值，有 $P_{\min}^* = \int_M c_p T_e dM$ (下标 e 表示参考状态)，

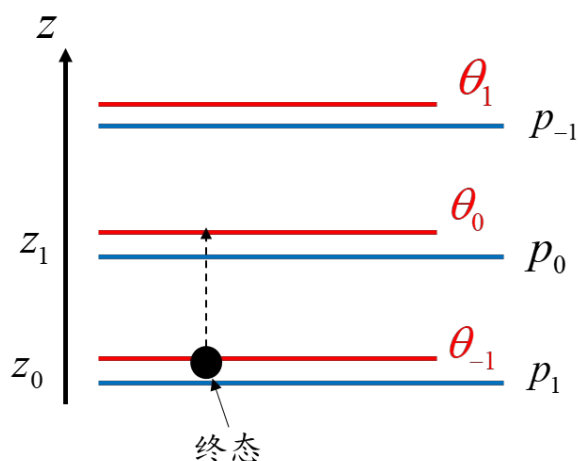
那么大气的有效位能可以定义为

$$A^* = P^* - P_{\min}^* = \int_M c_p (T - T_e) dM$$

由上述定义，有效位能具有如下的性质：

- ① 大气做绝热无摩擦的运动时，全球大气的有效位能和动能之和不会改变；
- ② 有效位能完全取决于初始状态的质量分布；
- ③ 等压面、等温面呈水平分布状态且层结稳定时，有效位能为 0；
- ④ 大气为斜压状态时，有效位能总是正值。

关于有效位能的计算，有两种算法：第一种就是算出初始状态的全位能和终态的全位能，即有效位能=初态全位能-终态全位能，课本上采用的是这种方法，但是计算时比较复杂，因为终态不好确定。下面采用第二种算法——气块法，即计算从终态到初态，气块反抗净浮力所做的功。



如上图所示，取正压、层结稳定的大气为参考状态，把单位质量气团从 $z=z_0$ 处移到 $z=z_1$ 处，由于密度随高度减小，所以此过程受到的净浮力向下，受到的

净浮力为 $B = -N^2 z \left(N^2 = g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{g}{\bar{T}} (\gamma_d - \gamma) \right)$ 。在 $z = z_0$ 处, $\theta = \bar{\theta}(z_0)$, 对于干绝热过程, 位温守恒, 所以在 $z = z_1$ 处气团具有的位温仍然为 $\theta(z_0)$; 而 $z = z_1$ 等压面上的位温为 $\theta = \bar{\theta}(z_1)$, 于是在 $z = z_1$ 处的等压面上, 产生了位温差:

$$\theta = \bar{\theta}(z_0) - \bar{\theta}(z_1) = -\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \cdot (z_1 - z_0)$$

为了方便计算, 取 $z_0 = 0$, 那么反抗净浮力所做的功为

$$W = \int_0^{z_1} N^2 z dz = \frac{1}{2} N^2 z_1^2 = \frac{1}{2} N^2 \left(\frac{\theta}{\partial \bar{\theta} / \partial z} \right)^2$$

这就是单位质量气块所具有的有效位能, 那么单位截面积的铅直气柱所具有的平均有效位能可以表示为

$$\overline{A^*} = \int_0^\infty \frac{1}{2} N^2 \left(\frac{\theta'}{\partial \bar{\theta} / \partial z} \right)^2 \rho dz = \int_0^{p_0} \frac{1}{2g} N^2 \left(\frac{\theta'}{\partial \bar{\theta} / \partial z} \right)^2 dp = \int_0^{p_0} \frac{g}{2N^2} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right)^2 dp$$

设 $\frac{T'}{\bar{T}} \approx \frac{\theta'}{\bar{\theta}}$, 那么上式又可以写为

$$\overline{A^*} = \frac{1}{2} \int_0^{p_0} \frac{\bar{T}}{\gamma_d - \gamma} \left(\frac{T'}{\bar{T}} \right)^2 dp$$

根据有效位能的表达式, 可以得到如下结论:

- ① 有效位能取决于等压面上的位温差或者温度差;
- ② θ' 表示某处温度(位温)与等压面上平均温度(位温)的差值, 所以对于正压大气, 等压面上温度处处相等, 所以 $\theta = 0$, 从而有效位能为 0;
- ③ 有效位能与大气的斜压性相对应, 正压大气没有有效位能; 斜压性越强, 力管项大, 有效位能越大。因此也称有效位能为斜压能。

[关于气块受到浮力为 $B = -N^2 z$ 的详细推导]

垂向运动方程为 $\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$, 而 $\frac{\partial p_e}{\partial z} = -\rho_e g$ (下标 e 表示环境大气的有

关性质), 一般有 $p_e \approx p$ 。代入上式有 $\frac{dw}{dt} = \frac{\rho_e - \rho}{\rho} g$, 此即为阿基米德净浮力。

根据状态方程有 $\frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e}$ ，所以有 $\frac{dw}{dt} = \frac{T - T_e}{T_e} g$ 。

已知 γ, γ_d 分别表示环境与气块的干绝热垂直减温率，假设气块初始位置处于平衡，且气块的温度为 T_0 ，在经过一段微小的虚位移 z 后，有：

$$\begin{cases} \bar{T} = T_0 - \gamma_d z \\ \bar{T}_e = T_0 - \gamma z \end{cases} \Rightarrow \bar{T} - \bar{T}_e = (\gamma - \gamma_d) z$$

于是 $\frac{dw}{dt} = g \frac{\gamma - \gamma_d}{T_e} z$ 。根据位温的表达式 $\theta = T_e \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ ，两边取对数再对 z 求偏

导可以得到 $\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{1}{\bar{T}_e} (\gamma_d - \gamma)$ ，那么联立这些式子，就可以得到净浮力的表达式：

$$B = \frac{dw}{dt} = g \frac{\gamma - \gamma_d}{T_e} z = -g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} z = -N^2 z$$

7. 大气各种能量之间的比例关系

(1) 位能与内能的比较

$$\frac{\Phi^*}{I^*} = \frac{\int_0^{p_0} \frac{RT}{g} dp}{\int_0^{p_0} \frac{c_v T}{g} dp} = \frac{R}{c_v} = \frac{287}{717} \approx 0.4$$

(2) 内能、位能与全位能的比较

$$\frac{I^*}{P^*} = \frac{I^*}{I^* + \Phi^*} = \frac{I^*}{I^* + J^*} = \frac{\int_0^{p_0} \frac{c_v T}{g} dp}{\int_0^{p_0} \frac{(c_v + R) T}{g} dp} = \frac{c_v}{c_v + R} = \frac{717}{1004} \approx 0.71$$

$$\frac{\Phi^*}{P^*} = \frac{\Phi^*}{I^* + \Phi^*} = \frac{J^*}{I^* + J^*} = \frac{\int_0^{p_0} \frac{RT}{g} dp}{\int_0^{p_0} \frac{(c_v + R) T}{g} dp} = \frac{R}{c_v + R} = \frac{287}{1004} \approx 0.29$$

(3) 潜热能与全位能的比较

$$\frac{H^*}{P^*} = \frac{\int_0^{p_0} \frac{Lq}{g} dp}{\int_0^{p_0} \frac{(c_v + R) T}{g} dp} = \frac{L\bar{q}}{c_p \bar{T}} = \frac{2.5 \times 10^6 \times 0.02}{1004 \times 250} \approx 0.2$$

(4) 动能与全位能的比较

$$\frac{K^*}{P^*} = \frac{\int_0^{p_0} \frac{V^2}{2} dp}{\int_0^{p_0} \frac{c_p T}{g} dp} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{p_0} V^2 dp}{\frac{c_v}{R} \int_0^{p_0} c_s^2 dp} = \frac{R}{2c_v} \left(\frac{\bar{V}}{c_s} \right)^2 = \frac{R}{2c_v} Ma^2 \approx 4.5 \times 10^{-4} \approx \frac{1}{2000}$$

上式中, $c_s = \sqrt{\gamma RT} \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \approx 1.4 \right)$ 称为绝热声速(拉普拉斯声速), 称 $Ma = \frac{\bar{V}}{c_s}$

为马赫数, 计算的取值为: $\bar{V} = 15 \text{ m/s}, T = 250 \text{ K}$ 。

[注] 关于上述公式的推导过程中的一个详细解释

理想气体的绝热声速满足的关系式为

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -\alpha^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)_s \left(\alpha = \frac{1}{\rho} \text{ 为比体积; 等熵过程} \right)$$

理想气体的绝热方程为 $pV^\gamma = \text{const} \Leftrightarrow p\alpha^\gamma = \text{const} \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} \right)$, 进行全微分展开

$$dp\alpha^\gamma + p\gamma\alpha^{\gamma-1}d\alpha = 0 \Rightarrow \frac{dp}{d\alpha} = -\frac{p\gamma}{\alpha}$$

代入上式, 得到 $c_s^2 = \gamma p\alpha = \gamma RT \Rightarrow c_p T = \frac{c_v}{R} c_s^2$

(5) 有效位能与全位能的比较

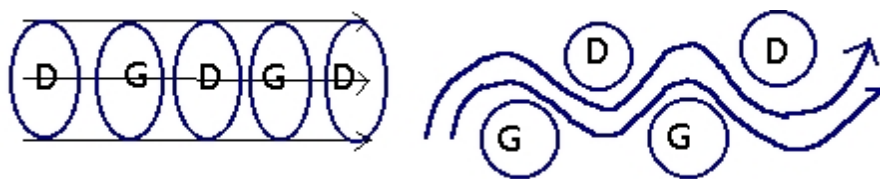
$$\frac{\bar{A}^*}{P^*} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{p_0} \frac{\bar{T}}{\gamma_d - \gamma} \left(\frac{T'}{\bar{T}} \right)^2 dp}{\int_0^{p_0} \frac{c_p T}{g} dp} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\gamma_d}{\gamma_d - \gamma} \left(\frac{T'}{\bar{T}} \right)^2}{\frac{c_p T}{g}} = \frac{1}{2} \times \frac{9.8}{9.8 - 6.5} \times \left(\frac{15}{250} \right)^2 \approx \frac{1}{200}$$

由上式可以得到 $\frac{K^*}{A^*} = \frac{1}{10}$ 。综上, 各能量之间的关系可以概括如下:

- 1) 重力位能与内能的比例固定, 重力位能相当于内能的 40%;
- 2) 全位能中, 内能占 70%, 重力位能占 30%;
- 3) 潜热能占全位能的 20% ;
- 4) 动能与全位能相比很小, 全位能中只有很小一部分(1/2000)转换为动能;
- 5) 有效位能占全位能的 1/200;
- 6) 只有 1/10 的有效位能真正可以转换为动能。

8. 大气的能量循环过程

(1) 大气运动的分解



大气运动=纬向平均运动(“流”)+涡旋运动(“波”)=大气环流+天气系统

把大气的运动分解成沿纬圈的平均运动和叠加在纬向平均运动上的涡动(扰动)运动。相应地, 将动能和有效位能也分解为平均气流的动能和有效位能、涡动动能和有效位能, 并由此得到各种能量形态之间的转换。

大气中任一物理量 A 可以分解为: $A = \bar{A} + A'$, 其中, $\bar{A}$ 代表该物理量沿着整个纬圈的平均值, A' 扰动值(涡动值)。其运算性质如下:

- 扰动值的纬向平均为 0;
- $\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = 0, \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial y}$, 可以理解为, 平均值在纬向分布是均匀的, 在经向上存在疏密的变化。

(2) 纬向(水平)平均动能方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}_h = -\nabla_h \Phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{V}_h + \mathbf{F}_r$$

将 $\mathbf{V}_h = \bar{\mathbf{V}}_h + \mathbf{V}'_h$ 代入, 方程两边求平均, 然后两边点乘 $\bar{\mathbf{V}}_h$, 有

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}_h}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}}_h + \overline{(\mathbf{V}' \cdot \nabla) \mathbf{V}'_h} = -\nabla_h \bar{\Phi} - f \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{V}}_h + \bar{\mathbf{F}}_r$$

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{K} + \bar{\mathbf{V}}_h \cdot \overline{(\mathbf{V}' \cdot \nabla) \mathbf{V}'_h} = -\bar{\mathbf{V}}_h \cdot \nabla_h \bar{\Phi} + \bar{\mathbf{F}}_r \cdot \bar{\mathbf{V}}_h$$

左式第三项称为涡旋运动的动量通量。其它项可进行数学变形

➤ 连续方程: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V}' = 0$

➤ $\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{K} = \nabla \cdot (\bar{K} \bar{\mathbf{V}}) - \bar{K} \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = \nabla \cdot (\bar{K} \bar{\mathbf{V}})$

$$\begin{aligned}
\text{➤ } \overline{\mathbf{V}'_h \cdot (\mathbf{V}' \cdot \nabla) \mathbf{V}'_h} &= \overline{\mathbf{V}'_h \cdot \left(u' \frac{\partial \mathbf{V}'_h}{\partial x} + v' \frac{\partial \mathbf{V}'_h}{\partial y} + \omega' \frac{\partial \mathbf{V}'_h}{\partial p} \right)} = \overline{u' \mathbf{V}'_h \cdot \frac{\partial \mathbf{V}'_h}{\partial x} + v' \mathbf{V}'_h \cdot \frac{\partial \mathbf{V}'_h}{\partial y} + \omega' \mathbf{V}'_h \cdot \frac{\partial \mathbf{V}'_h}{\partial p}} = \overline{u' \left(\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + v' \left(\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \omega' \left(\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial p} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial p} \right)} \\
&= \bar{u} \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{\omega' \frac{\partial u'}{\partial p}} \right) + \bar{v} \left(\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{\omega' \frac{\partial v'}{\partial p}} \right) = \bar{u} \overline{(\mathbf{V}' \cdot \nabla) u'} + \bar{v} \overline{(\mathbf{V}' \cdot \nabla) v'} = \bar{u} \overline{\nabla \cdot (\mathbf{V}' u')} + \bar{v} \overline{\nabla \cdot (\mathbf{V}' v')} \\
\text{➤ } -\overline{\mathbf{V}'_h \cdot \nabla_h \Phi} &= \bar{u} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = \bar{v} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial (\bar{v} \bar{\Phi})}{\partial y} - \bar{\Phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} \right) \\
&= \frac{\partial (\bar{\Phi} \bar{v})}{\partial y} + \bar{\Phi} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = \frac{\partial (\bar{\Phi} \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\Phi} \bar{\omega})}{\partial p} - \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} = \nabla \cdot (\mathbf{V} \bar{\Phi}) + \bar{\alpha} \bar{\omega}
\end{aligned}$$

于是纬向平均动能方程又可以写为

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{K} \mathbf{V}) + \bar{u} \overline{\nabla \cdot (\mathbf{V}' u')} + \bar{v} \overline{\nabla \cdot (\mathbf{V}' v')} = -\nabla \cdot (\mathbf{V} \bar{\Phi}) - \bar{\alpha} \bar{\omega} - \bar{D}$$

同样的，对质量为 M 的闭合系统(全球大气)求积分，得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K} dM = - \int_M \left[\bar{u} \overline{\nabla \cdot (\mathbf{V}' u')} + \bar{v} \overline{\nabla \cdot (\mathbf{V}' v')} \right] dM - \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM - \int_M \bar{D} dM$$

(3) 涡动动能方程

根据 $K = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{V}}_h + \mathbf{V}'_h)^2 = \bar{K} + K' + \bar{\mathbf{V}}_h \cdot \mathbf{V}'_h$ ，两边求平均有 " $\bar{K}$ " = $\bar{K} + \bar{K}'$ 。已知总

动能方程 $\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M \alpha \omega dM + \int_M \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{V}_h dM$ ，将各物理量分解代入

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M (\bar{K} + K') dM = - \int_M (\bar{\alpha} + \alpha') (\bar{\omega} + \omega') dM - \int_M (\bar{\mathbf{F}}_r + \mathbf{F}'_r) \cdot (\bar{\mathbf{V}}_h + \mathbf{V}'_h) dM$$

求平均：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M (\bar{K} + \bar{K}') dM = - \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM - \int_M \bar{\alpha}' \bar{\omega}' dM + \int_M \bar{\mathbf{F}}_r \cdot \bar{\mathbf{V}}_h dM + \int_M \bar{\mathbf{F}}'_r \cdot \bar{\mathbf{V}}'_h dM$$

与纬向平均动能方程作差即可得到涡动动能方程如下

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K}' dM = \int_M \left[\bar{u} \overline{\nabla \cdot (\mathbf{V}' u')} + \bar{v} \overline{\nabla \cdot (\mathbf{V}' v')} \right] dM - \int_M \bar{\alpha}' \bar{\omega}' dM - \int_M \bar{D}' dM$$

(4) 纬向平均有效位能方程

已知热力学方程为 $c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \omega = \dot{Q}$, 令 $T = \bar{T} + T'$, $\bar{T}$ 为纬向平均即南北方向的温度分布, T' 是涡旋系统的温度分布即冷暖中心。方程两边同时除以 T , 将分母上的 T 用全球平均温度 $[T]$ 代替, 得到

$$\frac{c_p}{[T]} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) - \frac{R}{p} \omega = \frac{\dot{Q}}{[T]} (*)$$

定义有效位能为 $A = \frac{1}{2} \frac{c_p}{[T]} T^2$, 则平均有效位能 $\bar{A} = \frac{1}{2} \frac{c_p}{[T]} \bar{T}^2$, 涡动有效位能

$A' = \frac{1}{2} \frac{c_p}{[T]} T'^2$ 。对 (*) 式两边求平均, 并在两边乘以 $\bar{T}$:

$$\frac{c_p}{[T]} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{T} + \overline{\mathbf{V}' \cdot \nabla T'} \right) - \frac{R}{p} \bar{\omega} = \frac{\bar{\dot{Q}}}{[T]}$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{A} + \frac{c_p \bar{T}}{[T]} \overline{\mathbf{V}' \cdot \nabla T'} - \frac{R \bar{T}}{p} \bar{\omega} = \frac{\bar{\dot{Q}} \bar{T}}{[T]}$$

注意到 $\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{A} = \nabla \cdot (\bar{A} \bar{\mathbf{V}})$, $\overline{\mathbf{V}' \cdot \nabla T'} = \nabla \cdot (\overline{T' \mathbf{V}'})$, $\frac{R \bar{T}}{p} = \bar{\alpha}$, 对全球大气积分得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A} dM = - \frac{c_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot (\overline{T' \mathbf{V}'}) dM + \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM + \int_M \frac{\bar{\dot{Q}} \bar{T}}{[T]} dM$$

(5) 涡动有效位能方程

对(*)式两边乘以 T , 得到总有效位能的方程为

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla A - \alpha \omega = \frac{\dot{Q} T}{[T]}$$

采取和涡动能方程一样的求解思路:

$$\frac{\partial (\bar{A} + A')}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}') \cdot \nabla (\bar{A} + A') - (\bar{\alpha} + \alpha') (\bar{\omega} + \omega') = \frac{(\bar{\dot{Q}} + \dot{Q}') (\bar{T} + T')}{[T]}$$

对上述方程求平均后积分, 与纬向平均有效位能方程作差得到涡动有效位能

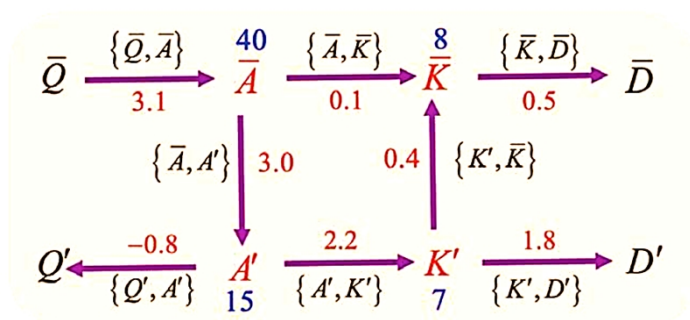
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A}' dM = \frac{c_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot (\bar{T}' \bar{V}') dM + \int_M \bar{\alpha}' \bar{\omega}' dM + \int_M \frac{\bar{Q}' \bar{T}'}{[T]} dM$$

将上述的四个能量方程放在一起有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K} dM &= - \int_M \left[\bar{u} \nabla \cdot (\bar{V}' u') + \bar{v} \nabla \cdot (\bar{V}' v') \right] dM - \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM - \int_M \bar{D} dM \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K}' dM &= \int_M \left[\bar{u} \nabla \cdot (\bar{V}' u') + \bar{v} \nabla \cdot (\bar{V}' v') \right] dM - \int_M \bar{\alpha}' \bar{\omega}' dM - \int_M \bar{D}' dM \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A} dM &= - \frac{c_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot (\bar{T}' \bar{V}') dM + \int_M \bar{\alpha} \bar{\omega} dM + \int_M \frac{\bar{Q} \bar{T}}{[T]} dM \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A}' dM &= \frac{c_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot (\bar{T}' \bar{V}') dM + \int_M \bar{\alpha}' \bar{\omega}' dM + \int_M \frac{\bar{Q}' \bar{T}'}{[T]} dM \end{aligned}$$

从上述的方程可以看出，除了非绝热加热项和耗散项，其余项都在二个不同的方程中各出现一次且符号相反，因此它们是转换项，体现了转换关系。定义符号 $\{a, b\}$ ，它表示表示 a 能量与 b 能量间的转换关系，且如果 $\{a, b\} > 0$ ，表示 a 能量向 b 能量转换(有向的)。由此有性质 $\{a, b\} = -\{b, a\}$ 。那么，上述方程又可以改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K} dM &= \{K', \bar{K}\} + \{\bar{A}, \bar{K}\} - \{\bar{K}, \bar{D}\} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K}' dM &= -\{K', \bar{K}\} + \{A', K'\} - \{K', \bar{D}'\} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A} dM &= -\{\bar{A}, A'\} - \{\bar{A}, \bar{K}\} + \{\bar{Q}, \bar{A}\} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A}' dM &= \{\bar{A}, A'\} - \{A', K'\} - \{A', \bar{Q}'\} \end{aligned}$$



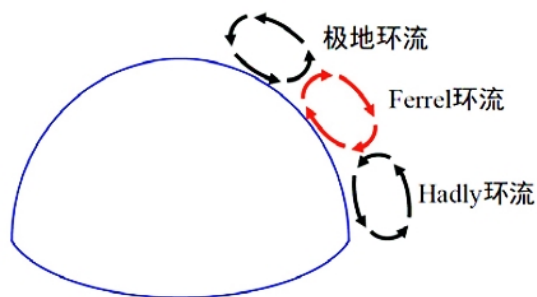
北半球全年平均能量循环

由图可见，对实际大气系统而言，由非绝热加热产生有效位能，有效位能向动能转换，最后摩擦耗散。能量只能按线路走，不能交叉，也不能跳跃。如：平均位能不能直接转化为涡动动能，也不能直接被摩擦耗散掉。

[注] 为了便于区分，将 $\overline{K'}, \overline{A'}$ 写为 K', A' ，但是需要注意的是，我们在推导方程的过程中是对 K', A' 求了平均的。

9. 大气中的能量转换机制

(1) 纬向平均有效位能与平均动能之间的转换—— $\{\overline{A}, \overline{K}\}$



$$\{\overline{A}, \overline{K}\} = - \int_M \overline{\alpha \omega} dM = - \int_M \frac{R}{P} \overline{T \omega} dM$$

① Hadley 环流

又称**正环流、直接环流**。相对暖的空气上升，冷空气下沉，则大气平均质

心降低，全位能减少，即 $\overline{A} \Rightarrow \overline{K}$ 。或者利用公式来判断，Hadley 环流属于暖空气上升、冷空气下沉的情形，根据前面的分析可知(P99)， $\int_M \frac{R}{P} \overline{T \omega} dM < 0$ ，从而

$\{\overline{A}, \overline{K}\} > 0$ ，故为平均位能向平均动能转换(下同)。

② Ferrel 环流

又称**负环流、间接环流**。冷空气上升，暖空气下沉，则大气平均质心升高，平全位能增加，则 $\overline{K} \Rightarrow \overline{A}$ 。

综合来看，高、低纬度(主要是低纬)为平均动能制造区，而中纬为平均动能耗损区，所以动能必须由低纬向中纬输送才能维持全球平均动能的平衡，从而维持大气平均经圈环流。容易知道，平均经圈环流的净作用是 $\bar{A} \Rightarrow \bar{K}$ 。

(2) 涡动有效位能和涡动动能之间的转换—— $\{A', K'\}$

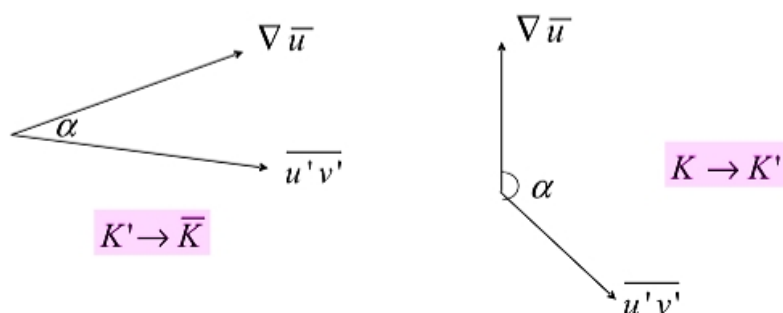
$$\{A', K'\} = - \int_M \overline{\alpha' \omega'} dM = - \int_M \frac{R}{p} \overline{T' \omega'} dM$$

从表达式可以知道， $T' < 0, \omega' > 0$ or $T' > 0, \omega' < 0, \overline{T' \omega'} < 0$ ，从而 $\{A', K'\} > 0$ ， $A' \Rightarrow K'$ ，反之 $K' \Rightarrow A'$ 。我们来从物理意义上来理解。 $\omega' > 0$ 表示下沉运动区， $T' < 0$ 表示系统的温度低于环境的平均温度，代表冷中心，于是 $T' < 0, \omega' > 0$ 可以定性地认为是冷中心有下沉运动、 $T' > 0, \omega' < 0$ 认为是暖中心上升运动，这样的运动形式显然会使得涡动的动能增加(冷暖中心的辐合辐散强度增加，系统的旋转运动加强)

(3) 涡动动能与纬向平均动能之间的转换—— $\{K', \bar{K}\}$

$$\{K', \bar{K}\} = - \int_M \left[\bar{u} \nabla \cdot (\overline{V' u'}) + \bar{v} \nabla \cdot (\overline{V'_h v'}) \right] dM \xrightarrow{|\bar{u}| \gg |\bar{v}|} - \int_M \bar{u} \nabla \cdot (\overline{V' u'}) dM = \int_M \overline{V' u'} \cdot \nabla \bar{u} dM$$

$\overline{u' V'}$ 表示纬向扰动动量的输送， $\nabla \bar{u}$ 表示纬向气流的梯度。上式表明， $\overline{V' u'}$ 与 $\nabla \bar{u}$ 的夹角决定了能量的转换方向，如下图所示：



在 p 坐标系下，该项还可以转化改写为

$$\{K', \bar{K}\} = \int_M \overline{V' u'} \cdot \nabla \bar{u} dM = \int_M \left(\overline{u' v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u' \omega'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right) dM$$

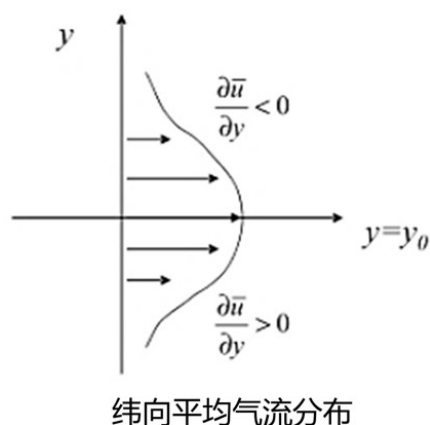
① 水平转换项 $\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$

考虑 $u = u(y)$ ，即正压基本气流情况。正压不稳定的第一必要条件为

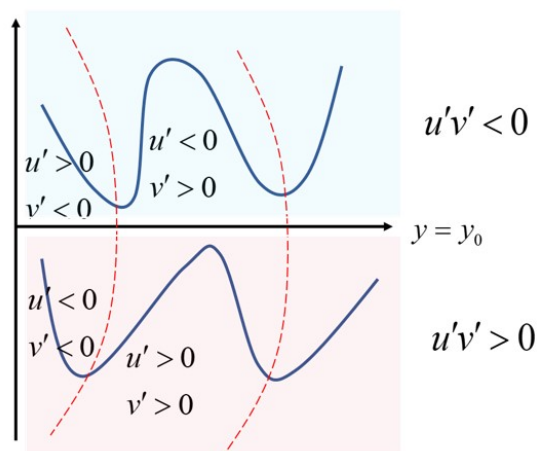
$$\left. \frac{d}{dy} \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right|_{\substack{y=y_c \\ y_c \in [y_1, y_2]}} = 0$$

即在 $y_1 \leq y_c \leq y_2$ 区域的某个地方，绝对涡度必须有极大值或极小值，方能出现正压不稳定(详细内容参见吕美仲《动力气象学》第十二章)。其中 y_1, y_2 分别指两个纬度。由于我们考虑了正压情形，**扰动是否能造成正压不稳定还取决于基本气流的具体分布情况。**

如果槽线呈**西北—东南**向，称为**导式槽**；如果槽线呈**东北—西南**向，称为**曳式槽**，二者统称斜槽。**在绝对涡度极小值所在纬度附近，槽线呈东北—西南向；在绝对涡度极大值所在纬度附近，槽线呈西北—东南向。**



图片制作：蒋斌



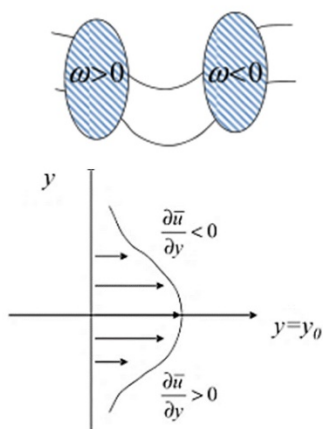
扰动气流分布

此时 $\{K', \bar{K}\} = \int_M \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dM > 0, K' \Rightarrow \bar{K}$ ，此时扰动减弱，正压稳定。

② 垂直转换项 $\overline{u'\omega'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial p}$

考虑 $\bar{u} = \bar{u}(p)$ ，即纯斜压的情形。一般来说，对流层中纬向气流随高度增

大, 有 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} < 0$ 。



槽前: $\omega' < 0$, 槽后: $\omega' > 0$

急流轴以北

槽前: $u' < 0$, 槽后: $u' > 0$

$$\{K', \bar{K}\} = \int_M \bar{u}' \omega' \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} dM < 0, \bar{K} \Rightarrow K'$$

扰动增强, 斜不压稳定

急流轴以南

槽前: $u' > 0$, 槽后: $u' < 0$

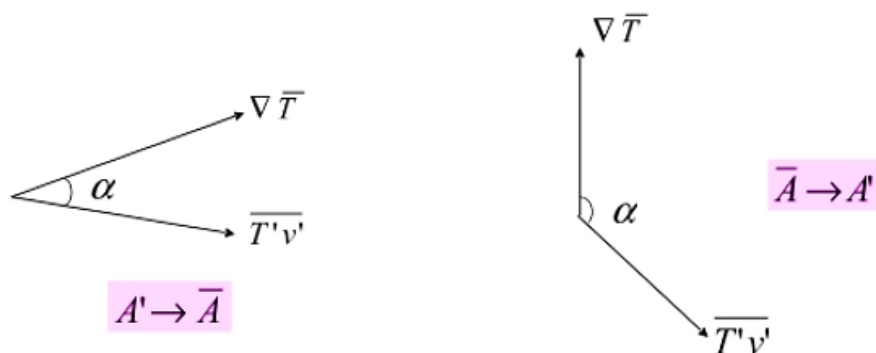
$$\{K', \bar{K}\} = \int_M \bar{u}' \omega' \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} dM > 0, K' \Rightarrow \bar{K}$$

扰动减弱, 斜压稳定

(4) 纬向平均位能与涡动有效位之间的转换—— $\{\bar{A}, A'\}$

$$\{\bar{A}, A'\} = \frac{c_p}{[T]} \int_M \bar{T} \nabla \cdot (\bar{T}' \mathbf{V}') dM = -\frac{c_p}{[T]} \int_M \bar{T}' \mathbf{V}' \cdot \nabla \bar{T} dM$$

其中 $\bar{T}' \mathbf{V}'$ 为纬向扰动热量输送, $\nabla \bar{T}$ 为纬向平均温度梯度, 上式表明, $\bar{T}' \mathbf{V}'$ 与 $\nabla \bar{T}$ 的夹角决定了能量的转换方向, 如下图所示:

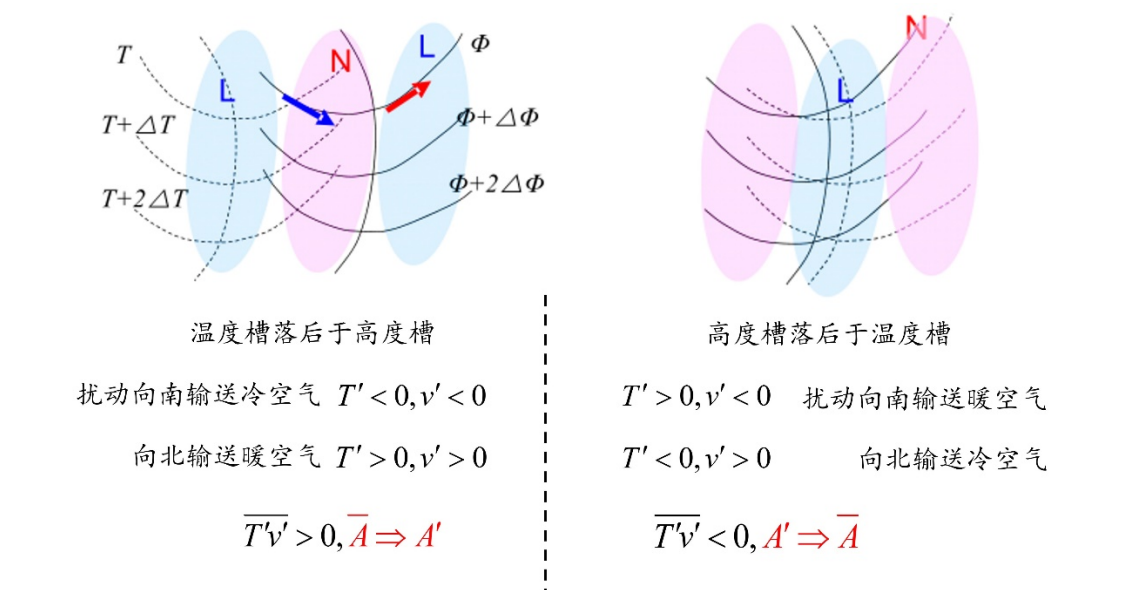


将上式进行改写, 有 $\{\bar{A}, A'\} = -\frac{c_p}{[T]} \int_M \bar{T}' \mathbf{V}' \cdot \nabla \bar{T} dM = -\frac{c_p}{[T]} \int_M \left(\bar{T}' \mathbf{V}' \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{T}' \omega' \frac{\partial \bar{T}}{\partial p} \right) dM$

① 第一项 $\bar{T}' \mathbf{V}' \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$

一般来说, 沿着经线方向, 北边的温度总是低于南边, 所以 $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} < 0$, 而 $\bar{T}' \mathbf{V}'$

表示扰动热量的南北输送，于是有以下两种情况：



② 第二项 $\overline{T'\omega'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial p}$

平均温度随高度增加而减小(随 p 的减小而增大)，所以 $\frac{\partial \bar{T}}{\partial p} > 0$ ， $\overline{T'\omega'}$ 称为**纬向扰动的热量垂直输送**，显然，当扰动使暖空气上升，冷空气下沉时， $\overline{T'\omega'} < 0$ ，此时有 $\bar{A} \Rightarrow A'$ ；当扰动使冷空气上升，暖空气下沉时， $\overline{T'\omega'} > 0$ ，此时有 $A' \Rightarrow \bar{A}$ 。实际大气中常见温压场配置多为**温度槽落后于高度槽**，槽前温度场和流场的配置为：暖空气一边向北运动一边**上升**，槽后温度槽和流场的配置为：空气一边向南运动一边**下沉**。当 $\bar{A} \Rightarrow A'$ 时，有利于槽脊系统的发展。

(5) 纬向平均非绝热加热与纬向平均有效位能的转换—— $\{\bar{Q}, \bar{A}\}$

$$\{\bar{Q}, \bar{A}\} = \int_M \frac{\bar{Q}\bar{T}}{[\bar{T}]} dM$$

$\bar{Q}$ 大，则 $\bar{T}$ 高； $\bar{Q}$ 小，则 $\bar{T}$ 低，即 $\bar{Q}$ 与 $\bar{T}$ 呈现正相关，所以 $\{\bar{Q}, \bar{A}\} > 0$ ，故始终有 $\bar{Q} \Rightarrow \bar{A}$ 。在低纬：得到 > 失去；高纬：得到 < 失去。在赤道是对暖区加热，在极地是对冷区冷却。非绝热加热，会使得热带更热，极地更冷，温差更大， $\bar{A}$ 增大，此过程是**维持大气运动的主要能源**。

(6) 扰动有效位能与扰动非绝热加热的转换—— $\{A', Q'\}$

$$\{A', Q'\} = - \int_M \frac{\overline{\dot{Q}'T'}}{[T]} dM$$

扰动非绝热加热主要由**辐射决定**，**大气向空间的辐射随温度升高而增大**。温度高于平均值的地方($T' > 0$)，向外辐射大，即有非绝热冷却 $\dot{Q}' < 0$ ，所以 $\{A', Q'\} > 0$ ， $A' \Rightarrow Q'$ ，这一项是**能量的耗散项**。

(7) 纬向动能的摩擦消耗项—— $\{\overline{K}, \overline{D}\}$

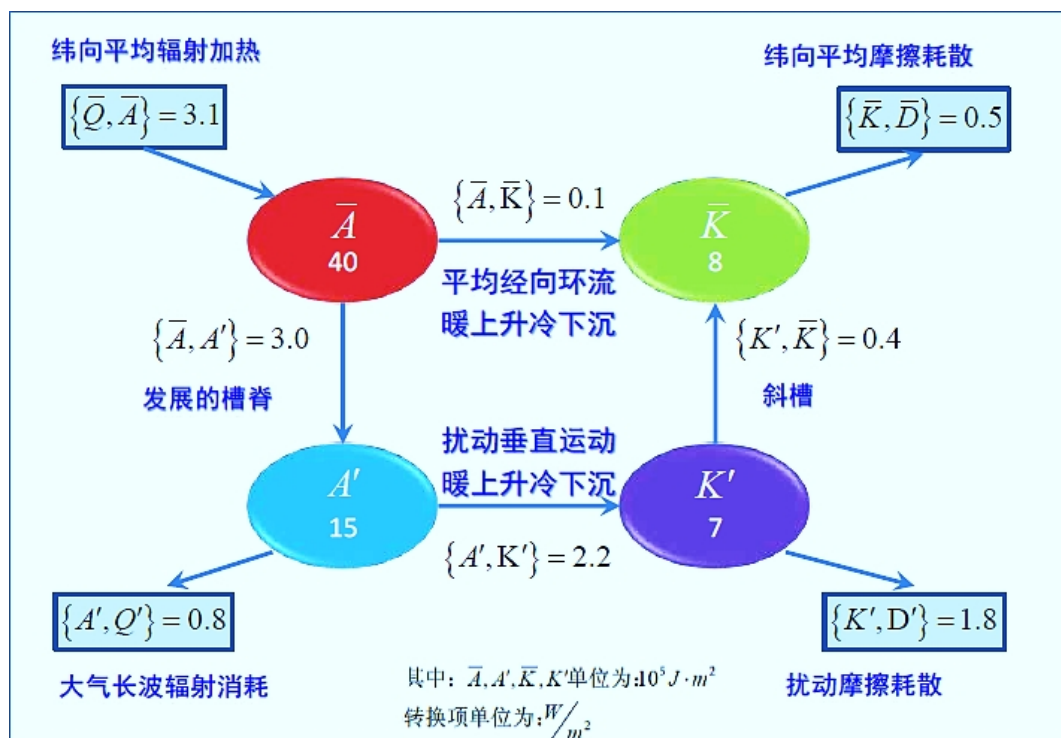
$$\{\overline{K}, \overline{D}\} = - \int_M \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{F}_r dM$$

摩擦力总是与阻碍物体运动，所以 $\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{F}_r < 0$ ，故有 $\overline{K} \Rightarrow \overline{D}$

(8) 涡动动能的摩擦消耗项—— $\{K', D'\}$

$$\{K', D'\} = - \int_M \mathbf{V}_h' \cdot \mathbf{F}_r' dM$$

10. 大气能量转换的观测事实



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{K} dM = \{K', \bar{K}\} + \{\bar{A}, \bar{K}\} - \{\bar{K}, \bar{D}\}$$

将上述的四个式子相加有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M K' dM = -\{K', \bar{K}\} + \{A', K'\} - \{K', D'\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M (\bar{K} + K' + \bar{A} + A') dM$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \bar{A} dM = -\{\bar{A}, A'\} - \{\bar{A}, \bar{K}\} + \{\bar{Q}, \bar{A}\}$$

$$= -\{\bar{K}, \bar{D}\} - \{K', D'\} + \{\bar{Q}, \bar{A}\} - \{A', Q'\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M A' dM = \{\bar{A}, A'\} - \{A', K'\} - \{A', Q'\}$$

就长期平均而言, 大气总能量的变化很小, 故总能量的变化近似为零, 意味着:

$$\{\bar{Q}, \bar{A}\} = \{\bar{K}, \bar{D}\} + \{K', D'\} + \{A', Q'\}$$

纬向平均加热产生的纬向平均有效位能补偿了右边三项能量的消耗。

参考资料

- [1] [大气能量学](#)
- [2] [【精品】第2章 大气能量学](#)
- [3] [比热容比的声速测量方法](#)
- [4] [《动力气象学》第6章大气能量学](#)
- [5] [南京大学动力气象 Chap7](#)

第八章 大气中的基本波动

1. 波动的定义

大气中的运动可看成是各种**不同频率**和**不同振幅**的简谐波的**叠加**。自然界中常有一些物体在它们的平衡位置附近往复运动，即为振动。**最简单、最基本的振动形式是简谐振动(周期性)**，简谐振动在空间的传播即为简谐波。

[注] 关于波动的理解

- (1) 波的传播过程应是**波源振动**状态即**相位**的传播过程；
- (2) 振源得以持续振动是外界不断输入能量所致，因而波动也是**能量的传播**过程；
- (3) **质点并未“随波逐流”**，各质点**仅在自身平衡位置附近**做同频率、同方向的振动，只是各质点的振动相位随波到达的先后而沿波的传播方向依次落后，因而**波动是各质点保持一定相位联系的集体振动**。

2. 描述波动过程的物理参量

(1) 波长 L

同一波线上相邻两个相位差为 2π 的质点之间的距离，即波源做一次全振动，波前进的距离。也可以理解为相邻两波峰或者波谷的距离。**波长反映了波的空间周期性**。

[全振动]

物体的运动状态(位置、速度、加速度)，从某一时刻起到再次恢复到与该时刻相同状态所经历的过程。

(2) 周期 T

波前进一个波长(完成一次全振动)所需的时间。**周期表征了波的时间周期性**。

(3) 频率 f

单位时间内完成全振动的次数(单位时间内，波前进距离中完整波的数目)，即 $f = \frac{1}{T}$ 。

(4) 波速 c

振动状态在媒质中的传播速度。 $c = \frac{L}{T} = fL$

(5) 圆频率(角频率) ω

单位时间内位相角变化了多少个 2π , $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

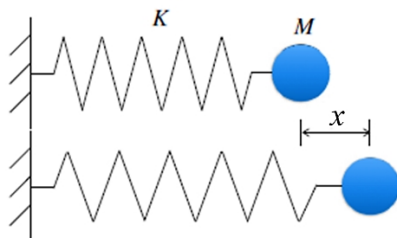
(6) 波数 k

2π 距离内所含波长为的波的数目, $k = \frac{2\pi}{L}$

[注] 关于波数的其他定义

除上述定义外, 还有 $k = \frac{1}{L}$, 即波数为波长的倒数, 具体用哪一种, 要看在什么领域, 比如在光谱学里用的是波长倒数的定义。

(7) 简谐振动方程



以弹簧振子为例, 如上图, K 为比例系数, 通过受力分析, 由牛顿第二定律有:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -\frac{Kx}{M} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \left(\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \right)$$

上述方程为二阶常系数线性齐次微分方程, 特征解为 $r = \pm i\omega$, 从而通解

$$f(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t - \alpha)$$

- **振幅 A :** 质点离开平衡位置的最大位移;
- **位相 $\theta = \omega t - \alpha$:** 决定了各个时刻的位移, $t=0$ 时称为初位相。

3. 简谐波波动方程及有关性质

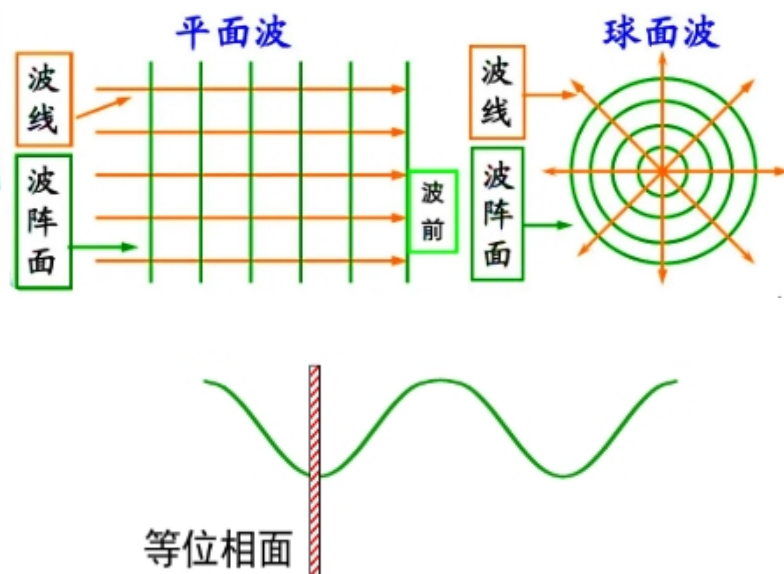
简谐振动在空间的传播形成了简谐波动。

- 一维情形: $f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$
- 二维情形: $f(x, y, t) = A \cos(kx + ly - \omega t)$
- 三维情形: $f(x, y, z, t) = A \cos(kx + ly + mz - \omega t)$

其中 k, l, m 分别表示 x, y, z 方向上的波数。

(1) 相速度

一维简谐波方程为 $f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$ ，其中位相 $\theta = kx - \omega t + \alpha$ ，称 $\theta = \text{const}$ 的点构成的面为等位相面。等位相面是平面，称为平面波(如重力表面波)；等位相面是球面，称为球面波(如电磁波)。



对于 $f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha)$ ，其等位相面与 x 轴垂直。等位相面沿着 x 方向的移动速度称为相速度。它反应了波的廓线移动速度。设等位相面经过 Δt 传播了距离 Δx ，根据等位相面的公式有

$$k\Delta x - \omega\Delta t = 0 \Rightarrow c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

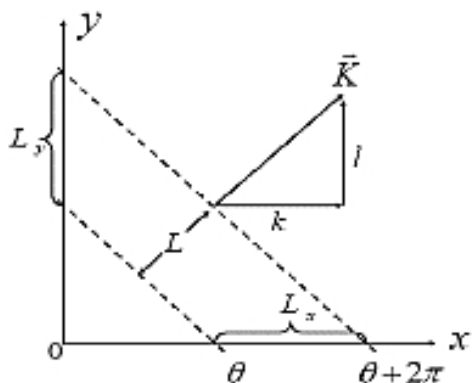
对于高维情况，以三维情形 $f(x, y, z, t) = A \cos(kx + ly + mz - \omega t)$ 为例，位相 $\theta = kx + ly + mz - \omega t$ ，显然有关系式

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}, k = \frac{\partial \theta}{\partial x}, l = \frac{\partial \theta}{\partial y}, m = \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

定义波数矢量 $\mathbf{K} = k\mathbf{i} + l\mathbf{j} + m\mathbf{k} = \nabla \theta$ ，同一维一样，波矢垂直于等位相面，其模称为全波数 $K = |\mathbf{K}| = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$ ，设位置矢量 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，此时的等位相面可以表示为

$$\theta = \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t$$

于是相速度为 $\mathbf{c} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{\theta=\text{const}} = \frac{\omega}{\mathbf{K}} = \frac{\omega}{K^2} \mathbf{K}$



以二维为例，如左图所示，利用面积相等，可以得到关系式：

$$L = \frac{L_x L_y}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}$$

若记波动传播方向的单位矢量为

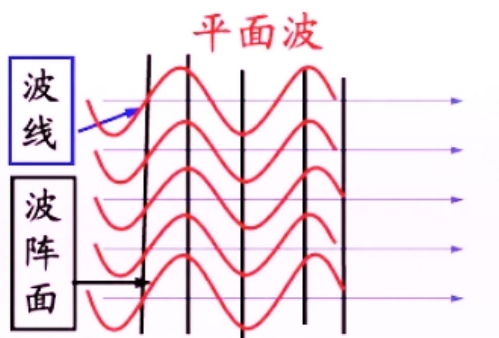
$$\frac{\mathbf{K}}{K} (\mathbf{K} = k\mathbf{i} + l\mathbf{j}), \text{ 于是有相速度矢量}$$

$$\mathbf{c} = \frac{L}{T} \frac{\mathbf{K}}{K} = \frac{\omega}{K^2} \mathbf{K}$$

需要指出的是，值得注意的是， $\mathbf{c}$ 在 x, y 方向的分量 c_x, c_y 一般情形下并不等于 c_{px}, c_{py} ，故相速矢量 $\mathbf{c}$ 并不具有运动速度矢量那样的特性。

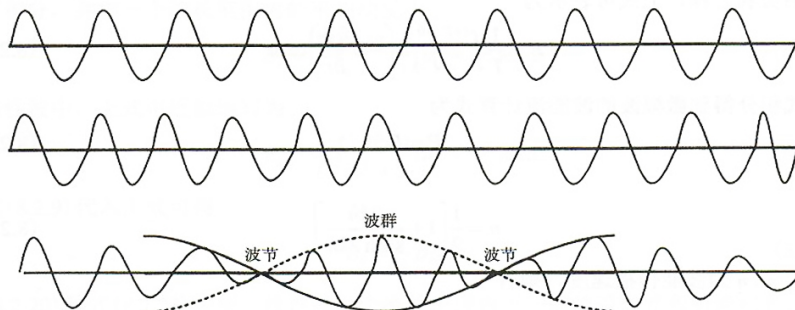
[补充概念]

- ① 波面(波阵面)：同一时刻，介质中处于振动状态相同的质点所构成的面叫做波面，因此波面又称为等位相面；
- ② 波线：用来表示波的传播方向、与波面垂直的线叫做波线。



(2) 群速度与波的频散

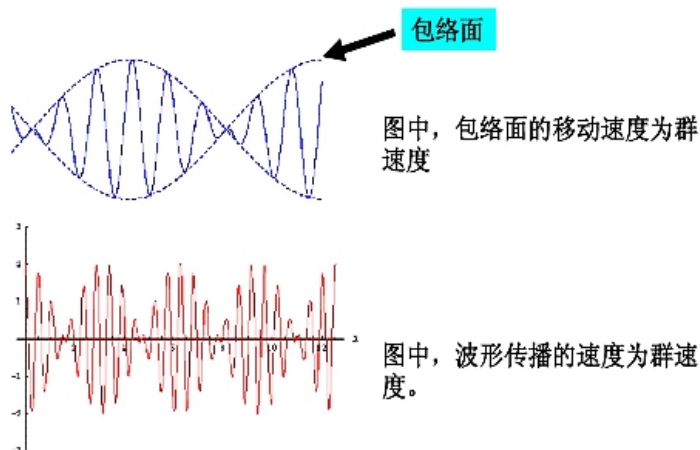
对于单波，它们具有一定振幅、一定频率和一定波长，在时间和空间都是无限的波动。若各种单色波叠加，若振幅加强，则相互增长；若振幅减弱，则相互抵消，所以其振幅随时间和空间改变，这样的波称为群波。



假设有两列波高相同、波周期略有差异的正弦波

$$\begin{cases} f_1(x, t) = A \cos \left[\left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right] \\ f_2(x, t) = A \cos \left[\left(k - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right] \end{cases} \quad (\Delta k \ll k, \Delta \omega \ll \omega)$$

它们叠加后，为 $f(x, t) = f_1 + f_2 = 2A \cos(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$



可以看到，群波是两种波动的乘积，一种是**高频载波**，其波数、圆频率与各单谐波相近；另一种是**低频调制波动**，其波数、圆频率远小于各单谐波的。它是高频载波的“范围线”，该“范围线”也称为包络线或波包。波包是高频载波最大振幅点的连线。波群中等振幅点的移速称为群速度，用符号 c_g 表示。它可以理解为波包的移速，群速度也表示群波的能量传播速度。

由定义可以知道，群速度的表达式为 $c_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ ，取极限，得到群速

度的数学表达式为 $c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}$ 。若相速度与波数无关(不依赖于波

数)，则 $\frac{dc}{dk} = 0 \Rightarrow c_g = c$ ，即群速度与相速度相等，它表示波的能量随高频载波一

起移动，因而能量不频散，称为非频散波。反之，如果相速度与波数有关，则波群能量的传播速度就与高频载波的不一致，此现象称为频散现象，对应的波称为频散波。

4. 简谐波的复数表示

已知欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，于是波函数可表示为

$$f(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{i(kx - \omega t + \alpha)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ F e^{i(kx - \omega t)} \right\} \quad (F = A e^{i\alpha})$$

其中 $F = A e^{i\alpha}$ 称为复振幅。实际应用中常略去符号“Re”，这样，复数的实部对应为真实的振动量。使用复数的优越之处是：求导、积分十分方便。

5. 小扰动法处理波动问题——非线性方程的线性化

(1) 基本思想

① 把表征大气状态的任一场变量 f 看成是由已知的基本场变量 $\bar{f}$ 和叠加在其的

扰动量 f' 组成的，即设 $f = \bar{f} + f'$ ；

② 基本场变量表征大气的基本运动状态，它满足基本方程和边界条件；

③ 假设扰动量 f' 充分小，扰动量和其改变量都是小量，其二次以上乘积项可以略去不计。

[注]

① 对于两个表征大气性质的物理量 A, B ，两个未知函数项乘积 AB 为一非线性项，按小扰动法思想，设 $A = \bar{A} + A', B = \bar{B} + B'$ ，其中基本量 $\bar{A}, \bar{B}$ 满足基本方程，于是

$$AB = (\bar{A} + A')(\bar{B} + B') = \bar{A}\bar{B} + \underbrace{\bar{A}B' + A'\bar{B}}_{B', A' \text{ 的线性项}} + A'B' \leftarrow \text{非线性的二阶小量, 可忽略}$$

- ② 对微扰法中的“扰动量充分小”的理解：对于热力学变量，是指扰动量远小于基本量，即 $|\rho'| \ll \bar{\rho}, |p'| \ll \bar{p}, |T'| \ll \bar{T}$ ；而对于运动学变量 u, v, w ，是指 u', v', w' 自身很小，因为 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 可以取 0；若扰动是波动，则理解为波动的振幅相对于波长甚小。
- ③ 基本量的取法，要根据具体的研究问题。对于静止气流，取 $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$ ；沿纬圈平均的速度场，取 $\bar{u} = \text{const}, \bar{v} = \bar{w} = 0$ ；而在考虑大气的斜压性时，取 $\bar{u} = u(y, z), \bar{v} = \bar{w} = 0$ ；
- ④ 在这里要与大气能量学中的平均加以区分。上一章用到的平均为空间平均(纬向平均)，本章涉及的基本场的平均为时间平均。由于地球大气最基本的运动是纯纬向轴对称运动，故可设基本量为纬圈平均量——这样一些基本量就仅为 y, z 的函数了。
- ⑤ 微扰动法只适用于天气系统发展的初始阶段，在发展旺盛期和锢囚阶段都不能使用。此外，微扰动法只适用与小振幅波的讨论，对于有限振幅波此法失效，因为对于有限振幅的扰动，这时不满足 $|A'| \ll \bar{A}$ ，扰动量的二次以上乘积项不能作为高阶小量忽略，非线性项重要。

(2) 基本方程组的线性化

已知绝热无摩擦的局地直角坐标系下基本方程组为：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial \ln \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \ln \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} = 0 \\ \theta = \frac{p}{\rho R} \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \end{cases}$$

根据前面的假定，我们将各物理量可以设成：

$$\begin{cases} u = \bar{u}(\text{const}) + u', v = v', w = w' \\ p = \bar{p}(y, z) + p', \rho = \bar{\rho}(y, z) + \rho', \theta = \bar{\theta}(y, z) + \theta' \end{cases} (*)$$

代入上述方程，可以得到基本量的方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0, f\bar{u} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - g = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = 0, \bar{\theta} = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho} R} \left(\frac{p_{00}}{\bar{p}} \right)^{\frac{R}{c_p}} \end{cases}$$

上式表明：基本运动状态是定常的，在水平方向上满足地转风平衡，在垂直方向上满足静力平衡。

将(*)式代入原始方程组中，经过线性化后的方程如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - f v' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} f \bar{u} \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + v' \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial y} + w' \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\theta'}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \end{cases}$$

[注] 推导提示

① 压强项的推导

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^{-1} \xrightarrow{\text{一阶Taylor展开}} \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)$$

$$\text{所以 } \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \cancel{\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \quad (x_j = x, y, z)$$

② 热力学参量的推导方法

$$\ln(\bar{\theta} + \theta') = \ln \left[\bar{\theta} \left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) \right] = \ln \bar{\theta} + \ln \left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) \quad \ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$$

6. 声波和兰姆波

(1) 声波

声波又称压缩波、弹性波，它是由于流体的可压缩性产生的。当流体某部分受扰动而产生压缩或膨胀，则其周围流体也会依次被压缩或膨胀，这种疏密程度的扰动在流体中的传播即声波，故声波是因流体中辐散场引起的交替绝热膨胀或者压缩而转播的，显然声波是一种纵波。

做如下的简化假设：

- 不考虑科氏力
- 仅考虑沿 x 方向的传播

于是可以写出其线性方程组如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) = 0 \\ \frac{\theta'}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \end{cases} \xrightarrow{\text{第四式代入第三式}} \begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} - \gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

设波动解 $\begin{pmatrix} u' \\ \rho' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ \Pi \\ P \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)}$ ，代入上式，注意到 $\frac{\partial}{\partial t}(\) = -i\omega(\)$ ， $\frac{\partial}{\partial x}(\) = ik(\)$

$$\begin{cases} -(\omega - \bar{u}k)U + k/\bar{\rho} \cdot P = 0 \\ -(\omega - \bar{u}k)\Pi + \bar{\rho}kU = 0 \\ -(\omega - \bar{u}k)P + c_s^2(\omega - \bar{u}k)\Pi = 0 \end{cases} \quad \left(c_s = \sqrt{\gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}} = \sqrt{\gamma R \bar{T}} \right)$$

要使上述关于 U, Π, P 的方程有非零解，由线性代数

$$\begin{vmatrix} -(\omega - \bar{u}k) & 0 & k/\bar{\rho} \\ \bar{\rho}k & -(\omega - \bar{u}k) & 0 \\ 0 & c_s^2(\omega - \bar{u}k) & -(\omega - \bar{u}k) \end{vmatrix} = 0$$

展开后，有 $(\omega - \bar{u}k) \left[(\omega - \bar{u}k)^2 - \gamma R \bar{T} k^2 \right] = 0$ ，两个解为

$$\begin{cases} \omega = \bar{u}k \\ \omega = \bar{u}k \pm k\sqrt{\gamma R \bar{T}} \end{cases}$$

显然第一个解没有意义，因为代入后有 $P = 0, U = 0, \Pi =$ 任意数，显然这是不符合实际的。因此声波的频率为 $\omega = \bar{u}k \pm k\sqrt{\gamma R \bar{T}}$ ，于是可以得到其相速度和群速度：

$$c = \frac{\omega}{k} = \bar{u} \pm \sqrt{\gamma R \bar{T}}; c_g = \frac{d\omega}{dk} = \bar{u} \pm \sqrt{\gamma R \bar{T}}$$

由此可见，**声波是非频散波**。已知 $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4, R = 287 J / (K \cdot kg)$ ，取 $\bar{T} = 273 K$ ，

则可以得到声速 $c = (10 \pm 331) m/s$ ，可见， $c \gg \bar{u}$ ，所以**声波是一种“快波”**，其频率 ω 大约在 $20 \sim 20000 Hz$ 之间，波长为 $0.015 \sim 15 m$ 之间，大气声波对天气的影响是微不足道的，可以滤去。此外，声波是多向传播的波动。

▲ 可以滤去声波的条件

- 1) 假定大气是不可压缩的；
- 2) 假定大气运动是水平无辐散的(或准地转的),则可排除声波在水平方向的传播；
- 3) 假定大气在垂直方向处于静力平衡，即满足准静力条件，则可排除声波在垂直方向的传播；
- 4) 假定大气是非弹性的；

(2) 兰姆波

空气微团做水平运动，**位温无扰动**，水平尺度较大，**准静力平衡成立**，同时**考虑地球自转作用**的可压缩流体中产生的一种**只在水平方向传播**的声波。

根据上述定义，取静止大气为基本气流，可以得到兰姆波的扰动方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'}{\partial t} - f_0 v' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g = 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} = 0; \quad \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = 0 \end{array} \right. \xrightarrow[\rho' = \frac{p'}{c_s^2}]{\text{消去 } \rho', \text{ 令 } \pi' = \frac{p'}{\bar{\rho}}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'}{\partial t} - f_0 v' + \frac{\partial \pi'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' + \frac{\partial \pi'}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \pi'}{\partial t} + c_s^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \\ -\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{c_s^2} p' = 0 \end{array} \right.$$

联立上述方程的前三式，采用“算子行列式”法：

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -f_0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ f_0 & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial y} \\ c_s^2 \frac{\partial}{\partial x} & c_s^2 \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + f_0^2 \right]$$

关于微分算子法，参考：[微分算子法_百度百科 \(baidu.com\)](http://baike.baidu.com)

不妨设密度的波动解为 $\pi' = \Pi e^{i(kx+ly-\omega t)}$ ，将上述算子作用于该解上，有

$$\omega(\omega^2 - c_s^2(k^2 + l^2) - f_0^2) = 0$$

显然，合理的解只有 $\omega = \pm \sqrt{c_s^2(k^2 + l^2) + f_0^2}$ ，假设只考虑一维情形，有

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{c_s^2 + \frac{f_0^2}{k^2}}, c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_s^2}{\sqrt{c_s^2 + \frac{f_0^2}{k^2}}}$$

由表达式，可以得到 $c > c_s, c_g < c_s$ ，**即兰姆波的相速度大于绝热声速，是快波型波动；其相速度依赖于波数，所以兰姆波是频散波；由于群速度(能量传播方向)比相速度小，所以扰动能量穿过等位相面向后传播。**

方程组中, 还有一个垂向的方程, 下面讨论兰姆波各扰动量在垂向上的变化。

假定 c_s 为常数, 设 $p' = P(z)e^{i(kx+ly-\omega t)}$, 代入 $\frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{g}{c_s^2} p'$ 做积分, 有

$$P(z) = P(0)e^{-\frac{g}{c_s^2}z} \quad (z=0, P(z) = P(0))$$

上式表明: **扰动气压的振幅随高度呈指数减小; 如果地面无气压扰动($P(0)=0$),**

则 $p'=0$, 所以兰姆波是一种外波(决定于外部条件)。我们再来探讨扰动速度的铅

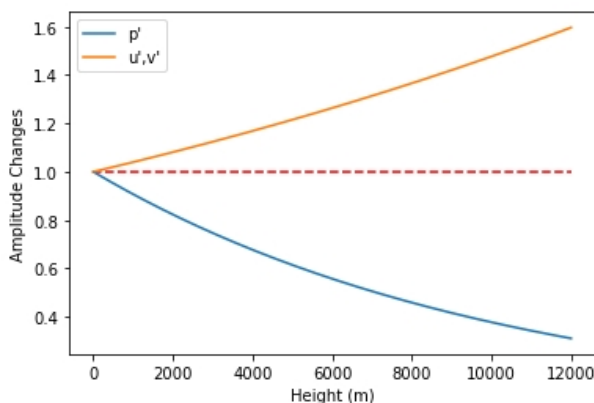
直变化。由方程组可知, u', v', π' 的解的形式相同, 前面已经求出了 p' , 不妨求

出 $\bar{\rho}$, 进而求 π' 。基本量同样满足静力平衡方程

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g \xrightarrow{\bar{p} = \bar{\rho}RT} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\frac{g}{RT}\bar{\rho}$$

积分上式, 有 $\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}(0)e^{-\frac{g}{RT}z}$, 于是 π' 的振幅为 $\frac{P(0)}{\bar{\rho}(0)}e^{\frac{g}{c_s^2}(\gamma-1)z}$, 而 $\gamma-1 > 0$, 所

以 u', v', π' 的振幅高度是增大的。



[注] 该图绘制的是 p' (蓝色线) 和 u', v' (橙色线) 在垂向上的振幅变化因子, 即

$e^{-\frac{g}{c_s^2}z}$, $e^{\frac{g}{c_s^2}(\gamma-1)z}$ 随着高度的变化情况(其中 $c_s=317m/s$), 可以看到, 扰动气压随着高度确实有指数减小的趋势, 但是, 扰动速度并不是像课本上所说“随高度几乎不变”, 所以笔者觉得课本的表述不太严谨。

7. 大气中的外波

流体自由面(密度不同流体的交界面)上的扰动是通过个别流体柱中水平辐合辐散交替变化得以传播的。因此,这种波动中位势运动是重要的。在波动过程中流体振动方向与传播方向相垂直,这是一种横波,而且是多向传播的。实际大气没有自由面,在讨论动力过程时,经常把大气简化为均质大气,便具有了自由面。在大气自由面上会产生类似于流体中的表面重力波。

(1) 重力外波

由于边界上的垂直扰动,而在重力作用下产生的大气波动。在求解其数学模型前,做如下的假设:

- ① 均质不可压,且具有自由表面——滤去重力内波、声波;
- ② 静力平衡——滤去垂直向声波;
- ③ 不计科氏力的作用——滤去惯性波、大气长波;
- ④ 波动是一维的,运动限制在 $x-z$ 平面内 ($v=0$)——滤去水平横波;
- ⑤ 考虑均一的西风背景流。

根据上述的假设,我们有

$$\rho' = 0, \bar{\rho} = \rho_0 (\text{const}), f = 0, \bar{v} = \bar{w} = v' = 0, u' \neq 0, w' \neq 0, \bar{u} \neq 0$$

代入我们前面推出的线性化方程组中,有

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \lambda \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{运动学边界条件:} \begin{cases} z = 0, w' = 0 \text{ (下边界为刚壁)} \\ z = H_0, \frac{dp}{dt} = 0 \text{ (} H_0 \text{ 为自由面高度)} \end{cases}$$

对于上边界,有 $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}$, 按假设进行线性化处理后,得到

$$z = H_0, \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} - \rho_0 g w' = 0$$

此外, λ 表示“示踪系数”,只能取 0 或 1,用来表征垂向是否满足静力平衡。

设波动解为 $\left[u', v', \frac{p'}{\rho_0} \right] = [U(z), W(z), P(z)] e^{i(kx - \omega t)}$, 方程与边界条件改写为:

$$\begin{cases} (\bar{u}k - \omega)U = -kP \\ i\lambda(\bar{u}k - \omega)W = -\frac{dP}{dz} \left(\begin{array}{l} \text{三联方程组} \\ \text{而非 } U, P, W \text{ 的代数方程组} \end{array} \right) \begin{cases} z=0, W=0 \\ z=H_0, i(\bar{u}k - \omega)P - gW = 0 \end{cases} \\ ikU + \frac{dW}{dz} = 0 \end{cases}$$

消去 U, P ，得

$$\frac{d^2W}{dz^2} - \lambda k^2 W = 0 \quad \begin{cases} z=0, W=0 \\ z=H_0, \frac{dW}{dz} - \frac{k^2}{(\bar{u}k - \omega)^2} gW = 0 \end{cases}$$

➤ $\lambda=0$ ——静力平衡过程

于是方程为 $\frac{d^2W}{dz^2} = 0$ ，通解为 $W = Az + B$ ，由边界条件，得关系式

$$\frac{(\bar{u}k - \omega)^2}{k^2} = gH_0 \Leftrightarrow c = \frac{\omega}{k} = \bar{u} \pm \sqrt{gH_0} \quad (\lambda=0)$$

考虑均质大气，由静力平衡关系 $gH_0 = \frac{\bar{p}}{\rho_0} = R\bar{T}$ ，所以 $c = \bar{u} \pm \sqrt{R\bar{T}}$ ，其中 $\sqrt{R\bar{T}}$

称为等温声速(牛顿声速)。由上述关系式，得到如下结论

- 相速度与波长无关，所以静力平衡下的**重力外波是非频散波**；
- 取 $\bar{T} = 273K$ ，可求得相速度 $c = (10 \pm 280)m/s$ ，接近声速，为**快波型波动**；
- 由上面的推到可得

$$\begin{cases} W = Az \\ U = -\frac{1}{ik} \frac{dW}{dz} = -\frac{i}{k} A = -e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{A}{k} \end{cases}$$

故垂直速度扰动的振幅 W 随 z 线性增加，但是水平速度扰动的振幅为常数，且 u', v' 之间有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差。

➤ $\lambda=1$ ——非静力平衡过程

此时方程的通解为 $W = Ae^{kz} + Be^{-kz}$ ，由边界条件，有关系式

$$\frac{(\bar{u}k - \omega)^2}{k^2} = \frac{g}{k} \tanh(kH_0) \Leftrightarrow c = \frac{\omega}{k} = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kH_0)} (\lambda = 1)$$

- 采取短波近似——Stokes 深水重力波相速度

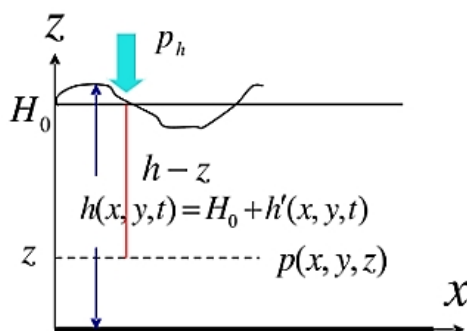
$$kH_0 = \frac{2\pi H_0}{L} \rightarrow \infty \Leftrightarrow H_0 \gg L (\text{Deep-Water}) \Rightarrow \tanh(kH_0) \rightarrow 1 \Rightarrow c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{g}{k}}$$

- 采取长波近似——Lagrange 浅水重力波相速度

$$kH_0 = \frac{2\pi H_0}{L} \rightarrow 0 \Leftrightarrow H_0 \ll L (\text{Shallow-Water}) \Rightarrow \tanh(kH_0) \rightarrow kH_0 \Rightarrow c = \bar{u} \pm \sqrt{gH_0}$$

可以发现，这正是静力平衡下的重力外波，所以 $L \gg H_0$ 是静力平衡的充分条件，这就是说，静力平衡对应于长重力波，也就是浅水波。

(2) 重力惯性外波



考虑的假设条件：均质不可压、具有自由面、满足静力平衡、受科氏力影响。

设自由面为 $z = h(x, y, t)$ ，静力平衡方程为 $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g$ ，两边积分有

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\int_z^h \rho_0 g dz \Leftrightarrow p = p_h + \rho_0 (h - z) g$$

假设自由面的 $p_h = \text{const}$ ，于是我们可以得到： $-\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p = -g \nabla_h h$ 。对于连续方

程 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ，同样做积分有

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz \Leftrightarrow h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w \Big|_{z=0}^{z=h}$$

根据边界条件，有

$$z=0, w=0; z=h, F=h(x, y, t)-z, \frac{dF}{dt}=0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - w = 0$$

代入上述方程中有 $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0$ 。同时，根据 $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0$,

可推知水平压强梯度力不随高度变化，因此，我们假设初始时刻水平速度与高度无关，则任意时刻水平速度也和高度无关。综上可以得到重力惯性外波的控制方程组——**浅水方程组(正压原始方程组)**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = fv - g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

假设基本状态静止，即令 $u=u', v=v', h=H_0+h'$ ，其中 H_0 为静止状态下液体的自由面高度，采用 f 平面近似，代入上述方程组中可以得到扰动线性方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} = f_0 v' - g \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} = -f_0 u' - g \frac{\partial h'}{\partial y} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + H_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

采用算子行列式法，有

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -f_0 & g \frac{\partial}{\partial x} \\ f_0 & \frac{\partial}{\partial t} & g \frac{\partial}{\partial y} \\ H_0 \frac{\partial}{\partial x} & H_0 \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t^2} - g H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + f_0^2 \right]$$

进一步设波动与 y 无关，设 $h' = h_0 e^{i(kx - \omega t)}$ ，代入上式，得到

$$\omega(\omega^2 - gH_0k^2 - f_0^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm \sqrt{gH_0k^2 + f_0^2} \\ c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH_0 + \frac{f_0^2}{k^2}} \\ c_g = \frac{d\omega}{dk} = gH_0 / \sqrt{gH_0 + \frac{f_0^2}{k^2}} \end{cases}$$

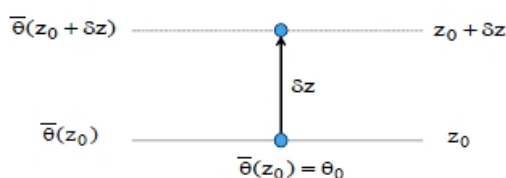
显然，重力惯性外波是一种频散波，而且，当 k 足够大的时候——也即波长足够短，对应为中小尺度运动，那么科氏力的作用可以忽略， $f_0=0$ ，此时的情况就是纯重力外波的情形。

▲ 滤去重力外波的条件

- a) 固定上下边界；
- b) 假定大气是水平无辐散的；
- c) 假定大气运动是水平的；
- d) 假定大气运动是准地转的。

8. 重力内波

(1) 重力内波的形成机制——浮力振荡



采用“气块法”可以导出浮力振荡的频率。设想一气块受扰离开了平衡位置($z=z_0$)，在铅直方向上的微小位移为 δz ，这一过程是**绝热和准静态**的，如上图所示。于是铅直方向上的动力学方程为

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

根据准静态过程，气块移动过程中其压强始终与环境气压平衡，且环境大气也满足静力平衡，所以 $\frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g$ (加了一“-”的表示环境大气的要素)，代入上

式有: $\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = g \frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho}$ 。根据位温的表达式有 $\frac{\bar{\rho}}{\rho} = \frac{\theta}{\bar{\theta}}$, 所以

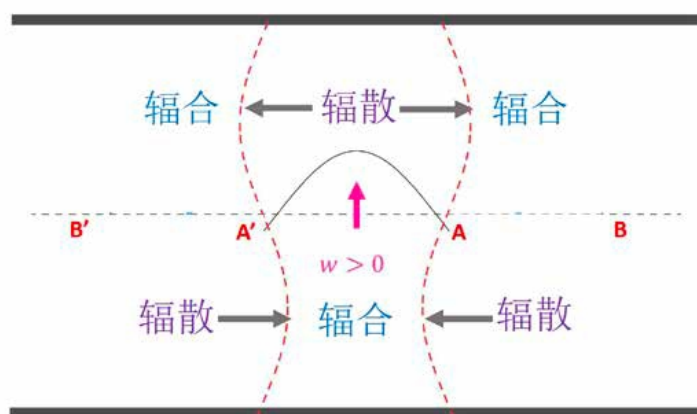
$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}}$$

对于绝热过程, 位温守恒, 所以上式可以继续化简为

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\delta z) &= g \frac{\theta(z_0 + \delta z) - \bar{\theta}(z_0 + \delta z)}{\bar{\theta}(z_0 + \delta z)} = g \frac{\bar{\theta}(z_0) - \bar{\theta}(z_0 + \delta z)}{\bar{\theta}(z_0 + \delta z)} = -g \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \delta z \\ \frac{d^2}{dt^2}(\delta z) + N^2 \delta z &= 0 \left(N^2 = g \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} = g \frac{d \ln \bar{\theta}}{dz} \right) \end{aligned}$$

N^2 即为浮力振荡频率, 又叫 Brunt-Väisälä(布伦特-维萨拉) 频率。 $N^2 > 0$ 表示环境层结稳定; $N^2 = 0$ 层结为中性, 气块受扰动后处于平衡状态; $N^2 < 0$ 表示层结不稳定, 气块一经扰动将原理平衡位置。因此, 要形成重力内波, 稳定层结是基本条件。平均而言, 大气中的 $N \approx 1.2 \times 10^{-2} s^{-1}$, 所以振荡周期约为 $T = \frac{2\pi}{N} \approx 9 \text{ min}$ 。

重力内波的传播形式, 与重力外波的机理一致, 均是通过水平辐合辐散的交替变化, 使波动得以传播(如下图)。



(2) Boussinesq 近似——对运动进行热力学简化

因为考虑了层结的作用, 所以热力学参量的基本量应是 z 的函数:

$$\begin{cases} p(x, y, z, t) = \bar{p}_0(z) + p'(x, y, z, t) \\ \rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}_0(z) + \rho'(x, y, z, t) \\ \theta(x, y, z, t) = \bar{\theta}_0(z) + \theta'(x, y, z, t) \end{cases}$$

➤ 水平动量方程

以 x 方向为例，已知

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} \approx \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial(\bar{p}(z) + p')}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

我们采用前面的尺度分析可以探讨一下热力学扰动量与其基本量之间的量级关系，以大中尺度为例，科氏力与压强梯度力同量级，于是有

$$\frac{RT^*}{P} \frac{\Delta P}{L} \sim f_0 U \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} \sim \frac{f_0 U L}{RT^*} = \frac{f_0 U L}{g H} = \frac{10^{-4} \times 10 \times 10^6}{10 \times 10^3} = 10^{-2}$$

也即是说，**大中尺度系统的热力学扰动量比基本量小两个量级左右**。所以，水平动量方程可以写为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - fu \end{cases}$$

➤ 铅直运动方程

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} - g &= -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} - g \approx -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} - g \\ &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \leftarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho g \\ &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g \end{aligned}$$

于是简化后的垂向运动方程为

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g$$

所以经过简化，原来的重力 g 已被基本状态的铅直气压梯度力抵消，在方程右端只出现扰动气压梯度力项，以及密度扰动引起的阿基米德浮力项。这两项量级相等，说明密度扰动是不能不考虑的。

➤ 状态方程

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \Leftrightarrow \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{1}{c_s^2} \frac{p'}{\bar{p}}$$

密度扰动项可以看成是由热膨胀效应项和可压缩效应项两项组成。因为扰动气压梯度与阿基米德浮力同量级，有

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{R\bar{T}}{\bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} g \Leftrightarrow \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \sim \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{R\bar{T}}{g} \frac{\Delta P}{PD} = \frac{H}{D} \frac{\Delta P}{P}$$

于是有尺度关系： $\frac{\Delta\Theta}{\Theta} = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{H}{D}\right) \frac{\Delta P}{P} (D \leq H)$

• 浅层运动 $D \ll H$

此时 $\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{p'}{\bar{p}} \sim \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta P}{P} \ll 1$ ，所以对于浅层运动可以忽略可压缩效应。

• 深层运动 $D \sim H$

此时尺度关系中各项的系数同量级，所以 $\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \sim \frac{p'}{\bar{p}} \sim \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \sim \frac{\Delta P}{P} = 10^{-2}$ ，即在深层运动中，构成密度扰动项的热膨胀效应项和可压缩效应项同等重要。

➤ 连续方程

考虑大中尺度运动，即 $D \sim H$ ，将 $\rho = \bar{\rho}_0(z) + \rho'$ 代入 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

中可以得到

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\rho'}{dt}} - \cancel{\frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}} + \frac{w}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\Delta\pi}{\bar{\pi}} \frac{U}{L} \quad \frac{\Delta\pi}{\bar{\pi}} \frac{U}{L} \quad \frac{W}{H} \leq \frac{U}{L} \quad \frac{W}{D} \end{cases}$$

前面已经提到过， $\frac{\Delta\pi}{\pi} \sim 10^{-2} \ll 1$ ，从而方程前两项可以忽略，于是连续方程可以

写成：

$$\frac{w}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0$$

也就是说在连续方程中密度扰动完全被略去。如果考虑浅层运动，那么

$\frac{W}{H} \ll \frac{W}{D}$ ，所以上述方程便化为不可压缩的形式 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ，这就意味着

可以滤去声波。

➤ 热力学方程

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \theta'}{\partial t} + u \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v \frac{\partial \theta'}{\partial y} + w \frac{\partial \theta'}{\partial z} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{d \theta'}{dt} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0$$

又因为 $\frac{\theta'}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}$ ，可见，热力学方程中密度扰动的作用也不可忽略。

[小结] Boussinesq 近似及其方程组

- 运动方程中，只在重力相联系的项中保留 ρ' ，而在其他项中略去 ρ' 的影响；
- 连续方程中，忽略 ρ' 的影响；
- 热力学能量方程中保留 ρ' 的影响。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + f v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - f u \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{du}{dt} \neq 0, \frac{dv}{dt} \neq 0, \text{boussinesq 流体在水平方向是非地转的} \\ \frac{dw}{dt} \neq 0, \text{垂向为非静力平衡} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \theta'}{dt} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \left(\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0 \right) \\ \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \quad \left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} \right) \end{array} \right\} \text{括号里为深层运动情形，称为准boussinesq近似}$$

(3) 重力内波的求解

前面已经提到过，**重力内波是稳定层结流体中的浮力振荡在空间的传播**，下面推导纯重力内波，做出的假设条件如下：

- 不计科氏力作用；
- 考虑一维情形，设扰动与 y 方向无关；
- 采用 Boussinesq 近似，即滤去声波；
- 基本流场静止，即 $u = u', w = w'$ ；
- 假定密度为常数 ρ_0 。

那么，结合上面的 Boussinesq 方程组，得到纯重力内波的控制方程组如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g = 0 \\ \lambda \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \frac{N^2}{g} w' = 0 \end{cases} \quad (\lambda \text{ 为示踪系数，等于 } 0 \text{ 表示水平无辐散})$$

这里仍然采用算子行列式法

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial z} & -g \\ \lambda \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N^2}{g} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \end{vmatrix} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \lambda N^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

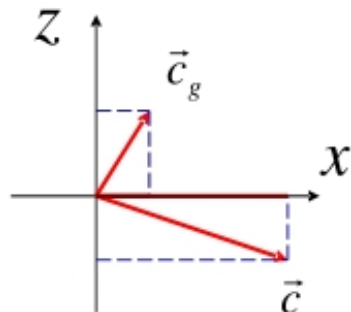
将算子作用于 w' ，并令其波动解为 $w' = W e^{i(kx + mz - \omega t)}$ ，得到二维重力内波圆频率

$$\omega^2 (\lambda^2 k^2 + m^2) - \lambda N^2 k^2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{\lambda} \cdot Nk}{\sqrt{\lambda^2 k^2 + m^2}}$$

上式给出了滤去重力内波的方法：**第一， $\lambda = 0 \Rightarrow \omega = 0$ ，若设运动水平无辐散，可以排除重力内波；第二， $N = 0 \Rightarrow \omega = 0$ ，所以中性层结下也无重力内波。**

取 $\lambda = 1$, 设 $N > 0$, 因为根据前面提到的重力内波传播机制, 可以知道重力内波在 x, z 方向均有传播, 所以可以写出相应的相速度与群速度矢量:

$$\begin{cases} \mathbf{c} = \pm \frac{\omega}{K} \frac{\mathbf{K}}{K} = \pm \frac{Nk}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (k\mathbf{i} + m\mathbf{k}) \\ \mathbf{c}_g = \pm \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \mathbf{k} \right) = \pm \frac{Nm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} (m\mathbf{i} - k\mathbf{k}) \end{cases}$$



通过上述表达式, 我们对重力内波的特点做如下总结:

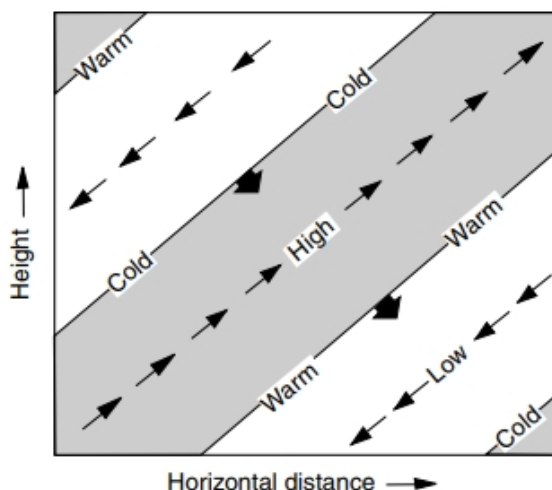
- ① 在非静力平衡的稳定层结大气中, **相速度和群速度的传播方向垂直, 即 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}_g = 0$** ;

- ② 从**水平方向**来看, 相速度矢量 $\frac{Nk^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{i}$ 与群速度矢量 $\frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{i}$ 的**大小**

不同, 方向一致; 但在**垂直方向上分量大小相同, 方向相反**, 相速度矢量为

$$\frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{k}, \text{ 群速度矢量为 } -\frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \mathbf{k};$$

- ③ 对于 $\omega > 0, k > 0, m < 0$ (代表等位相面向东倾斜), 结合特点②, 可以推出波动位相向东向下传播, 同时能量向东上传播;

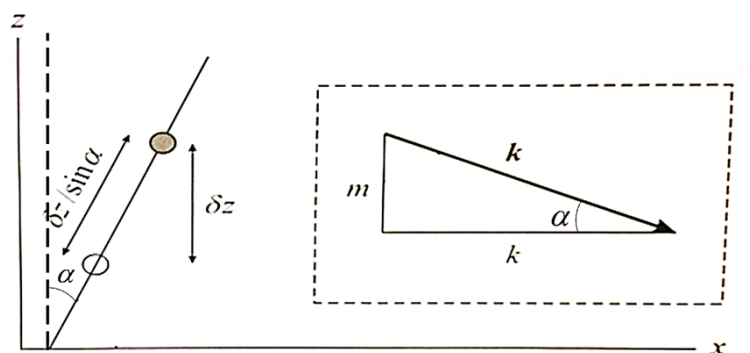


- ▲ 重力内波的压力、温度和速度扰动阶段的理想截面。细箭头表示扰动速度场, 短粗实箭头表示相速度。阴影显示向上运动的区域

- **速度扰动与气压扰动同位相**，出现向西向下速度扰动时气压扰动为低，出现向东向上速度扰动同时气压扰动为高；而**位温扰动**则与它们有 $\frac{\pi}{2}$ 的位相差。
- **u', w' 为正相关**： u' 为正时出现上升， w' 为负时出现下沉。

④ 根据关系式 $\omega = N \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} = N \cos \alpha$ ，其中 α 为重力内波等位相面的倾斜程度，并由此可以推出：

- **重力内波的频率不可能大于浮力振荡的频率；**
- **重力内波等位相面的倾斜仅与波的固有频率(ω ，与平均风场有关)与浮力频率的比值有关，与波长无关。**



▲ 图中的斜线代表倾斜的等位相面，白空心圆为微团的平衡位置，黑圈为移动后的位置，右侧图中的三角形代表二维波矢量，它垂直于等位相面

9. 重力惯性内波与惯性内波

考虑如下假设：

- 考虑 f 平面近似，即取 $f = f_0$ ；
- 采取 Boussinesq 近似；
- 取稳定层结，即 $N^2 > 0$ ；
- 考虑三维情形。

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} - f_0 v' + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) = 0, \frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ \lambda \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g = 0, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) + \frac{N^2}{g} w' = 0 \end{cases}$$

同样的，在采用算子行列式法后，可以得到拉普拉斯算子：

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -f_0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ f_0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial z} & -g \\ 0 & 0 & \frac{N^2}{g} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \nabla_h^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

$$\left(\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

设 $w' = W e^{i(kx + ly + mz - \omega t)}$ ，将算子作用于 w' ，得方程

$$\omega \left\{ \left[\lambda (k^2 + l^2) + m^2 \right] \omega^2 - N^2 (k^2 + l^2) - f_0 m^2 \right\} = 0$$

取有效解，得重力内波频率的表达式为

$$\omega^2 = \frac{N^2 (k^2 + l^2) + f_0^2 m^2}{\lambda (k^2 + l^2) + m^2}$$

由上述表达式可以知道，当 $f_0 = 0$ 时，对应为重力内波频率；**当大气为中性层结即 $N^2 = 0$ 时，得对应为惯性内波的频率**。对于惯性内波，其相速度和群速度的表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{c} = \pm \frac{\omega}{K} \frac{\mathbf{K}}{K} = \pm \frac{f_0 m}{(k^2 + l^2 + m^2)^{3/2}} (k\mathbf{i} + l\mathbf{j} + m\mathbf{k}) \\ \mathbf{c}_g = \pm \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \mathbf{j} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \mathbf{k} \right) = \pm \frac{f_0 m}{(k^2 + l^2 + m^2)^{3/2}} \left(-k\mathbf{i} - l\mathbf{j} + \frac{k^2 + l^2}{m} \mathbf{k} \right) \end{cases}$$

可见，**惯性内波的相速度与群速度矢量也是相互垂直的，且相速度与群速度矢量的铅直分量方向相同，而水平分量相反。**

再来讨论重力惯性内波，取 $\lambda=1$ ，可以得到非静力平衡下重力惯性内波的一些特点：

(1) 其相速度矢量和群速度矢量可以写为

$$\begin{cases} \mathbf{c} = \pm \frac{\omega}{K} \frac{\mathbf{K}}{K} = \pm G_1 (\mathbf{k}\mathbf{i} + \mathbf{l}\mathbf{j} + \mathbf{m}\mathbf{k}), G_1 = \frac{\sqrt{N^2(k^2 + l^2) + f_0^2 m^2}}{(k^2 + l^2 + m^2)^{3/2}} \\ \mathbf{c}_g = \pm \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \mathbf{j} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \mathbf{k} \right) = \pm G_2 m \left(\mathbf{k}\mathbf{i} + \mathbf{l}\mathbf{j} - \frac{k^2 + l^2}{m} \mathbf{k} \right), G_2 = \frac{(N^2 - f_0^2)m}{\sqrt{N^2(k^2 + l^2) + f_0^2 m^2} (k^2 + l^2 + m^2)^{3/2}} \end{cases}$$

由此可知，重力惯性内波的相速度矢量与群速度矢量也是相互垂直的。

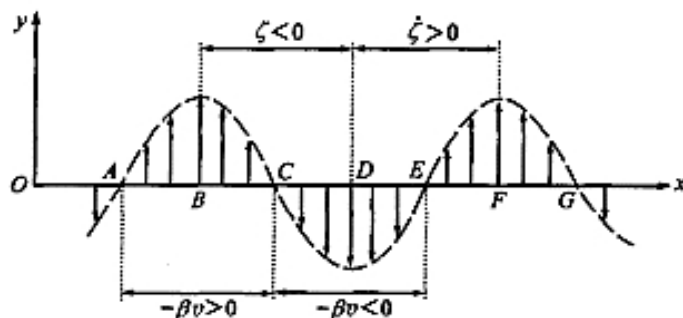
(2) 重力惯性内波是稳定层结与科氏力共同作用下产生的混和波，这两个因子中哪一个强，混和波的性质便可接近于该因子所产生的波。如果 $N^2 > f_0^2$ ，即 $G_2 > 0$ 则 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{c}_g$ 的水平分量方向相同，垂直分量方向相反，故主要体现出纯重力内波性质；反之，如果 $N^2 < f_0^2$ ，即 $G_2 < 0$ 则 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{c}_g$ 的水平分量方向相反，垂直分量方向相同，主要表现为惯性内波的性质。

10. Rossby 波及其传播与演变

(1) 什么是 Rossby 波

Rossby 波又称为大气长波。在每日的天气图上，我们经常可以看到，对流层中上层气压场或流场呈波状形式。在北半球中纬度地区约有 3~5 个波，其传播速度与风速相当，这种波称为大气长波。大气长波具有准水平、无辐散性质，它的传播速度与声波、重力波相比要慢得多，故称为涡旋性慢波。由于它的水平尺度可以和地球半径相比拟，因而又称为行星波。

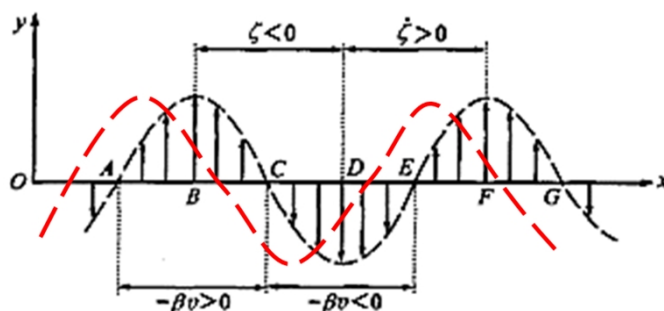
[注] 对 Rossby 波形成的物理机制的定性理解



Rossby 指出, 大气长波波动与 β 效应有关, 考虑正压、水平无辐散的情况, 则涡度方程可以写为

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\beta v \quad \begin{cases} v = V \sin kx = V \sin \frac{2\pi}{L} x \\ \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} = kV \cos kx = kV \cos \frac{2\pi}{L} x \end{cases}$$

假设初始速度的分布如上图所示(同时根据涡度表达式 $\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 可知也是涡度的分布), 在 AC 区 $v > 0$, 所以 $\frac{d\zeta}{dt} = -\beta v < 0$, 相对涡度要减小; 在 CE 区 $v < 0$, 所以 $\frac{d\zeta}{dt} = -\beta v > 0$, 相对涡度要变大。容易得到其波形随时间将发生如下变化——波动向西传播。



(2) 正压无辐散的 Rossby 波动理论

假设基本气流为均匀西风, 即令 $u = \bar{u}(\text{const}) + u'$, $v = v'$, 则正压水平无辐散涡度方程经过线性化以后可以化简为

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \zeta' \Rightarrow \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \beta v' = 0$$

水平无辐散即不可压, 则可以引入扰动流函数 Ψ' , 满足

$$u' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial y}, v' = \frac{\partial \Psi'}{\partial x}, \zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \nabla^2 \Psi'$$

于是上述方程又可以化简为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \Psi' + \beta \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = 0$$

设波动解为满足 $\Psi' = \Psi e^{i(kx + ly - \omega t)}$, 可得频率方程为

$$\beta k - (k^2 + l^2)(k\bar{u} - \omega) = 0 \Rightarrow \omega = k\bar{u} - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

由上式可得纬向 Rossby 波的相速度为和群速度为

$$c_{px} = \frac{\omega}{k} = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + l^2}, c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \bar{u} + \beta \frac{k^2 - l^2}{k^2 + l^2}$$

根据上述公式，我们总结一下 Rossby 波的一些特点：

- ① Rossby 波的控制方程本质上为绝对涡度守恒($\frac{d(\zeta+f)}{dt}=0$)控制的大尺度涡旋运动， β 效应其主要作用；

- ② 相速度与波长有关，故 Rossby 波是频散波，其能量频散有重要的天气意义；

- ③ Rossby 波叠加在西风上时波动向东传，但是相对基本气流是向西传播

($c_{px} - \bar{u} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2} < 0$)。以中纬度天气尺度波动为例，取

$L_x = 6000km, L_y = 3000km$ ，则

$$k = \frac{2\pi}{L_x} = 1.05 \times 10^{-6} m^{-1}, l = \frac{2\pi}{L_y} = 2.09 \times 10^{-6} m^{-1}, \beta = \frac{2\Omega \cos \varphi}{a} = 1.62 \times 10^{-11}$$

代入表达式，有 $\frac{\beta}{k^2 + l^2} = 2.94 m/s$ ，所以 Rossby 波属于慢波。

- ④ Rossby 波是大尺度波动，具有准地转性，这是与重力惯性波的重要区别之一；

(3) 一维情形的 Rossby 波（正压无辐散情形）

均匀西风背景，一维情形下的 Rossby 波的相速度和群速度为

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2} = \bar{u} - \frac{\beta L^2}{4\pi^2}, c_g = \bar{u} + \frac{\beta}{k^2}$$

由上述表达式可知：

- ① 无论系统的波长(跨了多少个经度)如何，群速度总是正值，即能量总是向东传，且波长越长，能量的传播速度越快；
- ② 能量的传播速度比波的移动速度快；

③ 存在某一波长 L_s ，使得 $c = 0$ ，称 L_s 为静止波波长，其中 $L_s = 2\pi\sqrt{\frac{u}{\beta}}$ ，可见

静止波的波长与平均西风强度和纬度均有关(西风强度越大、纬度越高，静止波长越大，注意 $\beta = \frac{2\Omega \cos \varphi}{a}$ 随纬度减小)。于是 Rossby 波的移动公式可以改

写为 $c = \frac{\beta(L_s^2 - L^2)}{4\pi^2}$ ，据此可以将 Rossby 波分为前进波、静止波和后退波。

【注】当 $L > L_s$ 时，并不是波长越大，倒退越厉害，大量天气事实表明，超长波要么准静止，要么缓慢自东向西运动，决不会倒退很厉害。这表明，对超长波来说，正压 Rossby 波移动公式失效。正压 Rossby 波公式仅适用于涡度量级大于散度量级的情形。

(4) Rossby 波能量频散与上游效应（正压准地转情形）

大气中产生某种扰动后，由上节知，能量要以 c_g 向外传播。对频散波， $c_g \neq c$ ，当 $c_g > c$ 时，扰动能量将先于扰动源到达下游，从而在下游引起新的扰动，或使下游已有的扰动加强。这种上游扰动对下游产生的快于扰源本身传播的影响，称为上游效应。

已知正压准地转 Rossby 波(推导参见下面的“滤波”知识点)的频率关系为(基本气流静止)

$$\omega(k^2 + l^2 + L_0^{-2}) + \beta k = 0$$

$$\left(L_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{gH_0}{f}, \text{ 罗斯贝变形半径, } H_0 \text{ 为等温大气的高} \right)$$

我们主要关注纬向的波动，所以

$$c_{px} = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + L_0^{-2}}, c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = -\beta \frac{k^2 - l^2 - L_0^{-2}}{k^2 + l^2 + L_0^{-2}} = \frac{\beta}{l^2 + L_0^{-2}} \frac{k^2/l^2 + L_0^{-2} - 1}{k^2/l^2 + L_0^{-2} + 1}$$

当 $k \rightarrow 0$ 时，相速度有最大的负值，同时，在没有基本气流时，Rossby 波的相速度总是小于 0，即相速总是西传。但是，群速度却可正可负：

- ① $k^2 / (l^2 + L_0^{-2}) > 1$, 即 $k^2 > (l^2 + L_0^{-2}) \rightarrow k$ 大则 L 小, 短波, 则 $c_{gx} > 0$, 东传
 ② $k^2 / (l^2 + L_0^{-2}) < 1$, 即 $k^2 < (l^2 + L_0^{-2}) \rightarrow k$ 小则 L 大, 长波, 则 $c_{gx} < 0$, 西传
 ③ $k^2 / (l^2 + L_0^{-2}) = 1$, 即 $k^2 = (l^2 + L_0^{-2}) \rightarrow c_{gx} = 0 \rightarrow$ 波包迹为驻波 (静止波)

所以, 当 $c_{gx} > 0$ 时, 群速度总是大于相速度, 于是能量频散, 在下游可以产生

新的扰动; 而当 $c_{gx} < 0$ 时, 由于 $c_{gx, \text{最大负值}} = c_{px, \text{最大负值}} = -\frac{\beta}{l^2 + L_0^{-2}}$, 也就是说不能

形成能量先于波源扰动到达上游的情形, 故初始扰动不能够在上游形成新的扰动。

(5) *Rossby 波的经向传播

实际的大气中的背景西风并不是均匀的, 通常随纬度有变化(存在急流轴), 故可设基本气流为 $u = \bar{u}(y) + u', v = v'$, 这样, 正压水平无辐散的线性涡度方程为

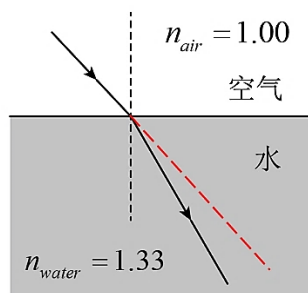
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \Psi' + \left(\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right) \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = 0 \quad (\Psi' \text{ 为扰动流函数})$$

为了讨论 Rossby 波的经向传播, 设波动解为 $\Psi' = \Psi(y) e^{ik(x-ct)}$, 代入上式有

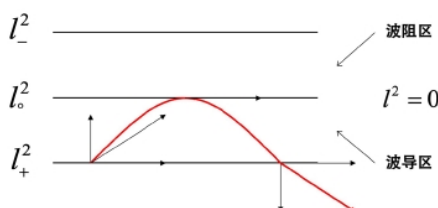
$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} + l^2 \Psi = 0 \quad \left(l^2 = \frac{\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}{\bar{u} - c} - k^2 \text{ 当 } \bar{u} - c \neq 0 \right)$$

方程中 c 为 x 方向的传播速度, l^2 称为 y 方向的折射指数。为了使得上述方程有振动解, 需要使得 $l^2 > 0$, 这也是 Rossby 波在 y 方向得以传播的条件。根据光的折射定律(斯涅耳定律), 波传播的方向总是指向折射指数 l^2 大的区域, 这种情况称为波导; 反之, 称为波阻区域。

[注] 如何理解 Rossby 波的波导与波阻呢? 我们还是回到折射定律来。



以空气和水为例，水的折射率比空气大，从上图可以发现，光线在折射率大的介质中更加靠近法线。



$l^2 = 0$ 是转向纬度；波动不能在 $l^2 < 0$ 区域传播，此处称波阻区； $l^2 > 0$ 称波导区

如上图，折射指数沿经向减小，存在一个为 $l^2 = 0$ 的区域，过了这个区域后就波动的长波将受阻。利用前面折射定律得出的结论，沿着经向波动传播方向应该与法向的夹角越来越大，于是呈现出上图所示的情形。

(6) *Rossby 波的铅直传播

考虑准地转的斜压罗斯贝波，假设基本气流为 $\bar{u} = \bar{u}(y, z)$ ，其扰动方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\nabla^2 \Psi' + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$$

[注] 具体的推到过程可参考如下

这里的推导用到了下一章涉及的一些方程组，所以这里直接拿过来用，目的是知道用什么方程进行线性化，以及如何求解相应的方程。已知绝热无摩擦的条件下，第一类斜压准地转运动方程组为(Page 158)

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \zeta_g + \beta v_g = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \omega \sigma_s = 0 \end{cases} \left(\sigma_s = -\alpha \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} \right)$$

消去方程中的 ω 项，可以得到斜压准地转位势涡度守恒

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \right) q = 0 \left(q = f_0 + \beta y + \zeta_g + f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right) (*)$$

这与 Page 169 提到了正压准地转位势涡度守恒不一样。为了方便求解，利用静力平衡关系 $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ ，将位势的最后一项进行转换为直角坐标系下的表达式

$$f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \xrightarrow{\psi = \frac{\Phi}{f_0}} = f_0^2 \frac{\partial}{-\rho g \partial z} \left(\frac{1}{-\alpha \cdot \frac{\partial \ln \theta}{-\rho g \partial z}} \cdot \frac{\partial \psi}{-\rho g \partial z} \right) = \frac{f_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

这里的 ψ 称为地转流函数，其与位势高度 Φ 的推导下一章也会涉及，此处不再赘述。需要指出的是，对于斜压情况(假设大气是多层的，且每层的性质均一)，有 $\rho = \rho(z), N^2 = N^2(z) \Rightarrow \rho = \rho_0 + \rho'(z), N^2 = N_0^2 + N'^2(z)$ ，于是

$$q = f_0 + \beta y + \nabla^2 \psi + \frac{f_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

同样的，我们采用微扰法的思想，令 $q = \bar{q} + q'$ 。我们需要先通过对基本流场进行假设后，才能推导得出 $\bar{q}$ 是的自变量有哪些。设基本流场为 $u = \bar{u}(y, z) + u', v = v'$ ，于是 $\bar{\zeta}_g = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nabla^2 \bar{\psi}, \zeta'_g = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = \nabla^2 \psi'$ (∇^2 表示水平 Laplace 算子)。显然，平均量可以写成

$$\bar{q} = f_0 + \beta y + \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{f_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0}{N_0^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) = f_0 + \beta y + \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} \Rightarrow \bar{q} = \bar{q}(y, z)$$

下面再来推导 q' 的表达式。

$$\begin{aligned}
q &= f_0 + \beta y + \nabla^2 \bar{\psi} + \nabla^2 \psi' + \frac{f_0^2}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho_0 + \rho'}{N_0^2 + N'^2} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right] \\
&= f_0 + \beta y + \nabla^2 \bar{\psi} + \nabla^2 \psi' + \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{1}{1 + \frac{\rho'}{\rho_0}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1 + \frac{\rho'}{\rho_0}}{\frac{N_0^2}{N'^2}} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right] \\
&\approx f_0 + \beta y + \nabla^2 (\bar{\psi} + \psi') + \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} + \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

于是可以得到 $q' = \nabla^2 \psi' + \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2}$ 。注意，这里根据热力学扰动量远比基本量小的

的性质而采用的一种近似的办法，目的是为了便于得到结果。感兴趣的读者可以严格按照泰勒展开去推导一下。这样，我们对最开始得到的准地转位势涡度守恒的方程(*)式进行线性化后，有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \\
&\downarrow \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\nabla^2 \psi' + \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta + \nabla^2 \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \right) + \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \right) = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}。$$

注：上述推导过程为笔者的一种思路，仅供大家参考！

同样的，我们为了研究铅直传播，设波动解为 $\Psi' = \Psi(z) e^{i(kx + ly - \omega t)}$ ，代入上式

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} + m^2 \Psi = 0 \left[m^2 = \frac{N^2}{f_0^2} \left(k^2 + l^2 - \frac{\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}}{\bar{u} - c} \right) \text{ 当 } \bar{u} - c \neq 0 \right]$$

方程中 c 为 x 方向的传播速度， m^2 称为 z 方向的折射指数。为了使得上述方程有振动解，需要使得 $m^2 > 0$ ，这也是 Rossby 波在 z 方向得以传播的条件。

11. “噪声”与滤波

已知浅水方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

根据这个方程可以推出涡度方程为 $\frac{d\zeta}{dt} + \beta v + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$ ，利用第三式

的连续方程消去水平散度项可以得到位势涡度守恒—— $\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0$ ，这是浅

水方程组的一个重要性质(前提是均质不可压)。

下面对方程进行线性化。设

$$u = \bar{u} + u', v = v', h = H_0(y) + h' \left(\bar{u} = \frac{g}{f_0} \frac{\partial H_0}{\partial y} = \text{const} \right)$$

得扰动方程组与扰动的涡度方程

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - fv' + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) v' + fu' + g \frac{\partial h'}{\partial y} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) h' - \frac{f_0 \bar{u}}{g} v' + H_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \beta v' + f \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

为了讨论 β 效应的影响，将涡度方程替换扰动方程 y 方向的运动方程，为方便讨论，进一步假设扰动速度与 y 无关，引入两个示踪系数 λ_1, λ_2 ，得到等价扰动方程组如下(只在 y 方向引入 β 因子，而在其他方程中其他地方出现的 f 仍取 f_0 ，这样既考了 β 效应，又可以使讨论简便)

$$\begin{cases} \lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - f_0 v' + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 & (1) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v'}{\partial x} + \beta v' + f_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 & (2) \\ \lambda_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) h' - \frac{f_0 \bar{u}}{g} v' \right] + H_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 & (3) \end{cases}$$

对于两个示踪系数, 取 $\lambda_1=0, \lambda_2=1$, 表示(1)式的 v' 满足地转关系, 且(2)式满足准地转近似——即除了散度项外, 其余的水平风速均可取地转风近似; 若取 $\lambda_1=1, \lambda_2=0$, 表示水平无辐散。

设波动解为 $[u', v', h'] = [U, V, h_0] e^{i(kx - \omega t)}$, 采用算子行列式法, 有

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} \lambda_1 m & -f_0 & g \frac{\partial}{\partial x} \\ f_0 \frac{\partial}{\partial x} & m \frac{\partial}{\partial x} + \beta & 0 \\ H_0 \frac{\partial}{\partial x} & -\lambda_2 \frac{f_0 \bar{u}}{g} & \lambda_2 m \end{vmatrix} = \left(m \frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) \left(\lambda_1 \lambda_2 m^2 - g H_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \lambda_2 f_0^2 \left(m \frac{\partial}{\partial x} - \bar{u} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), m = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

将波解代入上式, 有

$$\left[\beta - k^2 (\bar{u} - c) \right] \left[g H_0 - \lambda_1 \lambda_2 (\bar{u} - c)^2 \right] + \lambda_2 f_0^2 \left[\bar{u} - (\bar{u} - c) \right] = 0$$

(1) 取 $\lambda_1=1, \lambda_2=1$, 且原方程不取任何近似, 有

$$\left[\beta - k^2 (\bar{u} - c) \right] \left[g H_0 - (\bar{u} - c)^2 \right] + f_0^2 \left[\bar{u} - (\bar{u} - c) \right] = 0$$

这是一个关于 c 的三代数方程, 应该有三个根, 从物理上讲, 浅水方程的前提是均质不可压, 所以排除了声波。由于包含了 g, f_0, β , 所以这三个根是一对惯性重力外波解(惯性重力外波是快波)和一个涡旋慢波解(Rossby 波是慢波)。

➤ 慢波解

对于慢波, 其相速度 $c \sim \bar{u}$, 所以可以认为 $(\bar{u} - c) \ll g H_0$, 此时, 方程为

$$\left[\beta - k^2 (\bar{u} - c) \right] g H_0 + f_0^2 \left[\bar{u} - (\bar{u} - c) \right] = 0$$

解得 $c = \bar{u} - \frac{\beta + f_0^2 \bar{u} / (gH_0)}{k^2 + f_0^2 / (gH_0)} = \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \left(1 - \frac{L_0^{-2}}{k^2 + L_0^{-2}} \right)$, 其中 $L_0 = \frac{\sqrt{gH_0}}{f}$ 称为**罗斯贝**

变形半径, 这是一个非常重要的尺度参数, 在后面的地转适应的章节中, 我们再做详细的讨论。与一维的 Rossby 纬向速度 $c_{px} = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2}$ 相比, 这个结果多了一个系数, 它是一个受重力的和惯性修正后的 **Rossby 波**, 或者说是计入水平散度的**正压 Rossby 波**, 比较接近实际情况。

➤ 快波解

对于快波解, c 很大, 所以可认为 $|\bar{u} - c| \gg \frac{\beta}{k^2} \& \bar{u}$, 从而方程可以写为

$$-k^2 (\bar{u} - c) \left[gH_0 - (\bar{u} - c)^2 \right] - f_0^2 (\bar{u} - c) = 0$$

其解为 $c = \bar{u} \pm \sqrt{gH_0 + \frac{f_0^2}{k^2}}$, 这正是惯性重力外波的相速度。

(2) 取 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, 即运动水平无辐散, 方程为

$$\beta - k^2 (\bar{u} - c) = 0 \Rightarrow c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2}$$

此即排除了重力和惯性的纯一维罗斯贝波。同时还可以知道, **水平无辐散条件**过去了重力惯性外波, 保留了涡旋性慢波。

(3) 取 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$, 即取准地转近似, 此时方程为

$$\left[\beta - k^2 (\bar{u} - c) \right] gH_0 + f_0^2 \left[\bar{u} - (\bar{u} - c) \right] = 0$$

此种情形与不做任何近似下的慢波解是一致的。

[小结] 各种波动的特点总结

滤波条件	滤波类型
不可压缩	所有方向的声波
准静力平衡假设	垂向声波
水平无辐散/准地转	声波、重力波、惯性波、重力惯性波
大气层结为中性	重力内波
大气上下边界均为刚壁	重力内、外波
不计科氏力	惯性波
不计重力	重力波
不计科氏力随纬度变化	Rossby 波

参考资料

[1] [Microsoft Word - 上课内容-chapsix \(njude.com.cn\)](#)

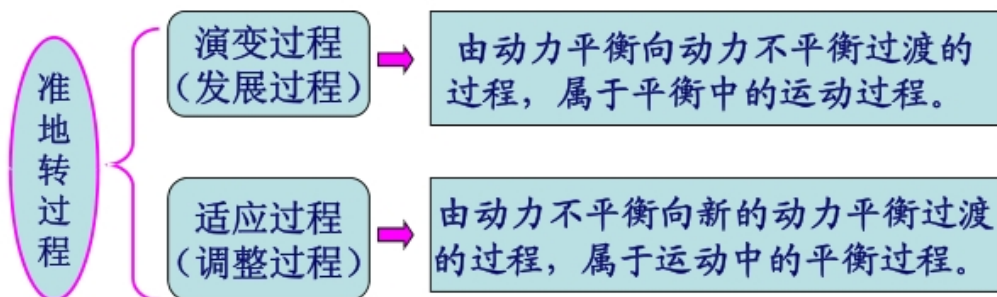
[2] [流体力学 第六章 流体波动](#)

[3] [大气中的基本波动](#)

[4] [大气波动的基本概念和简单波形](#)

第九章 中纬度大尺度运动的准地转理论

1. 准地转运动的基本概念



2. 准地转运动的物理背景

- (1) 大气运动发生在重力场中, 在重力场的作用下, 90%的大气质量堆积在紧靠地球固定边界的一个层次中;

在自由大气中, 常常有静力平衡 $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g$ 成立, 考虑整层大气,

通过量纲分析有 $\frac{P}{H} \sim \frac{P}{RT^*}$, 从而 $H \sim \frac{RT^*}{g} \sim 10^4 m$ 。

- (2) 大气运动发正在旋转场中;

由于地球旋转的影响, 大气运动受到科里奥利力的作用和影响, 科里奥利力的相对重要性取决于旋转大气中固有的水平尺度, 即罗斯贝变形半径 L_0 , 当 $L \geq L_0$ 时, 科氏力是重要的。

- (3) 当科氏力对运动有重要作用(大尺度), 水平气压梯度力应与科氏力同量级;

以 x 方向为例, 在

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = fu \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p}{RT} u \Rightarrow \frac{\partial \ln p}{\partial x} \sim \frac{f_0 U}{RT^*} = \frac{f_0 U}{gH}$$

而 $\frac{\partial \ln p}{\partial x} \sim \frac{\partial \ln \theta}{\partial y}$, 可得速度的尺度 $U \sim \frac{gH}{f_0} \frac{\partial \ln \theta}{\partial y}$ 。现假设地球大气的平均位温为

$\bar{\theta}$, 赤道与极地两极的位温差为 $\Delta \bar{\theta}$, 地球的线速度特征量为 $f_0 a$, 则大气运动

的速度尺度与地球线速度之比为

$$\frac{U}{f_0 a} = \frac{gH}{f_0} \frac{\Delta \bar{\theta}}{\frac{\pi}{2} a \bar{\theta}} \bigg/ f_0 a \sim \frac{gH}{f_0^2 a^2} \frac{\Delta \bar{\theta}}{\bar{\theta}} = \left(\frac{L_0}{a} \right)^2 \frac{\Delta \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \ll 1 (L_0 \sim 3000 \text{ km}, a \sim 6000 \text{ km})$$

也就是说大气的水平运动尺度相对于地球线速度也是十分缓慢的。

(4) 由上述的讨论可以得出平均大气的运动可近似满足 Taylor-Proudman 定理。

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0 \Rightarrow \Omega \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial y} + \Omega \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$\text{而} \left| \frac{\Omega \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial y}}{\Omega \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial z}} \right| \sim \frac{D}{L} \cot \varphi \ll \cot \varphi \text{ (对于大尺度运动 } \frac{D}{L} \sim 10^{-2} \text{), 当 } \varphi \text{ 从 } 0 \text{ 向 } \frac{\pi}{2} \text{ 变化时,}$$

$\cot \varphi$ 从 ∞ 变为 0, 所以, 除了低纬度以外, $\Omega \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial y}$ 相对 $\Omega \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial z}$ 可以忽略,

于是 $\Omega \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial z} \approx 0$, 所以若初始 $z=0$ 时 $w=0$, 则任何高度上总有 $w=0$, 所以运

动是准水平的, 这也是准地转运动的一个重要特征。

【Rossby 数的另一种表达】

$$\text{由(3)可知, } Ro = \frac{U}{f_0 L} \sim \frac{gH}{f_0^2 L} \frac{\partial \ln \theta}{\partial y} \sim \left(\frac{L_0}{L} \right)^2 \frac{\Delta T}{T^*}, \text{ 对于大尺度运动, } Ro \ll 1,$$

因此还需要满足

$$\frac{\Delta T}{T^*} \ll \left(\frac{L_0}{L} \right)^2$$

(大气中的 L_0 大约为 3000 km , 超长波的尺度为 10000 km , 所以 $\left(\frac{L_0}{L} \right)^2_{\min} \sim 10^{-2}$, 但

一般很少天气系统的尺度达到万公里)所以, 当运动的水平尺度一定时, 在这个尺度上的温差预小, 运动越接近准地转运动; 若温差越大, 这种非地转成分就愈大。由公式还可以看出, 低纬度的罗斯贝变形半径大, 当其他条件一定时, 中纬度地区更容易接近准地转运动。

【总结】中纬度大尺度运动是准水平的、准地转的，这受外界固有条件的制约。

- ① 重力场的作用使大气质量向靠近地球固定边界一薄层中堆积，从而制约了铅直气压梯度，限制了大气运动的铅直尺度；
- ② 地球旋转作用制约了水平气压梯度，限制了大气运动的水平尺度；
- ③ 地球和太阳几何位置相对固定，使地球南北接受的太阳辐射能受到限制，从而制约了大气的水平速度尺度。

3. 地转适应与地转演变过程的可分性

准地转运动满足准地转平衡，有关系式

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -fv_g, -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = fu_g$$

一级近似的大尺度水平运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = fv' \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -fu' \end{cases} \quad (u', v' \text{ 为地转偏差})$$

为了方便讨论，对各物理量进行无量纲化如下

$$\begin{aligned} (x, y) &= L(x^*, y^*), t = \tau(t^*) \\ (u, v) &= U(u^*, v^*), (u', v') = U'(u'^*, v'^*) \\ f &= f_0 + \beta y = f_0(1 + Ro\beta^* y^*) \end{aligned}$$

【注】 β 近似的无量化

$$f = f_0 \left(1 + \beta \frac{y}{f_0} \right) = f_0 \left(1 + \beta^* y^* o(\beta) \frac{L}{f_0} \right) = f_0 \left(1 + Ro\beta^* y^* o(\beta) \frac{L^2}{U} \right)$$

$$\text{因此可令 } \beta^* = \beta \frac{L^2}{U} \sim \frac{10^{-11} \times (10^6)^2}{10} = 10^0$$

于是水平运动方程的无量纲化方程为

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + Ro \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = (1 + Ro \beta^* y^*) \frac{U'}{U} v'^* \\ \varepsilon \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + Ro \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -(1 + Ro \beta^* y^*) \frac{U'}{U} u'^* \end{cases}$$

上述方程中, $\varepsilon = \frac{1}{f_0 \tau}$ 为基别尔数, 表示局地惯性力与科氏力的尺度之比。

$Ro = \frac{U}{f_0 L}$, 表示水平惯性力与水平科氏力的尺度之比。上述方程表明了方程的

平衡受限于三项, 即局地变化项, 平流项和地转偏差项。

对于中纬度大尺度运动, 可以得到 $Ro = \frac{U}{f_0 L} = \frac{10}{10^{-4} \times 10^6} = 0.1$

(1) 地转适应过程(初始处于高度非地转平衡状态)

处于非地转平衡状态时, 地转偏差较大, 所以 $\frac{U'}{U} \sim 1$, 因此为了使得方程平

衡, 所以要求 $\varepsilon = \frac{1}{f_0 \tau} \sim \frac{U'}{U}$, 于是可以得到地转适应过程的特征时间尺度

$$\tau_a(\text{adapt}) \sim \left(\frac{U'}{U} \right) f_0^{-1} = 10^4 \text{ s} \approx \text{数小时 (不超过1天)}$$

(2) 地转演变过程(初始处于准地转平衡状态)

此时的地转偏差较小, 所以 $\frac{U'}{U} \sim 0.1$, 同样为了使得方程平衡, 需要满足

$$\varepsilon = \frac{1}{f_0 \tau} \leq 0.1$$

于是可以得到地转演变过程所需要的时间为 $\tau_e(\text{evolve}) \sim 10^5 \text{ s} \approx \text{数天}$

由此可知, 地转演变过程的特征时间尺度比地转适应过程的特征时间尺度大一个数量级, 因此称演变过程为“慢过程”, 适应过程为“快过程”。

再看看两过程的涡度和水平散度的量级估计与比较。

- 涡度项: $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U}{L}$

- 散度项: $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \sim \frac{U'}{L}$ (地转风是无辐散的)

因此有 $\frac{D}{\zeta} \sim \frac{U'}{U}$ 。对于地转适应过程(高度非地转状态), 有 $\frac{D}{\zeta} \geq 1$, 表明水平散度项起重要作用, 即位势运动是重要的; 而对于地转演变过程(处于准地转平衡状态), 有 $\frac{D}{\zeta} \sim 0.1$, 表明涡度项其主要作用, 即运动具有准涡旋的性质。此外, 地转适应过程的运动是线性的, 地转演变过程的运动是非线性的。

【总结】地转适应与地转演变的比较

	地转适应过程	地转演变过程
定义	地转平衡态受到破坏后, 通过风场和气压场之间的相互调整和适应, 达到新的地转平衡态的过程	准地转平衡态的缓慢变化过程
初始状态	高度非地转状态(有很强的穿越等压线的运动)	准地转平衡状态
时间尺度	$10^4 s$, 快过程	$10^5 s$, 慢过程
平流项	可忽略, 因此是线性过程	不可忽略, 是非线性过程
运动形式	位势运动为主(位势运动与涡旋运动同等重要)	涡旋运动为主

4. 准地转运动的分类

前面提到, 准地转运动的运动特点主要表现为涡旋性质, 所以下面从涡度方程出发, 通过量纲分析讨论不同过程的准地转运动。《环流定理与涡度方程》章节中得到的涡度方程为

$$\frac{d(f + \zeta)}{dt} = -(f + \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

容易证明, 对于大尺度运动, 涡管扭曲项和力管项是一个小项, 相对于方程中其他项可以忽略。而 $\zeta \sim 10^{-5} s^{-1}$, $f \sim 10^{-4} s^{-1}$, 故在方程右边的水平散度项可以略去

$\zeta \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, 最终得到大尺度运动的涡度方程如下:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{V}_h \cdot \nabla_h) \zeta + \beta v = -f \nabla_h \cdot \mathbf{V}_h$$

考虑平流时间尺度, 即 $\tau = \frac{L}{U}$, 那么涡度方程中各项的量级(从左到右)依次为

$$\frac{U^2}{L^2} \quad \frac{U^2}{L^2} \quad \frac{f_0 U}{a} \quad f_0 \frac{W}{H}$$

这里已将高度尺度取为对流层的特征厚度 H , 于是, 可以得到如下的尺度关系

$$\frac{U^2}{L^2} + \frac{f_0 U}{a} \sim f_0 \frac{W}{H} \Leftrightarrow \frac{W}{H} \sim \frac{U}{L} (Ro + S) \left(S = \frac{L}{a} \right)$$

(1) 第一类准地转运动—— $S \ll Ro \ll 1$

① $Ro \ll 1 \rightarrow$ 天气尺度运动; $S \ll 1 \rightarrow$ 水平运动尺度远小于地球半径

$$\frac{W}{H} \sim Ro \frac{U}{L} \Rightarrow W \ll \frac{HU}{L}$$

在连续方程中, 考虑水平散度的存在, 有 $W \sim \frac{HU}{L}$, 上式表明, **第一类准地转运动中, 垂直速度量级远小于从连续方程中估计出的量级。**

② 对于 $\frac{W}{H} \sim Ro \frac{U}{L}$, 左边为水平散度的量级, 右边 $\frac{U}{L}$ 为涡度的量级, 所以

$$\frac{D}{\zeta} \sim Ro \ll 1$$

所以**这类准地转运动具有显著的涡旋运动特点。**

③ 考虑由涡度方程与绝热方程分析出的铅直速度量级相当, 即

$$\frac{UH}{L} Ro \sim \frac{f_0 U^2}{N^2 H} \sim \frac{f_0 U^2}{\sigma g H} \left(\sigma = \frac{\partial \ln \theta}{\partial z} \right) \Leftrightarrow \frac{L}{H} \sim \frac{\sqrt{g \sigma}}{f_0}$$

上式表明, **运动的水平尺度 L 及垂直尺度 H 还与静力稳定度 σ 有关。**

④ 对③中的关系式进一步化简

$$\frac{g\sigma H^2}{U^2} \cdot \frac{U^2}{f_0^2 L^2} \sim 1 \Rightarrow Ro^2 Ri \sim 1 \left(Ri = g \frac{\frac{\partial \ln \theta}{\partial z}}{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \sim \frac{g\sigma H^2}{U^2} \right)$$

表明 $Ro \ll 1$ 与 $Ri \gg 1$ 是等价的，即层结高度稳定必与准地转相呼应。

第一类准地转运动实际上指中纬度天气尺度运动或水平尺度小于地球半径的大气长波，又称为天气尺度准地转运动。

(2) 第二类准地转运动—— $Ro < S \sim 1$

① $S \sim 1 \rightarrow$ 运动的水平尺度 L 与地球半径 a 相当，故可称行星尺度准地转运动。

② 尺度方程可化简为 $\frac{W}{H} \sim \frac{U}{L} S = \frac{U}{a}$ ，表明涡度方程中散度项与 β 项基本平衡；

运动具有定常属性；此外，铅直速度与水平尺度无关。

③ 水平散度与涡度的量级之比 $\frac{D}{\zeta} \sim S \sim 1$ ，即水平散度与涡度量级相同。

④ 同样的，考虑由涡度方程与绝热方程分析出的铅直速度量级相当

$$\frac{UH}{L} S \sim \frac{f_0 U^2}{\sigma g H} \Leftrightarrow \sigma \sim \frac{f_0 U}{g H^2} a$$

即静力稳定度与水平尺度 L 无关，与水平速度尺度 U 有关。

⑤ 同样的，将上述关系式与理查孙数相联系，可改写为

$$\frac{\sigma g H^2}{U^2} \sim \frac{f_0 L a}{U L} \Leftrightarrow Ri \sim Ro^{-1} S^{-1} / Ri Ro \sim S^{-1} \sim 1 / Ro^2 Ri \sim Ro S^{-1} < 1$$

上式表明第二类与第一类准地转运动的条件是不一样的。且 $Ro \ll 1$ 与 $Ri > 1$ 是等价的

5. 准地转方程组

(1) 准地转近似

指涡度方程、连续方程(或热力学能量方程)中除散度项外，水平速度和涡度都取为地转风和地转涡度。

【动力学意义】

取准地转近似后得到的准地转方程组,既突出了中纬度大尺度运动的准地转特征,又保留了维持准地转平衡所必须的水平辐合辐散,并且保持了位涡守恒和总能量守恒等重要性质,因此可以很好地描写中纬度大尺度运动的演变发展。

(2) 第一类准地转方程组

*为了方便应用,控制方程都在 p 坐标系下进行讨论。

- 涡度方程: $\frac{d(\zeta + f)}{dt} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

- 连续方程: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0$

联立上述两方程得 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_h (\zeta + f) + \beta v = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$, 取准地转近似, 有

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \zeta_g + \beta v_g = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

绝热条件下的热力学方程为(见 p 坐标系章节)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_h T + \omega T \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = 0$$

将 $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p}$ 代入上式, 令平均静力稳定度 $\bar{\sigma}_s = -\bar{\alpha} \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p} \sim -\alpha \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \omega \bar{\sigma}_s = 0$$

于是可以得到第一类准地转方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \zeta_g + \beta v_g = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \omega \bar{\sigma}_s = 0 \end{cases}$$

上式中, $\Phi = \bar{\Phi}(\text{const}) + \Phi'$, 方程具有以下特点

① 方程关于 ω, Φ' 是闭合的;

② 保持了绝热无摩擦条件下，位势涡度守恒与闭合系统能量均守恒。

(3) 第二类准地转方程组

对于第二类准地转运动，由于 $S \sim 1$ ， β 平面近似(指把地球球面看成平面，同时又考虑科氏力随纬度的变化，即用于简化局地直角坐标系下的大气运动方程)不再适用，研究这类运动应采用球坐标系。由于 $Ro \sim 10^{-2}$ (对于超长波， $L \sim 10^7 m$ ，万公里级别)，所以地转风关系是高度精确的，水平运动方程完全可以简化为地转风方程，即有

$$\begin{cases} -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + f v = 0 & (1) \\ -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - f u = 0 & (2) \end{cases} \quad (\lambda \sim \text{东西方向}, \varphi \sim \text{南北方向})$$

将 $\frac{1}{a} \left[\frac{\partial(1)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(2)}{\partial \lambda} \right]$ ，有

$$\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial \varphi} v + f \left(\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{a} \tan \varphi \right) = 0$$

注意到在球坐标系下， $\delta y = a \delta \varphi$ ，式中括号内正是球坐标系下，取薄层近似后的散度方程，所以上述方程又可简写为

$$\beta v + f D = 0 \quad (\text{Burger equation})$$

在第二类准地转方程组中，绝热方程和连续方程不在简化，核心是伯格方程。

6. 天气尺度的准地转位势倾向方程及应用

*位势倾向：位势高度随时间的变化，即 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \zeta_g + \beta v_g = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \omega \bar{\sigma}_s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_h^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h (\zeta_g + f) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} & (1) \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \omega \bar{\sigma}_s & (2) \end{cases}$$

【注】根据地转平衡有
$$\begin{cases} -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f v_g = 0 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - f u_g = 0 \end{cases}, \text{ 而 } \zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}, \text{ 联立得 } \zeta_g = \frac{\nabla_h^2 \Phi}{f}$$

将 $\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\bar{\sigma}_s} (2) \right) + (1)$, 得到准地转位势倾向方程如下

$$\left(\nabla_h^2 + \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h (\zeta_g + f) - \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial}{\partial p} \left(\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$$

上式左端称为**位势倾向的空间变化项**，右端第一项称为**绝对涡度平流项**，右端第二项称为**温度平流的垂直变化项**，这两项统称为**强迫项**。

在实际应用中，为了方便定性分析，需要对方程进行分析。假设 Φ 及 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 在水平方向上满足正弦波动变化，即

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = A(p, t) \sin kx \sin ly$$

因此有 $\nabla_h^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -(k^2 + l^2) A(p, t) \sin kx \sin ly = -(k^2 + l^2) \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ，对于中纬度天气尺度而言，从地面到对流层顶系统相位改变约 180° ，振幅随高度的变化可以近似

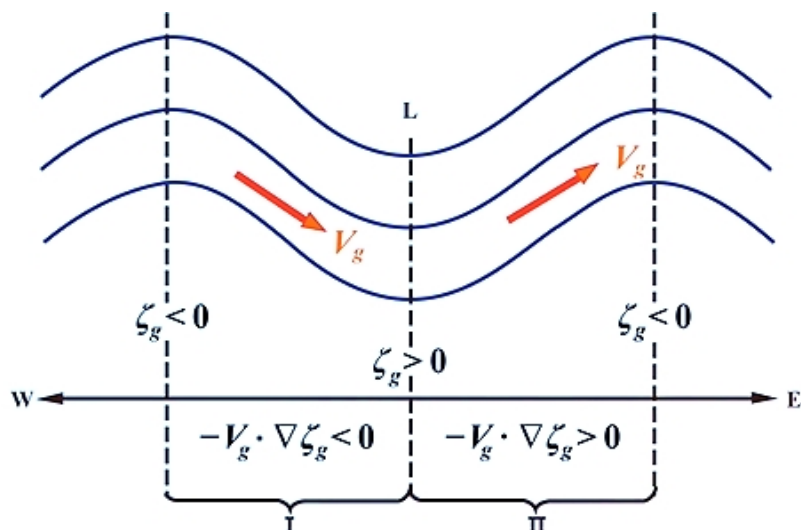
认为是 $A(p, t) \approx A_0(t) \cos \left(\frac{\pi p}{p_{00}} \right)$ ，故有 $\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\pi}{p_{00}} \right)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ，综合考虑，有

$$\left(\nabla_h^2 + \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \approx - \left[(k^2 + l^2) + \left(\frac{\pi}{p_{00}} \right)^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

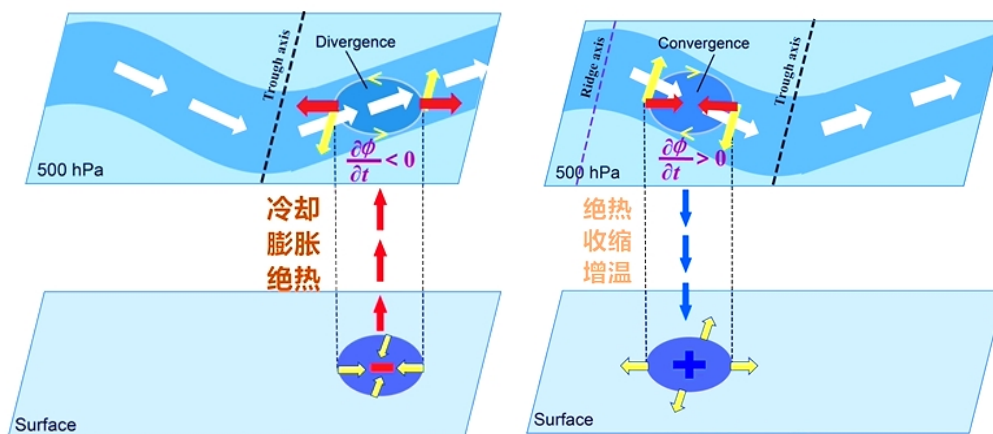
于是准地转位势倾向方程可以定性地表示为

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} \propto -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h (\zeta_g + f) - \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial}{\partial p} \left(\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$$

(1) 相对涡度平流项 $-\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \zeta_g$



前面已知自然坐标系下的涡度方程可以表示为 $\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$ ，由此可知，槽区为气旋性涡度最大(正的最大)的区域，脊区是反气旋性涡度最大(负的最小)的地方，槽前脊后为西南风，借助西南风将正相对涡度从大的往小的方向输送，槽前脊后有正的相对涡度平流($-V_g \cdot \nabla_h \zeta_g > 0$)，根据位势倾向方程有 $\frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0$ ，会导致负变高(等高面要降低)。下图进一步解释了相对涡度平流的影响机制。



▲ 相对涡度平流的影响机制示意图

还是以**槽前脊后**为例。西南风输送正涡度平流→槽前脊后区域的气旋性涡度增加→受科氏力的影响，气旋性涡度增加引起向外水平辐散→根据达因补偿原理(质量守恒)，地面减压，出现辐合，产生上升运动→空气上升绝热膨胀，气柱冷却收缩，等压面间的厚度减小，产生负变高。

在槽脊线上，由于涡度平流没有梯度变化，从而 $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ，即在槽脊线上变高为 0。

总结：对于对称槽脊系统，槽前脊后负变高；槽后脊前正变高；槽脊线上变高为 0；由此形成的变高梯度会使得槽脊向东移动，但是槽脊不会发展（即槽脊的振幅不会改变）。

(2) 地转涡度平流项 $-V_g \cdot \nabla_h f \Leftrightarrow -\beta v_g$

在槽前脊后， $v_g > 0$ ，所以 $-\beta v_g < 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0$ ；在槽后脊前， $v_g < 0$ ，所以 $-\beta v_g > 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0$ 。因此，地转涡度平流引起的变高梯度会使得槽脊西退，与相对涡度平流的效果相反。

【注】槽脊的实际移动方向取决于哪一种涡度平流占优势。对于短波，即 $L \leq 3000\text{km}$ ，相对涡度平流占优势；对于超长波，即 $L \geq 10000\text{km}$ ，行星涡度平流占优势。

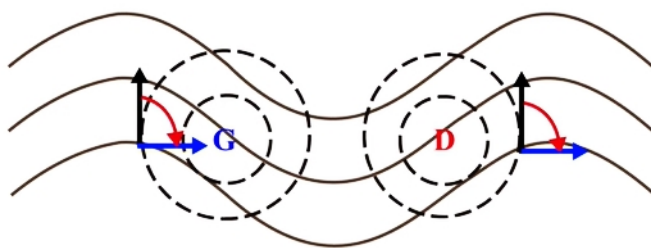
(3) 温度平流随高度变化项 $-\frac{\partial}{\partial p} \left(V_g \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$

因为 $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p}$ ，所以有 $-\frac{\partial}{\partial p} \left(V_g \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = \frac{R}{p} \frac{\partial}{\partial p} (V_g \cdot \nabla T)$ ，亦即有

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} \propto \frac{\partial}{\partial z} (-V_g \cdot \nabla T)$$

一般来说，在对流层自由大气中，一般温度平流总是随高度减弱的，下面只讨论暖平流随高度减弱和冷平流随高度减弱的情况。

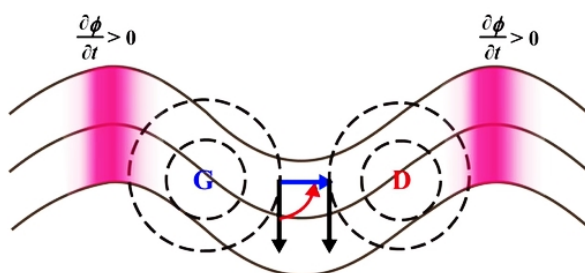
如果暖平流 ($-V_g \cdot \nabla T > 0$) 随高度减弱，则 $\frac{\partial}{\partial z} (-V_g \cdot \nabla T) < 0$ ，故 $\frac{\partial \phi}{\partial t} > 0$ 。如下图，低压中心前部与高压中心后部之间对应 500hPa 脊线处，利用热成风关系，风随高度顺转，气层中有暖平流，气柱增温 (500hPa 以下气柱明显增温) 膨胀，500hPa 等压面脊线处位势高度增加，即脊加强。



灰色实线表示500hPa图上等高线，
黑色虚线表示地面图上的等压线

▲ 天气图上存在暖平流随高度减弱的情况的位置

如果冷平流随高度减弱，则 $\frac{\partial}{\partial z}(-\mathbf{V}_g \cdot \nabla T) > 0$ ，故 $\frac{\partial \phi}{\partial t} < 0$ 。如下图，地面低压中心后部与高压中心前部的区域，对应 500hPa 槽线处，风随高度逆转，此气层有冷平流，气柱降温收缩(500hPa 以下气柱明显降温)，500hPa 等压面槽线处位势高度降低，槽加深。



灰色实线表示500hPa图上等高线，
黑色虚线表示地面图上的等压线

▲ 天气图上存在冷平流随高度减弱的情况的位置

总结: 与涡度平流相比，温度平流使得槽脊强度（振幅）发生变化。暖平流随高度减弱使得脊加强，冷平流随高度减弱使得槽加深。

7. 准地转 ω 方程

$$\begin{cases} \nabla_h^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h (\zeta_g + f) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} & (1) \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \omega \bar{\sigma}_s & (2) \end{cases}$$

将 $\frac{1}{\bar{\sigma}_s} \left[\frac{\partial(1)}{\partial p} - \nabla^2(2) \right]$, 得到准地转 ω 方程为

$$\left(\nabla_h^2 + \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \frac{f_0}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h (\zeta_g + f)] - \frac{1}{\bar{\sigma}_s} \nabla^2 \left(\mathbf{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$$

上式左端称为 ω 的空间变化项; 右端第一项称为绝对涡度平流的垂直变化项, 右端第二项称为温度平流的 Laplace 项, 这两项统称为强迫项。准地转 ω 方程的理论优势在于, 根据瞬时位势场即可诊断出垂直速度场。

采用和 7 同样的讨论方式, 有 $\left(\nabla_h^2 + \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = - \left[(k^2 + l^2) + \left(\frac{f_0 \pi}{p_{00}} \right)^2 \right] \omega$, 所以有定性的关系

$$\omega \propto \frac{f_0}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial}{\partial p} [-\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h (\zeta_g + f)] + \frac{R}{\bar{\sigma}_s p} \nabla^2 (-\mathbf{V}_g \cdot \nabla T)$$

(1) 绝对涡度平流随高度的变化 $\frac{f_0}{\bar{\sigma}_s} \frac{\partial}{\partial p} [-\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h (\zeta_g + f)]$

$\omega \propto \frac{\partial}{\partial p} [-\mathbf{V}_g \cdot \nabla (\zeta_g + f)]$ 。前面提到, 对于波长 < 3000km 的短波系统, 以相

对涡度平流 $-\mathbf{V}_g \cdot \nabla \zeta_g$ 为主。在中纬度地区, 高低压系统中心的相对涡度平流, 无论正负, 总是随高度增加 (随气压减小) 的。当有正相对涡度平流 ($-\mathbf{V}_g \cdot \nabla \zeta_g > 0$) 时, 有 $\frac{\partial}{\partial p} (-\mathbf{V}_g \cdot \nabla \zeta_g) < 0$, 从而 $\omega < 0$, 对应上升运动。同理,

有负相对涡度平流时对应下沉运动, 其物理解释见位势倾向方程处的图解。

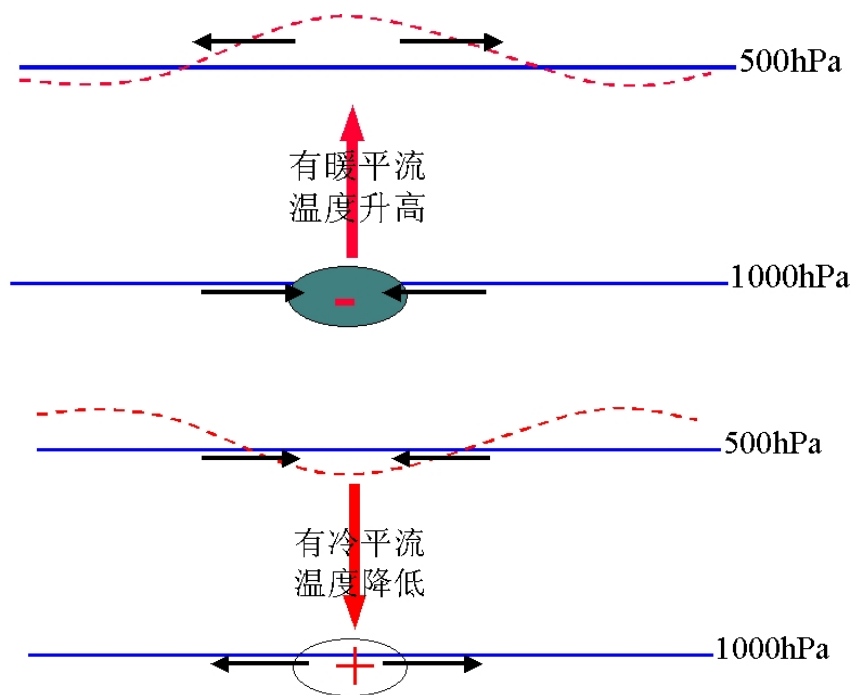
▲ 地面高低压中心附近的等涡度线和等压线基本上平行, 相对涡度平流很弱。

(2) 温度平流的 Laplace 项 $\frac{R}{\bar{\sigma}_s p} \nabla^2 (-\mathbf{V}_g \cdot \nabla T)$

前面在对准地转位势倾向方程做定性分析时, 有结论 $\nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \propto -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, 所以

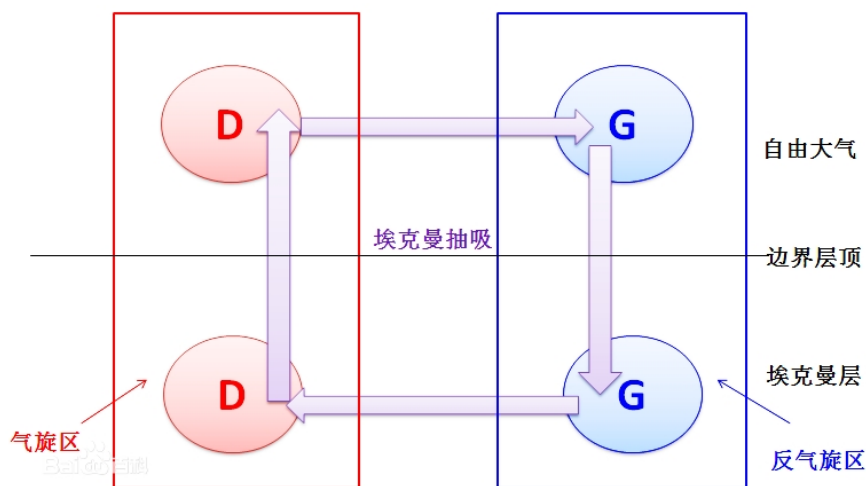
$\nabla^2 (-\mathbf{V}_g \cdot \nabla T) \propto \mathbf{V}_g \cdot \nabla T$, 从而 $-\omega \propto -\mathbf{V}_g \cdot \nabla T$, 所以有暖平流时, $\omega < 0$, 有上升运

动，有冷平流时， $\omega > 0$ ，有下沉运动。



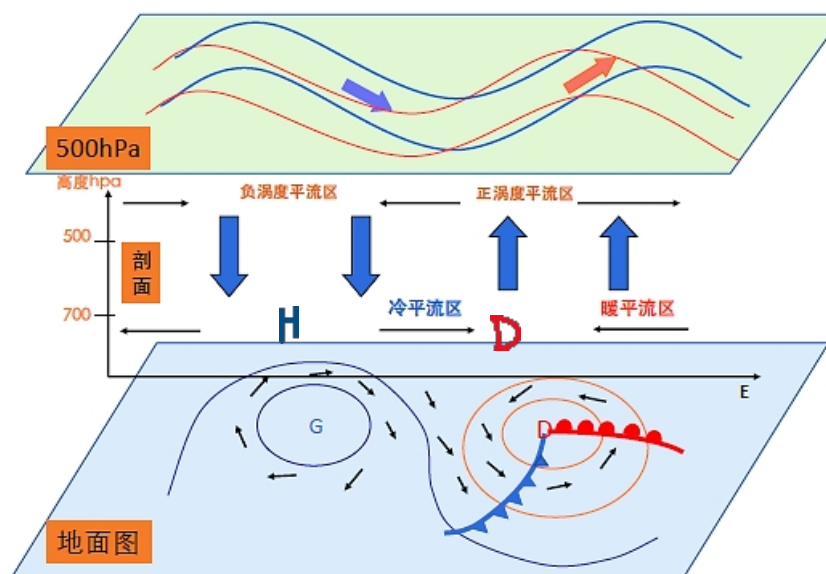
▲ 温度平流引起的上升下沉运动的机理示意图

▲ Ekman 抽吸引起的次级环流与准地转运动引起的次级环流的比较



Ekman 抽吸造成的二级环流，其强迫因子在边界层，即由于边界层的湍流摩擦作用，使得 Ekman 层中产生了水平辐合(对应低压)辐散(对应高压)，或叫质量输运。由于我们假设大气下边界为刚性，所以 $z = 0, w = 0$ 。Ekman 抽吸造成的铅

直速度出现在边界层顶，表达式为 $w(H_B) = \zeta_g \left(\frac{K}{2f} \right)^{\frac{1}{2}}$ 。在准地转气旋区域， $\zeta_g > 0$ ，故在 Ekman 层中会产生向气旋中心的质量输送(水平辐合)。而根据前述的表达式，有 $w(H_B) > 0$ ，由此必然会在自由大气中形成水平辐散，起到削弱气旋的作用(Ekman 二级环流是在基本环流上引发的，所以我们在讨论时仍先从考虑基本环流背景入手)。

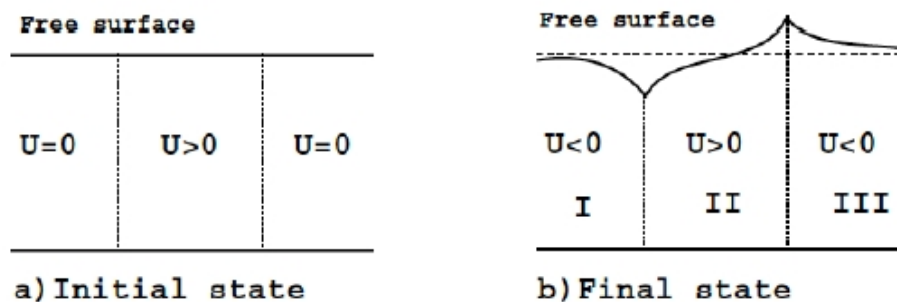


大气一般是斜压的，所以绝热条件下，准地转 ω 方程中等式右边两项的和不会为零，表明斜压大气中准地转运动不可能是纯水平的，在准地转水平环流之上必叠加有铅直环流——二级环流。在绝热情况下，平衡的破坏与平流过程有关，平衡的建立是通过垂直运动调整气压场、温度场、流场之间的关系来实现的。没有平衡的破坏就没有天气系统的演变和发展，没有垂直运动就没有平衡的迅速建立，系统的演变发展过程就不可能是准地转的。

#Ekman 抽吸引起的二级环流会对天气系统有削弱，而准地转运动引起的二级环流是天气系统发展演变的产物，起作用是为了维持准地转平衡过程。

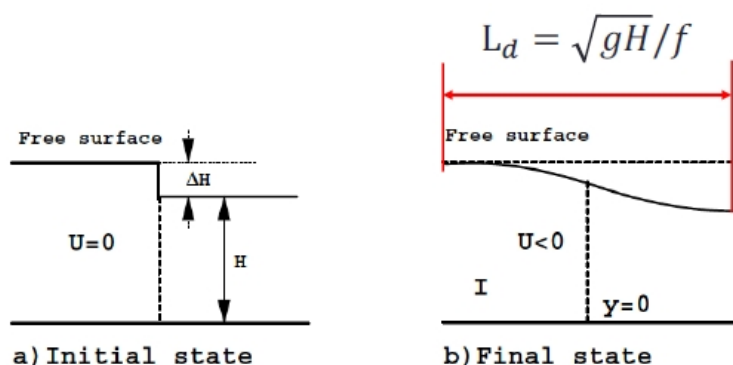
8. 正压地转适应过程

(1) 地转适应过程的物理图像



▲ 压强向速度适应

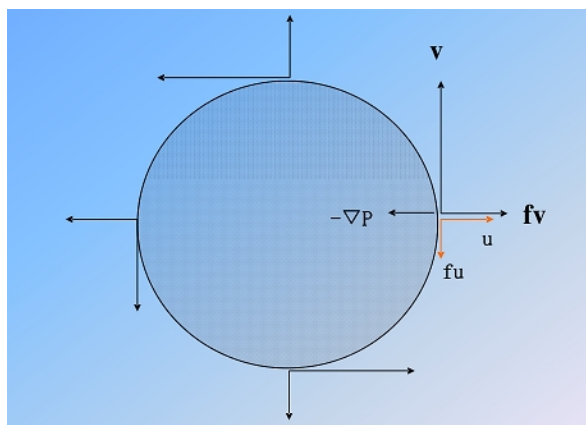
第一种地转适应情形为：压强场向速度场适应。如上图 a) 所示，假设初始为均匀静止的海洋，中间在风应力的作用下，产生一个自西向东的流动。受科氏力的影响(或者利用 Ekman 输运解释)，流体向右“拐”，于是，两侧原本静止的流体均会受到向右的压强梯度力，为了保持平衡，需要两侧的流体产生一个相反方向的流动，最终经过适应，形成 b) 的情形。



▲ 速度向压强适应

第二种地转适应情形如上图所示，为速度场向压强场适应。初始时刻，由于流体自由面存在一个高度差，由此产生了一个水平压强梯度力，因此需要一个自东向西的流速，来与这个压力平衡，适应的结果是使得原来不连续的自由面变成连续的斜面，而这个斜面的水平宽度，正是 Rossby 变形半径的大小。

(2) 地转适应过程的定性分析



假设初始时刻气压水平均匀分布，只有一个水平尺度有限的气旋，此时，气压场与流场是不平衡的。其适应过程为：

- ① 受地球旋转效应的影响，气旋环流上的微团受到一个大小为 f_v 的离心科氏力的作用；
- ② 假设科氏力大于均匀的水平气压梯度力微团，那么将会产生向外的径向加速度与速度，引起质量向外输送(即辐散)由此又会产生一个切向的科氏力 f_u ，该力的方向与气旋环流的切向速度相反，从而起到削弱气旋环流的作用；
- ③ 气旋环流的速度减小，使得 f_v 不断减小，直至与水平压强梯度力 $-\nabla p$ 平衡；
- ④ 径向的合力为 0 后，径向速度却是最大值，由于惯性作用，质量输送依然向外，使得 $-\nabla p > f_v$ ，径向速度要减小；
- ⑤ 当径向速度减小为零时，水平气压梯度力达到最大，此后就产生了指向气旋中心的径向速度，质量开始向气旋中心辐合，过程朝着与原来相反的方向进行，也就是说，气流将围绕平衡位置做惯性振荡，而这种振荡将以波的形式传播出去。

(3) 正压适应方程组

前面提到，地转适应是一个线性过程，所以平流项可以忽略。线性化的正压浅水方程组为(f 平面近似)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad c_0^2 = gH \quad (H \text{ 为等温大气高度})$$

将前两式通过对 x, y 求偏导、做加减运算后，转化为用涡度和散度表示

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + f_0 D = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial t} - f_0 \zeta + \nabla^2 \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 D = 0 \end{cases}$$

课本涡度方程 6.3 节指出，给定的水平流场可以唯一的分解为无辐散(存在流函数)

和无旋(存在势函数)两个部分，所以引入流函数和速度势分别表示 u, v 风：

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \Rightarrow \zeta = \nabla^2 \Psi, D = \nabla^2 \chi$$

于是上述方程又可以改写成

$$\begin{cases} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + f_0 \chi \right) = 0 \\ \nabla^2 \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} - f_0 \Psi + \Phi \right) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \nabla^2 \chi = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{假设初始非地转扰动扰动有限}]{\text{前两式Laplace算子中的函数为调和函数}} \begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + f_0 \chi = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} - f_0 \Psi + \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \nabla^2 \chi = 0 \end{cases}$$

右边的方程组称为奥布霍夫地转适应方程组，解这个方程组需要给出初始条件。

其求解过程比较复杂这里不做推导，这里不解方程只做一下简单讨论。

① 考虑**定常情况**，此时 $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ ，设定常解为 $\bar{\Psi}, \bar{\chi}, \bar{\Phi}$ ，于是由方程可

以求得

$$\bar{\chi}=0, \bar{\Psi}=\frac{1}{f_0}\bar{\Phi} \Rightarrow \nabla \bar{\Psi}=\frac{1}{f_0}\nabla \bar{\Phi} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}=-\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y}=-\frac{1}{f_0}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \\ \bar{v}=\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x}=\frac{1}{f_0}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \end{cases}$$

上述结果表明, 定常解是无辐散(位势流不存在)的涡旋运动, 流线与等压线重合, 风场与气压场满足地转风关系, 这正是调整后的演变阶段。

② 消去变量 Ψ, Φ , 得到 $\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \chi + f_0^2 \chi = 0$, 表明位势涡度运动满足波动方程, 而这个方程描述的正是重力惯性外波。

③ 消去速度势 χ , 得到方程 $\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \Psi - \frac{f_0}{c_0^2} \Phi \right) = 0$, 表明 $\nabla^2 \Psi - \frac{f_0}{c_0^2} \Phi$ 在地转适应

过程中是一个守恒量, 这个物理量正是线性化之后的位势涡度。

[注] 位势涡度的表达式推导

正压准地转方程组为(可由正压浅水原始方程组通过摄动法得到)

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g + f_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

消去散度项, 得到

$$\frac{d}{dt} (\zeta_g + f - L_0^{-2} \Psi) = \frac{d}{dt} (f_0 + \beta y + \nabla^2 \Psi - L_0^{-2} \Psi) = 0 \left(\Psi = \frac{\Phi}{f_0} \right)$$

$q = f_0 + \beta y + \nabla^2 \Psi - L_0^{-2} \Psi$ 称为正压准地转位势涡度。

因此, 奥布霍夫方程组的解可以分为 **定常解和波动解** 两个部分。

(4) 地转适应与初始扰动尺度的关系

下面通过尺度分析法来说明地转适应与扰动尺度的关系。

将地转涡度记为 $\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \nabla^2 \Psi = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi$, 代入前面的正压适应方程

组中, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -f_0 D \\ \frac{\partial D}{\partial t} = f_0 (\zeta - \zeta_g) \\ \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\frac{c_0^2}{f_0} \nabla^2 D = 0 \end{cases}$$

上述第一个方程为涡旋变化的方程,它表明涡旋变化是通过科氏力与散度场相互作用而调整。当 $\zeta = \zeta_g$ 时,风压场相平衡,运动时定常的;当 $\zeta \neq \zeta_g$ 时,平衡被打破,引起散度场变化,从而调整涡旋场(风场)和气压场,直到达到地转适应过程。

考虑涡旋场变率与地转涡旋场的变率的相对大小,做尺度分析如下

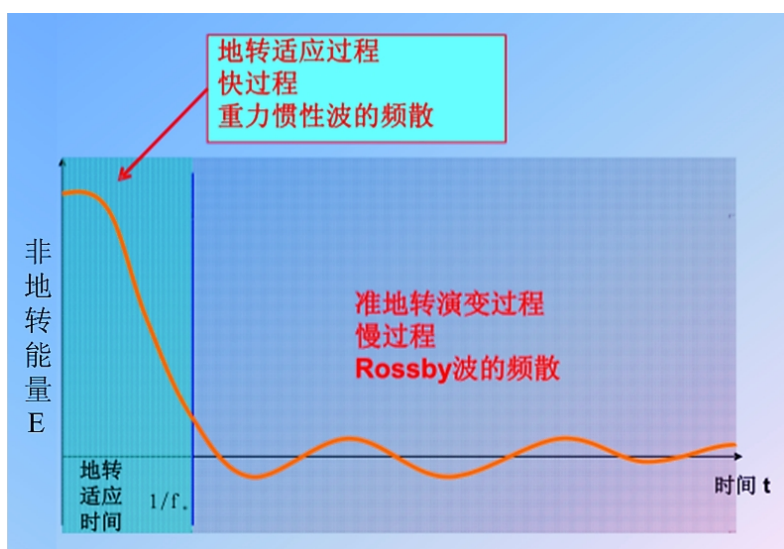
$$\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{\frac{\partial \zeta_g}{\partial t}} = \frac{1}{L_0^2} \frac{D}{\nabla^2 D} \xrightarrow[D \sim D^*]{(x,y) \sim L} \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}{\frac{\partial \zeta_g}{\partial t}} \sim \left(\frac{L}{L_0} \right)^2$$

$L > L_0$ 时,适应过程中涡旋场变化快于气压场,故涡旋场去适应气压场;

$L < L_0$ 时,适应过程中涡旋场变化慢于气压场,故气压场去适应涡旋场。

【总结】地转适应过程的重要知识点

- **运动性质:** 位势运动占主导,有很强的水平辐合辐散。
- **物理机制:** 重力惯性外波对非地转扰动能量的频散。



- **数学模型:奥布霍夫地转适应方程组。**
- **适应的速度: 主要依赖于重力惯性外波的群速和初始非地转扰动的水平尺度和强度。**
- **适应的方向: $L > L_0$, 风场适应气压场; $L < L_0$, 气压场适应风场。**

9. 斜压大气的适应过程的基本性质

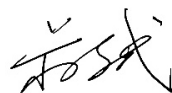
- (1) 运动性质: 位势运动占主导, 有很强的水平辐合辐散和垂直运动。
- (2) 物理机制: **重力惯性内波**对非地转扰动能量的频散。
- (3) 数学模型: 斜压地转适应方程组。
- (4) 适应的速度: 主要依赖于重力惯性内波的群速和初始非地转扰动的水平尺度和强度。
- (5) 适应的方向: $L > L_0$, 风场适应气压场; $L < L_0$, 气压场适应风场。
- (6) 对于同一水平尺度的非地转扰动, 相对而言, 斜压大气中气压场容易维持, 高空流场比低空流场更容易维持。
- (7) 在斜压大气中, 初始扰动的铅直结构也对适应过程及其性质有影响, 一般在低层或浅薄系统的扰动中, 气压场容易维持; 高层的或深厚的系统中, 风场更容易维持一些。

[ch10 地转适应理论 - 道客巴巴 \(doc88.com\)](#)

[地转适应过程与准地转演变 - 道客巴巴 \(doc88.com\)](#)

附录 I 《动力气象学》练习题

编者的话 本练习题参考了华睿同学提供的部分题目以及网络上收集到的资料。同时,也结合了本人对课程的理解,旨在使本练习题目适用于本学院选修《动力气象学》的同学。想要说明的是,本练习题不提供答案。首先,整理题库利用的是自己的闲暇时间,如果要整理出一套题目并且给出正确答案和详细的解答过程——并且答案和解释需要进过校对,所以这是一件耗时过程十分长、需要严谨对待,并不是我一己之力可以完成,也绝非我这种非专业人士可以做到。其次,没有答案对很多同学来说是一件很懊恼的事情,因为不知道自己写的是否正确,万一是错的而后考试考到会让自己丢分。这实际上显得有些缺乏自信。平时认真踏实地把知识点学透之后,做练习的时候脑袋里是可以跳出知识点的。如果对知识点的一些概念模糊不清楚,那么可以对照课本、老师的课件、自己的笔记对其再次强化理解记忆,然后再去做题,我想是不会写错的,除非涉及一些计算的题目。通过写这种没有答案的练习题来锻炼自己的自信是一种不错的方法。在这个过程中需要自己说服自己,为什么这道题我要选这个而不选哪个;这道题和课本上哪个地方是相似的……这个过程其实就是在自我考察对知识点掌握情况如何,如此反复,我想我们掌握知识点的能力以及自信会有提高的。最后,没有答案的题目可以促进同学们之间、同学们和老师们的讨论交流。这套题目中的一些题目是经过我重新改编的,涉及的一些符号,不一定与老师课件和课本上相同,此外,这套题目的一些答案,可以从我前面整理的学习资料中找到答案。



2022年6月24日
于青岛,中国海洋大学

一、单项选择题

1. Boussinesq 近似可以滤掉以下哪些波动? _____
A. 声波 B. 重力波 C. 惯性波 D. Rossby 波
2. 以下说法正确的是_____.
A. 大气热力性质的变化可改变大气的运动特性.
B. 由于大尺度运动具有准地转特性,故大气的水平运动加速度为零.
C. 中纬度大尺度大气运动呈现准水平特征,没有垂直运动.
D. 满足准地转运动特征的大气,气压梯度力、科里奥利力及摩擦力同量级.
3. 在常值通量层中,层结稳定度的增加会导致风速_____.
A. 增大 B. 减小 C. 不变
4. 在大气 Ekman 层中,摩擦力的大小_____.

- A. 与垂直风切变的大小成正比
 - B. 与地转偏差的大小成正比
 - C. 与实际风的风速的大小成正比
 - D. 与地转风的大小成正比
5. 对于中纬度大气的平均状况而言, 从对流层低层向上到平流层, 位势涡度会发生怎样的变化_____.
- A. 位涡不会有明显变化.
 - B. 位涡会在对流层迅速增加.
 - C. 位涡会在对流层迅速减少.
 - D. 位涡在动力对流层顶附近会迅速增加.
6. 在北半球, 下列说法正确的是_____.
- A. 在高压脊区, 离心力与气压梯度力方向相反.
 - B. 在高压脊区, 切向地转偏差是反风向的.
 - C. 在低压槽区, 切向地转偏差是顺风向的.
 - D. 在低压槽区, 离心力与科氏力方向一致.
7. 大气中的有效位能通常只占大气总位能的(); ()的大气有效位能能够转化为动能. _____
- A. 20%, 0.05%
 - B. 15%, 0.01%
 - C. 0.5%, 0.01%
 - D. 0.5%, 0.05%
8. 中高纬度天气尺度系统通常自西向东移动, 其中的原因是_____.
- A. 系统水平尺度较小, 使得相对涡度平流大于行星涡度平流
 - B. 系统水平尺度较小, 使得相对涡度平流小于行星涡度平流
 - C. 系统水平尺度较大, 使得相对涡度平流大于行星涡度平流
 - D. 系统水平尺度较大, 使得相对涡度平流小于行星涡度平流
9. 微扰动线性化法适用于讨论天气系统发展的哪个阶段? _____.
- A. 初始阶段
 - B. 发展旺盛期
 - C. 发展成熟期
 - D. 后期锢囚阶段
10. 常值通量层中_____.
- A. 风速和垂直风切变都不受粗糙度影响.
 - B. 风速不受粗糙度影响, 而垂直风切变受粗糙度影响.
 - C. 风速和垂直风切变都受到粗糙度的影响.
 - D. 风速受粗糙度影响, 而垂直风切变与粗糙度无关.

11. 在所有大气的基本能量中, 哪种能量所占的比例最大? _____.
A. 位能 B. 内能 C. 潜热能 D. 动能
12. 以下重力内波的特征中, 错误的是_____.
A. 相速度和群速度垂直, 为频散波.
B. 层结稳定越弱波速越快.
C. 以浮力振荡频率 N 为最大频率.
D. 相速度和群速度矢量在水平方向的分量方向一致, 大小不同; 在垂直方向的分量方向相反, 大小一致.
13. 对中纬度大尺度系统而言_____.
A. 涡度和散度具有相同量级 B. 涡度量级大于散度量级
C. 散度量级大于涡度量级 D. 散度的量级一般为 $10^{-5}s^{-1}$
14. 当风自高压吹向低压时, 气压梯度力对空气质点做功, 能量由()转换为(). 可见()运动是大气动能变化的重要原因. _____.
A. 位能 动能 非地转 B. 动能 位能 非地转
C. 位能 动能 地转 D. 动能 位能 地转
15. 由于太阳辐射的纬度差异, 低纬度为被加热和高纬度发生冷却, 形成了_____.
A. 涡动动能 B. 纬向平均动能
C. 纬向平均有效位能 D. 涡动有效位能
16. 以下因子中, 对相对环流没有影响的是_____.
A. 斜压大气 B. 水平辐合辐散 C. 南北运动 D. 正压大气
17. 关于科里奥利力, 以下说法错误的是_____.
A. 只有当气块具有相对地球的运动速度时, 科氏力才会起作用.
B. 科里奥利力不会改变运动的大小.
C. 科里奥利力是引起大气涡旋运动产生的原因之一.
D. 在全球大气的运动中, 科里奥利力均使得大气运动方向右偏.
18. 旋转减弱作用指的是_____.
A. 一级环流因摩擦力所导致的粘性耗散而减弱.
B. 一级环流和二级环流在 Ekman 抽吸的作用下同时减弱.
C. 二级环流因摩擦力所导致的粘性耗散而减弱.

- D. 一级环流因 Ekman 抽吸所产生的二级环流而减弱.
19. 在北半球, 当气块向南运动时, 由于 β 效应, 将引起局地相对涡度____.
- A. 增大 B. 减小 C. 不变
20. 中纬度大尺度大气运动的特点不包括____.
- A. 准水平 B. 准水平无辐散 C. 准静力平衡 D. 非地转
21. 在等压面坐标系中, 涡度方程中力管项实际上是包含在____项中.
- A. 力管项 B. 平流项 C. 扭转项 D. 散度项
22. 正压不稳定的扰动发展能量来自____, 斜压不稳定的扰动发展能量来自____.
- A. 纬向气流平均动能 有效位能
B. 扰动动能 有效位能
C. 有效位能 纬向气流平均动能
D. 有效位能 扰动动能
23. 当等压面上出现____, 实现全位能转换为动能.
- A. 暖空气上升, 冷空气下沉 B. 冷空气上升, 暖空气下沉
C. 暖空气上升, 冷空气上升 D. 暖空气下沉, 冷空气下沉

二、多项选择题

1. p 坐标系中的涡度方程包含有以下哪些项?_____.
- A. 平流项 B. 散度项 C. 扭曲项 D. 力管项
2. 对于严格的地转风, 须满足哪些条件?_____.
- A. 等压线与纬线平行 B. 定常的气压场
C. 无摩擦 D. 正压均质流体
3. 地球旋转效应对重力外波的影响中, 正确的有_____.
- A. 使重力外波变为频散的惯性重力外波
B. 对波动频率影响很大
C. 使相速度变大
D. 使群速度变大
4. 下列关于自由大气中的地转偏差, 表述正确的是_____.

- A. 在北半球指向加速度方向右侧
 - B. 与柯氏参数成正比
 - C. 在北半球与加速度方向垂直
 - D. 与加速度项成正比
5. 地球大气的基本特征有哪些?_____.
- A. 大气是动力场中的旋转流体
 - B. 大气是层结流体
 - C. 大气中含有水汽
 - D. 大气的下垫面是不均匀的
6. 关于尺度分析, 描述正确的是_____.
- A. 尺度分析目的是突出物理问题且简化数学处理.
 - B. 大气中存在着空间上和时间上具有各种尺度的现象.
 - C. 所谓简化, 就是将方程组中的项量级比较小的项忽略.
 - D. 对于不同尺度的天气系统, 其控制方程可能是不同的.
7. 对静止罗斯贝波的波长, 以下正确的有_____.
- A. 西风基流越大, 静止波越长
 - B. 西风基流越小, 静止波越长
 - C. 纬度越高, 静止波越长
 - D. 纬度越低, 静止波越长
8. 正压无摩擦大气中, 垂直涡度的局地变化与哪项有关?_____.
- A. 平流项
 - B. 扭转项
 - C. 散度项
 - D. 力管项
9. 气块在运动过程中, 导致其位势涡度变化的物理过程有_____.
- A. 气压梯度力
 - B. 惯性力
 - C. 摩擦力
 - D. 非绝热加热
10. 下列哪些环流的形成与力管项有关?_____.
- A. 山谷风环流
 - B. 海陆风环流
 - C. 地转风水平环流
 - D. 锋面次级环流
11. 中纬度大尺度大气运动的特点包括_____.
- A. 准水平运动
 - B. 准水平无辐散
 - C. 准静力平衡
 - D. 准地转、准定常
12. 下面关于有效位能正确的表述有?_____.
- A. 有效位能约占全位能的一半.
 - B. 有效位能不能被全部释放.
 - C. 有效位能的产生是由于太阳短波辐射对地球的不均匀加热.
 - D. 纬度越高, 有效位能越大.

13. 关于重力外波，正确的是_____。
- A. 静力平衡下，属于非频散波，
 - B. 静力平衡下，属于快速波。
 - C. 源于大气边界自由面上的垂直扰动。
 - D. 通过垂直气柱辐合辐散交替变化进行传播。
14. 下面哪项是经典 Ekman 层解析解的必要假设?_____。
- A. 水平加速度为 0
 - B. 空气密度是常数
 - C. 气压梯度力、地转风不随高度改变
 - D. 垂向湍流交换系数是常数
 - E. 刚性下边界条件
15. p 坐标的优点有哪些?_____。
- A. 能够更好地适应等压面分析的需要
 - B. 方程组中减少了密度这个变量
 - C. 气压梯度力项变为线性项
 - D. 方程组的下边界条件更加简单
16. 如何理解 p 坐标系中铅直速度 ω 的含义?_____。
- A. ω 等于零，表明气团没有垂直运动
 - B. ω 大于零，表明气团上升
 - C. ω 的定义式为 dp/dt ，即气压的个别变化率
 - D. ω 可理解为局地空气的气压随时间的变化率
17. 位势涡度变化的影响因素有_____。
- A. 感热加热
 - B. 摩擦力
 - C. 潜热加热
 - D. 科氏力
18. 关于大气基本能量的组合形式，下列说法正确的是_____。
- A. 单位质量空气具有的焓称为显热能，它是内能和压力能的组合，只与温度有关。
 - B. 全位能是内能和位能的组合，因为内能与位能的变化方向一致，放在一起便于讨论。
 - C. 温湿能又称为湿焓，是内能、压力能和潜热能的组合。
 - D. 干静力能是显热能与位能的组合

三、名词解释(乱序版)

- | | | | |
|-------------------|-----------------|-------------|----------|
| 1. 梯度风 | 2. β 平面近似 | 3. 地转偏差 | 4. 频散波 |
| 5. 斜压不稳定 | 6. 惯性不稳定 | 7. 正压大气 | 8. 准地转近似 |
| 9. 热成风 | 10. 罗斯贝数 | 11. 薄层近似 | 12. 尺度分析 |
| 13. 地转演变 | 14. 地转运动 | 15. 正压不稳定 | 16. 地转适应 |
| 17. Boussinesq 近似 | 18. 次级环流 | 19. CISK 机制 | 20. 有效位能 |
| 21. Kelvin 环流定理 | 22. 平衡流场 | 23. 上游效应 | 24. 温度平流 |
| 25. 罗斯贝数 | 26. Ekman 抽吸 | 27. 旋转减弱 | 28. 尺度 |
| 29. 平流时间尺度 | 30. 位势涡度 | 31. 基别尔数 | 32. 理查森数 |
| 33. 相对环流定理 | 34. 平衡方程 | 35. 干静力能 | 36. 闭合系统 |
| 37. 条件不稳定 | 38. 准地转近似 | | |

四、简答题

1. 大气运动遵循哪些定律？这些定律推导出了哪些方程？并指出哪些方程是预报方程，哪些是诊断方程。
2. 什么是局地直角坐标系？与一般的直角坐标系有何不同
3. 什么尺度分析？为什么要进行尺度分析？
4. 为什么常常根据水平尺度对大气运动进行分类？
5. p 坐标系建立的数学和物理条件分别是什么？其优点和缺点？
6. 什么是自然坐标系？写出自然坐标系下运动方程的形式。自然坐标系有什么优缺点？
7. 推导直角坐标系下和 p 坐标系下的地转风的矢量表达式，地转风有何特点？
8. 什么是梯度风？为什么在气旋性环流中风速和气压梯度都可以无限增大？
9. 利用梯度风分析反气旋环流的特点。
10. 什么是热成风？写出其数学表达式。
11. 利用热成风与冷暖平流的关系，回答以下问题：(1) 为什么说热成风仅存在于斜压大气中？(2) 小明背风而立，观测到较低的云从左向右移动，较高的云向前远去。请问未来该地区的大气稳定度如何变化？(3) 在没有高空资料的情况下，有经验的预报员可以根据地面风和云的移动来判断温度平流。请你对此进行解释？(4) 小明迎风而立，观察到高空的云从左手边向右手边移动。请问该地区未来气温可能如何变化？为什么？
12. 什么是地转偏差？边界层中和自由大气中的地转偏差有什么特点？对大气运

动的演变发展有何重要作用?

13. 什么是(单位压容)力管? 如何理解力管的动力作用? 并列举两个与力管作用有关的实际现象。
14. 写出 p 坐标系的涡度方程, 方程包含有哪几项? 各自的物理意义是什么? 并与直角坐标系下的涡度方程比较异同。
15. 正压条件下, 相对环流的变化率受什么影响?
16. 什么是绝对环流定理? 什么是相对环流定理? 相对环流定理有什么优缺点?
17. 什么是大气行星边界层? 大气行星边界层可分为几个层次? 说明各层次的主要特点。
18. 混合长理论的两个基本假设是什么? 它有什么不足之处?
19. 什么是 Ekman 抽吸? 什么是次级环流? 什么是“旋转减弱”?
20. 什么是有效位能? 有什么特点?
21. 位能和动能之间是如何转化的?
22. 纬向平均动能和扰动动能之间是如何转化的?
23. 大气中内能、重力位能、动能、潜热能、有效位能与全位能的比例是多少?
24. 微扰动法的基本思想是什么? 能否由于有限振幅的波动情形?
25. 什么是标准波形法?
26. 什么是滞弹性近似? 什么是 Boussinesq 近似? Boussinesq 近似近似滤掉了大气中的哪些波动?
27. 考虑一维情形, 请分别写出声波、兰姆波、重力外波、惯性重力外波、Rossby 波的形成机制和频率表达式。
28. 惯性内波和重力内波的相速度与群速度存在怎样的关系? 请写出二者的矢量分解形式, 并比较他们在水平及铅直方向上的分量有何特点。再写出重力惯性内波的分量形式的表达式, 探讨重力惯性内波的性质更趋近于前述两种波中的哪一个。
29. 考虑一维情形, Rossby 波是如何传播的? 频散特性如何?
30. 什么是“噪音”?
31. 分别给出声波、重力惯性外波、重力惯性内波的滤波条件。
32. 涡度平流会对高空槽脊的影响如何?
33. 什么是地转适应过程? 什么是准地转演变过程? 简述这两种过程的基本特征。
34. 分别叙述第一类和第二类准地转运动的特点。
35. 准地转运动的充分条件是什么?
36. 对于正压适应过程, 适应结果与初始非地转扰动的水平尺度有何关系?
37. 准地转运动中的次级环流与 Ekman 抽吸中所说的次级环流是否一样? 如果不一样, 二者的区别在哪里?

五、推导题

1. 有下列方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -fu \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial x} \end{cases}$$

假设大气基本状态是静止的, 即 $u = u', v = v', h = H_0 + h'$, 回答下列问题:

- (1) 将上述方程进行线性化;
- (2) 采用 f 平面近似, 求解该方程组所含波动的频率方程;
- (3) 求解该波动的相速度和群速度, 分析该波动的性质。

2. 在中性层结下, 假设风只沿 x 方向吹, 切应力 $\frac{\tau_{zx}}{\rho} = -\overline{w'u'}$, 请根据混合长理论,

推导风速随高度的变化规律。

3. 由方程组
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 其中 u, v 为东西、南北方向的运动速度, f 为科

氏参数, Φ 为位势高度, 请推导大气 Rossby 波的波速公式, 并讨论其特点。

4. 已知大气行星边界层的控制方程组及边界条件如下

$$\begin{cases} 0 = -f_0 v + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = -f_0 u - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + K_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 & u = 0, v = 0 \\ z \rightarrow \infty & u = u_g, v = 0 \end{cases}$$

请推导风速随高度变化的表达式(f_0, ρ_0, K_z 均为常数)。

5. 已知 p 坐标系下的大气运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(1) 已知相对涡度 $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, 利用运动方程, 推导关于 ζ 的方程, 并指出大气的

的斜压性在方程中如何影响 ζ 的变化;

(2) 已知位势涡度 $q = \frac{\zeta + f}{h}$, 证明 $\frac{dq}{dt} = 0$ 。

6. (原创)已知 p 坐标系下大气的水平运动方程为

$$\frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial t} + (\mathbf{V}_h \cdot \nabla) \mathbf{V}_h + \omega \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial p} = -\nabla_h \Phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{V}_h + \mathbf{F}_r \quad (①)$$

和热力学第一定律

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{Q} \quad (②)$$

其中 $\nabla_h = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$, $\mathbf{V}_h = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, $\mathbf{F}_r$ 表示摩擦力, c_p 为比定压比热容, $\alpha = \frac{1}{\rho}$

称为比容, $\dot{Q}$ 为外源对单位质量空气的加热率。

(1) 根据水平运动方程推导大气的动能方程;

(2) 考虑闭合系统(质量为 M), 证明(1)中得到动能方程可以改写为如下形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M \mathbf{V}_h \cdot \nabla_h \Phi dM - \int_M D dM \quad (③)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M K dM = - \int_M \alpha \omega dM - \int_M D dM \quad (④)$$

(3) 用符号 E 表示全位能, 请根据热力学第一定律证明在闭合系统下的全位能方程满足如下关系

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M E dM = \int_M \alpha \omega dM + \int_M \dot{Q} dM \quad (⑤)$$

- (4) 结合方程④⑤，分析全位能和动能之间是如何转换的。动能和全位能在什么条件下可以满足怎么样的守恒关系？

7. 已知正压无辐散的涡度方程为

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\beta v$$

设背景场为均匀西风基流，即 $u = \bar{u}(\text{const}) + u'$, $v = v$ ，将方程线性化后求解其包含波动的频率方程，并求出相应的相速度和群速度，分析波动的性质。

8. 已知第一类准地转运动方程组如下

$$\begin{cases} \nabla_h^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla_h (\zeta_g + f) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} & (1) \\ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \omega \bar{\sigma}_s & (2) \end{cases}$$

其中 Φ 表示位势高度， $\nabla_h = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$ ， $\bar{\sigma}_s$ 表示静力稳定度参数。

- (1) 推导准地转位势倾向方程，位势倾向的变化受哪几个因子的影响，这些因子又是如何影响的？
- (2) 推导准地 ω 倾向方程， ω 的变化受哪几个因子的影响，这些因子又是如何影响的？

附录 II 《动力气象学》(吕美仲等)课本习题参考答案

见参考链接：<https://www.doc88.com/p-9985638651123.html>

友情提示：里面的答案有些也不完全正确，建议各位同学仅作为参考！