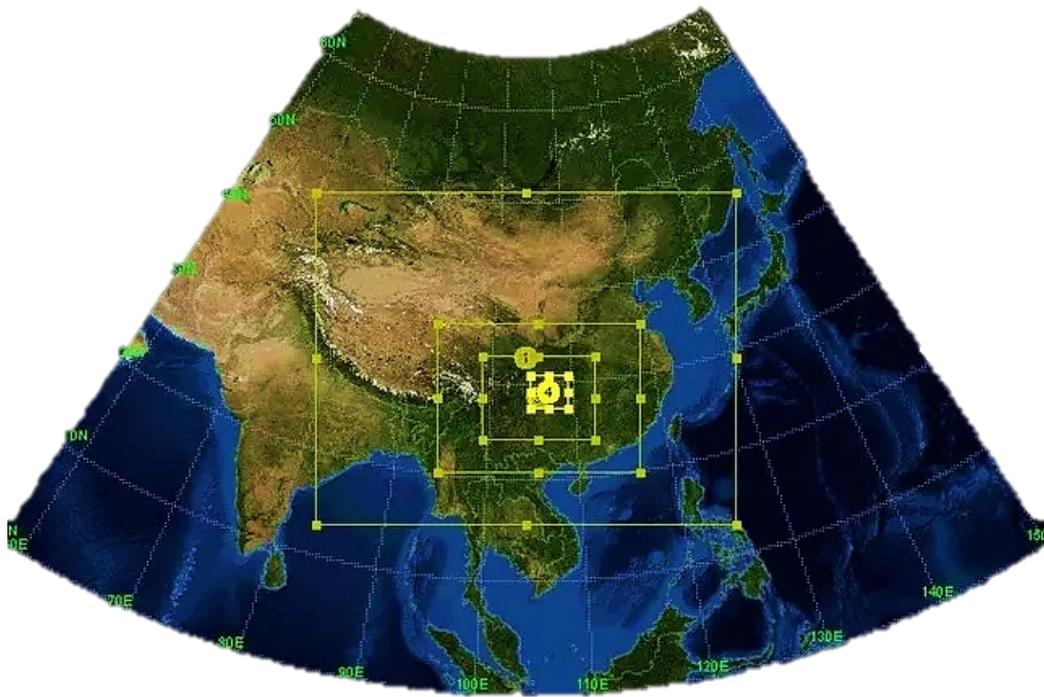




数值天气预报

numerical weather prediction



中国海洋大学 海洋气象学系

蒋斌 整理

(2022 年)

1. 数值天气预报的定义

在给定的初始条件下进行数值积分描写大气运动的方程组,从而得到未来某一时刻大气环流状况和气象要素的分布。

2. 离散化最常用的方法: 有限差分法、谱方法、有限元法

3. 差分方法

(1) 网格划分与符号表示

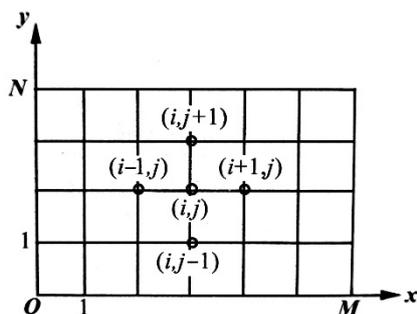


图 1 二维平面上的网格划分

我们一般采用矩形网格划分法(三角形或者六边形网格在程序设计时太复杂)。

在相空间 (x, t) 平面上构造以 $\Delta x, \Delta t$ 为间隔的时空网格,那么格点的坐标可以表示

为 $\begin{cases} x_i = i\Delta x, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ t^n = n\Delta t, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$, 其中 i 是空间的序号, n 是时间的序号。

(2) 几种差分方式与及误差比较

我们对 $u(x, t)$ 进行 Taylor 展开有

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (①)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (②)$$

✧ 对①式进行变形有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

上述称为一阶空间导数向前差分, 其误差为关于 Δx 的一次。

✧ 对②式进行变形有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2!} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

上述称为一阶空间导数**向后差分**，其误差为关于 Δx 的一次。

✧ ①式与②式作差得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \dots + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{3!} + \dots = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

上述称为一阶空间导数**中央差分**，其误差为关于 Δx 的二次。

✧ ①式与②式求和得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \frac{(\Delta x)^2}{4!} + \dots \\ &= \frac{u_{i+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

上述称为二阶空间导数**中央差分**，其误差为关于 Δx 的二次。

利用上面的方法我们同样可以得到关于时间的各种差分格式。

▲ 截断误差

在前面的推导中我们将得到的差分项后面的余项用 $O(\Delta x^k)$ 进行了替代，这个 $O(\Delta x^k)$ 就称为截断误差，它是由于用差分近似替代微分而产生的，一般 k 越大差分近似的截断误差越小，这种差分近似越精确。

4. 时间积分方案

数值天气预报的基本方程虽然比较复杂，但是对时间来讲都是一阶线性微分方程，下面以一维平流方程为例。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

将波动解 $u(x, t) = F(t)e^{i\mu x}$ 代入上述方程有 $\frac{dF}{dt} = -ic\mu F = E(t, F)$ ，令

$E_i^n = -c \frac{\partial u}{\partial x} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$ ，那么可以得到以下几种时间积分方案。

(1) 向前差显示格式(欧拉格式)

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} = E_i^n \Leftrightarrow F_i^{n+1} = F_i^n + \Delta t E_i^n$$

两个时间层的显示格式，精度为 $O(\Delta t)$ ，是绝对不稳定的，没有计算解。

(2) 向后差隐式格式

上述的时间函数项(即 $E(t, F)$)采用向后差分法

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} = E_i^{n+1} \Leftrightarrow F_i^{n+1} = F_i^n + \Delta t E_i^{n+1}$$

因为 $E = -ic\mu F$ ，所以 $E_i^{n+1} = -ic\mu F_i^{n+1}$ ，上式又可化为 $F_i^{n+1} = \frac{1}{1+iq} F_i^n$ ($q = c\mu\Delta t$)。

定义 $G = \frac{1}{1+iq}$ ，称为**振幅因子**。设 $G = |G|e^{i\theta}$ ， $|G| = \left| \frac{1}{1+iq} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$ ，给定初始条

件 F_i^0 ，那么有 $F_i^{n+1} = |G|^{n+1} e^{i(n+1)\theta} F_i^0$ 。显然，当 $|G| > 1$ 时，格式是不稳定的；当 $|G| = 1$

时，格式是中性的；当 $|G| < 1$ 时，格式是稳定的。这种差分方法也是两层时间格

式，精度为 $O(\Delta t)$ 。

(3) 梯形隐式格式

对于一维平流方程，时间采用向前差分，空间采用中央差分有

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

若空间采用 $(n+1)$ 处的时间，有 $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$ ，两式相加除以 2 得

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = 0$$

因此梯形差分格式可写为

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{2} (E_i^n + E_i^{n+1}) = 0 \Leftrightarrow F_i^{n+1} = F_i^n + \frac{c\Delta t}{2} (E_i^n + E_i^{n+1})$$

该格式是中性的，精度为 $O(\Delta t^2)$

(4) 中央差显示格式(蛙跳格式)

$$\frac{F_i^{n+1} - F_i^{n-1}}{2\Delta t} = E_i^n \Leftrightarrow F_i^{n+1} = F_i^{n-1} + 2\Delta t E_i^n$$

三个时间层的显示格式，精度为 $O(\Delta t^2)$ ，是条件性稳定的。除了物理解以外，还有一个计算解。这种格式是数值预报中应用最多的格式之一。

(5) 欧拉后插格式(松野迭代格式)

由前差(欧拉)格式和后差格式结合构成。计算分两步进行，用前差公式所得结果作为后差公式等号右端 $(n+1)$ 时刻变量的第一近似值，故为迭代格式。它是一阶精度的显式格式 ($O(\Delta t)$)。

$$\begin{cases} {}^*F_i^{n+1} = F_i^n + \Delta t E_i^n \\ F_i^{n+1} = F_i^n + \Delta t {}^*E_i^{n+1}, \left({}^*E_i^{n+1} = f({}^*F_i^{n+1}) \right) \end{cases}$$

这种时间积分格式对重力惯性外波这样高频波具有很强的阻尼作用，因此数值天气预报模式中常常采用松野迭代格式以抑制时间积分过程中的高频波动。

5. 得到近似解需要考虑的问题与解决办法

(1) 相容性问题

当空间网格距离 Δx 与时间步长 Δt 均趋于 0 时，差分方程能否无限逼近微分方程的问题，只有满足这一条件的差分方程才称为与微分方程是相容的。

(2) 收敛性与稳定性问题

设微分方程的真解为 U ，对应的差分方程为准确解为 u ，差分方程的数值解为 u^* ，因此实际的误差为 $U - u^* = (U - u) + (u - u^*)$

截断误差： $U - u$ ，此即由于用差分方程代替微分方程所产生的误差，其是否随着空间网格距离与时间步长均趋于 0 时而趋于 0，称为解的收敛性问题；

舍入误差： $u - u^*$ ，是计算机每次迭代误差的累计，其是否随着空间网格距离与时间步长均趋于 0 时在整个求解趋于 **保持有界**称为解的稳定性问题。

(3) 收敛性判据

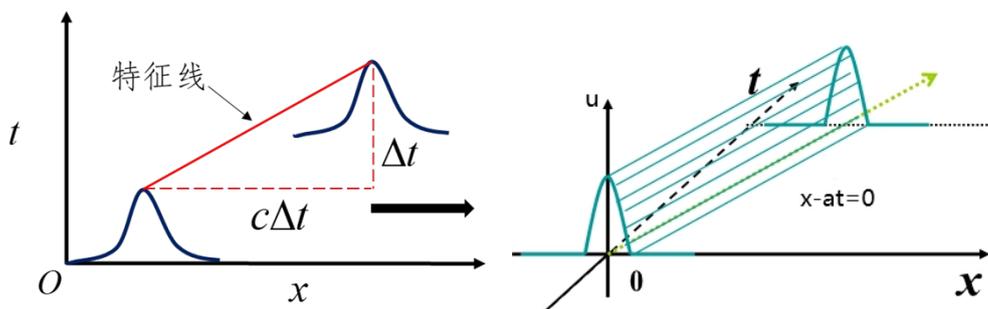
我们仍以一维平流方程为例，推导得出其稳定性判据。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

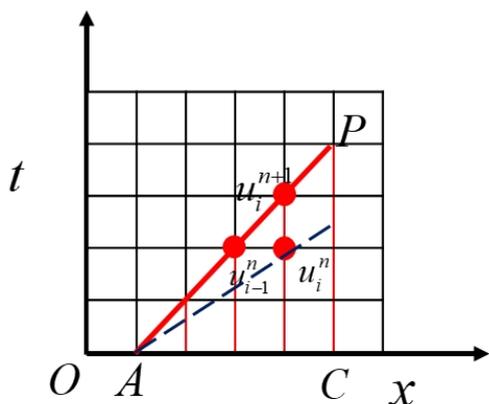
设波动解为 $u(x,t) = F(t)e^{i\mu x}$ ($\mu = \frac{2\pi}{\lambda}$ 称为波数), 代入上述方程有

$$\frac{dF}{dt} = -ic\mu F \Rightarrow F = Ae^{-ic\mu t} \text{ (其中 } A \text{ 表示 } t=0 \text{ 时刻 } F \text{ 的初值), 从而得到真解为}$$

$u(x,t) = Ae^{i\mu(x-ct)}$, 也可写成 $f(x-ct) = Ae^{i\mu(x-ct)}$, 即 $u(x-ct)$ 的波形在 x 轴上以速度 c 传播 t 时刻的函数值仅依赖于特征线 $x-ct = C_0$ 上的值(如下图所示)。



收敛性应满足什么条件呢?



如左图所示的三个红点给出了迭代的关系图, 依次类推下去可以得到一个特征区域 PAC , 差分方程要收敛域与微分方程, 其特征线应该落在特征区域中, 根据斜率的关系有:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

上式即收敛性判据, 又称为柯朗-弗里德里克斯-莱维(Courant-Friedrichs-Lewy, CFL)条件, 是保证计算稳定性的充分条件。

6. 线性计算的稳定性

Lax 等价定理指出: 对于适定的线性偏微分方程组初值问题, 一个与之相容的线性差分格式收敛的充分必要条件是该格式是稳定的, 所以用差分方法求微分方程时, 数值解的重要问题就转换到了差分格式的稳定性上来了。这里采用

冯·纽曼(Von Neumann)方法来探讨线性计算稳定性的条件。

(1) 中央差分方法

对于一维平流方程，采用时间和空间均采用中央差分的形式，即

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} = 0, \text{ 或写为 } u_m^{n+1} = u_m^{n-1} - \beta(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) \left(\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right).$$

解可以设为 $u(x,t) = f(x-ct) = Ae^{i\mu(x-ct)}$ ，令 $G = e^{-ic\mu\Delta t} \xrightarrow{c\mu = \frac{2\pi c}{\lambda}} e^{-i\omega\Delta t}$ ，则

$G^n = e^{-i\omega t} = e^{-i\omega n\Delta t}$, $G^{n+1} = e^{-i\omega\Delta t} G^n$ ， G^n 称为振幅因子。在 $t=0$ 初始时刻，有

$u(x,0) = f(x) = Ae^{i\mu x}$ ，我们可以类比设 n 时刻差分方程的近似解有如下形式

$$u_m^n = AG^n e^{i\mu m\Delta x} = Ae^{-i\omega n\Delta t} e^{i\mu m\Delta x}$$

上述解的形式表明当 $|G| \leq 1$ 时解才是合理的，或者说方程是稳定的。将其代入差分方程中有

$$G^2 + \beta G(e^{i\mu\Delta x} - e^{-i\mu\Delta x}) - 1 = 0$$

根据欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ，有 $e^{i\mu\Delta x} - e^{-i\mu\Delta x} = 2i\sin\mu\Delta x$ ，令 $\Omega = \beta\sin\mu\Delta x$ ，于是

得到一个关于 G 的一元二次方程： $G^2 + 2i\Omega G - 1 = 0$ ，其解为

$$G = -i\Omega \pm \sqrt{1 - \Omega^2}$$

对上述解进行讨论：

① 当 $|\beta| \leq 1$ 时， $|\Omega| \leq 1$ ， $|G|=1$ 表明差分方程是稳定的；

② 当 $|\beta| > 1$ 时， $|\Omega| > 1$ ， $G = -i(-\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 1})$ ，此时方程有两个解，分别为

$$|G_1| = -\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1}, |G_2| = -\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}, \text{ 此时两个解均不满足 } |G| \leq 1 \text{ 的条件。}$$

综上，我们可以得到：中央差分格式是条件性稳定的，稳定性与 β 有关。

(2) 前差格式

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + c \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{2\Delta x} = 0 \Leftrightarrow u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\beta}{2}(u_{m+1}^n - u_m^n)$$

关于 G 的方程为： $G = 1 - \frac{\beta}{2}(e^{i\mu\Delta x} - e^{-i\mu\Delta x})$ ，即 $G = 1 - i\Omega$ ，显然 $|G| = \sqrt{1 + \Omega^2} > 1$ ，所以前差格式是绝对不稳定的。

(3) 欧拉后差格式(松野迭代格式)

欧拉后差是前差与后差的结合。

$$\text{前差: } \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + c \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} = 0 \Leftrightarrow u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\beta}{2}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)$$

$$\text{后差: } \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + c \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \Leftrightarrow u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\beta}{2}(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1})$$

即将前差得到的 u_m^{n+1} 对 u_{m+1}^{n+1} , u_{m-1}^{n+1} 进行近似代替，有

$$u_{m+1}^{n+1} = u_{m+1}^n - \frac{\beta}{2}(u_{m+2}^n - u_m^n), \quad u_{m-1}^{n+1} = u_{m-1}^n - \frac{\beta}{2}(u_m^n - u_{m-2}^n)$$

将上式代入后差公式中有：

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= u_m^n - \frac{\beta}{2} \left[u_{m+1}^n - \frac{\beta}{2}(u_{m+2}^n - u_m^n) - u_{m-1}^n + \frac{\beta}{2}(u_m^n - u_{m-2}^n) \right] \\ &= u_m^n - \frac{\beta}{2}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 (u_{m+2}^n - 2u_m^n + u_{m-2}^n) \end{aligned}$$

同样地我们可以写出关于 G 的方程为：

$$G = 1 - \frac{\beta}{2}(e^{i\mu\Delta x} - e^{-i\mu\Delta x}) + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 (e^{i2\mu\Delta x} + e^{-i2\mu\Delta x} - 2) = 0$$

同样根据欧拉公式可以得到

$$e^{i\mu\Delta x} - e^{-i\mu\Delta x} = 2i \sin \mu\Delta x, \quad e^{i2\mu\Delta x} + e^{-i2\mu\Delta x} = 2 \cos 2\mu\Delta x = 2(1 - 2\sin^2 \mu\Delta x)$$

结合 $\Omega = \beta \sin \mu\Delta x$ ，得到 G 的最终表达式如下：

$$G = 1 - \Omega^2 + i\Omega \Leftrightarrow |G| = \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + \Omega^2}$$

显然，当 $|\Omega| \leq 1$ 时，才有 $|G| \leq 1$ ，因为 $|\sin \mu\Delta x| \leq 1$ ，所以 $|\Omega| \leq 1$ 的形式又可以

写为 $|\beta| = \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$ 。

松野迭代格式的解是衰减的，此外它的 $|G|$ 与波数 μ 有关，因此它具有选择

性衰减的特征，即对不同波数(波长)的波，波动的衰减程度是不一样的。对于重力惯性波，周期为几个小时，取频率 $f = \mu c \sim 2\pi \times 10^{-4} s^{-1}$ ，时间间隔取 10min，即 $\Delta t \sim 10^3 s$ ，计算得到 $|G| \approx 0.88$ ，也就是说每积分一个时间步长，重力惯性波的振幅都要减小 12% 左右。同样的我们来看一下罗斯贝波，其周期为 3~4 天，取频率 $f = \mu c \sim 2 \times 10^{-5} s^{-1}$ ， $|G| \approx 0.9998 \rightarrow 1$ ，即每积分一个时间步长，罗斯贝波的振幅减小仅 1/5000，影响几乎可以忽略不计。

7. 差分方程的计算解和物理解

我们把一维平流线性方程中的时间和空间均采用中央差的格式

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} \Leftrightarrow u_m^{n+1} = u_m^{n-1} - \beta(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)$$

前面提到， n 时刻的解可以设成： $u_m^n = AG^n e^{-i\mu m \Delta x} = Ae^{-i\alpha n \Delta t} e^{i\mu m \Delta x}$ ，代入得

$$G^2 + 2i\Omega G - 1 = 0 \quad (\Omega = \beta \sin \mu \Delta x)$$

令 $\Omega_* = -\beta \sin \mu \Delta x = -\Omega$ ，则 $G^2 + 2i\Omega_* G - 1 = 0$ ，在 $\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ 的条件下，解为

$$G_1 = i\Omega_* + \sqrt{1 - \Omega_*^2}, G_2 = i\Omega_* - \sqrt{1 - \Omega_*^2}$$

令 $\alpha = \frac{1}{\Delta t} \sin^{-1} \Omega \Leftrightarrow \Omega_* = -\sin \alpha \Delta t$ ，于是两个解又可以写为

$$\begin{cases} G_1 = \cos \alpha \Delta t - i \sin \alpha \Delta t = e^{-i\alpha \Delta t} \\ G_2 = -\cos \alpha \Delta t - i \sin \alpha \Delta t = -e^{i\alpha \Delta t} \end{cases}$$

于是差分方程的解又可以写为

$$\begin{aligned} u_m^n &= C_1 A G_1^n e^{i\mu m \Delta x} + C_2 A G_2^n e^{i\mu m \Delta x} \\ &= C_1 A e^{i\mu m \Delta x - i\alpha n \Delta t} + C_2 (-1)^n A e^{i\mu m \Delta x + i\alpha n \Delta t} \\ &= C_1 A e^{i\mu \left(m \Delta x - \frac{\alpha}{\mu} n \Delta t \right)} + C_2 (-1)^n A e^{i\mu \left(m \Delta x + \frac{\alpha}{\mu} n \Delta t \right)} \end{aligned}$$

上式中 C_1, C_2 为待定系数，假设上述差分方程的解在初始时刻等于给定的初值，

即 $u_m^0 = u(x, 0) = A e^{i\mu \Delta x}$ ，那么有 $C_2 = 1 - C_1$ 。显然上述差分方程的解由两部分组成。

亦即由两个波叠加而成。对于第一个波，其相速度为 $c_1 = \frac{\alpha}{\mu}$ ，根据

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t} \sin^{-1} \Omega, \text{ 当 } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \text{ 时有 } \alpha = \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \sin \mu \Delta x \right) = c \mu, \text{ 从而第}$$

一个波的相速度趋向于 c ，这与微分方的真解的相速度是一致的。然而第二个波的相速度为 $-c$ ，而且其波动的振幅每增加一个时间步长就会改变一次符号，这种情况在大气的实际波动中一般不存在，它是采用差分计算时出现的一种虚假波动，因此称其为“计算波”或者“计算解”。与之相对应，称第一个与微分方程真解性质相近的解为“物理波”或者“物理解”。

【小结】差分方程的计算解和物理解

- (1) 物理解是和微分方程的真解相一致的有意义的解；
- (2) 物理解和计算解的相速度符号相反；
- (3) 计算解是“虚假的”，只要对时间、空间的一阶导数采用三层差分格式(如中央差分)，就会出现计算解；
- (4) 计算解是差分解的误差来源之一，是差分方程中带有普遍性的误差，其振幅的变化特点是每增加一个格点，就改变一次符号。

8. 有限网格下的误差

(1) 振幅和相速度的误差

由前面得到一维平流方程的中央差分方程的解为(为方便推导，假设 $A=1$)

$$u_m^n = C_1 e^{i\mu \left(m\Delta x - \frac{\alpha}{\mu} n\Delta t \right)} + (1 - C_1) (-1)^n e^{i\mu \left(m\Delta x + \frac{\alpha}{\mu} n\Delta t \right)} (*)$$

假设在 $n=1$ 时刻，采用时间向前差分，有

$$u_m^1 = u_m^0 - \frac{c\Delta x}{2\Delta t} (u_{m+1}^0 - u_{m-1}^0)$$

将得到差分解(*)代入上面的式子，有

$$\begin{cases} u_m^1 = C_1 e^{i\mu\left(m\Delta x - \frac{\alpha}{\mu}\Delta t\right)} - (1-C_1)e^{i\mu\left(m\Delta x + \frac{\alpha}{\mu}\Delta t\right)} \\ u_m^0 = C_1 e^{i\mu m\Delta x} + (1-C_1)e^{i\mu m\Delta x} \\ u_{m+1}^0 = C_1 e^{i\mu(m+1)\Delta x} + (1-C_1)e^{i\mu(m+1)\Delta x} \\ u_{m-1}^0 = C_1 e^{i\mu(m-1)\Delta x} + (1-C_1)e^{i\mu(m-1)\Delta x} \end{cases} \xrightarrow{\text{除以 } e^{i\mu m\Delta x}} \begin{cases} * u_m^1 = C_1 e^{-i\alpha\Delta t} - (1-C_1)e^{i\alpha\Delta t} = 2C_1 \cos \alpha\Delta t - e^{i\alpha\Delta t} \\ * u_m^0 = C_1 + (1-C_1) = 1 \\ * u_{m+1}^0 = C_1 e^{i\mu\Delta x} + (1-C_1)e^{i\mu\Delta x} = e^{i\mu\Delta x} \\ * u_{m-1}^0 = C_1 e^{-i\mu\Delta x} + (1-C_1)e^{-i\mu\Delta x} = e^{-i\mu\Delta x} \end{cases}$$

于是方程可以化为

$$2C_1 \cos \alpha\Delta t - e^{i\alpha\Delta t} = 1 - \frac{\beta}{2}(e^{i\mu\Delta x} - e^{-i\mu\Delta x})$$

↓

$$2C_1 \cos \alpha\Delta t - (\cos \alpha\Delta t + i \sin \alpha\Delta t) = 1 - \beta i \sin \mu\Delta x$$

在前面的定义中我们有 $\alpha = \frac{1}{\Delta t} \sin^{-1} \Omega$ 即 $\sin \alpha\Delta t = \Omega = \beta \sin \mu\Delta x$ ，从而可以得到

$$C_1 = \frac{1 + \cos \alpha\Delta t}{2 \cos \alpha\Delta t}, C_2 = -\frac{1 - \cos \alpha\Delta t}{2 \cos \alpha\Delta t}$$

$$\text{所以 } u_m^n = \frac{1 + \cos \alpha\Delta t}{2 \cos \alpha\Delta t} e^{i(\mu m\Delta x - \alpha n\Delta t)} - \frac{1 - \cos \alpha\Delta t}{2 \cos \alpha\Delta t} e^{i(\mu m\Delta x + \alpha n\Delta t + n\pi)}$$

上述中第一个解为物理解，相速度为 $c_1 = \frac{1}{\mu\Delta t} \arcsin\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \mu\Delta x\right) \neq c$ ，表明

差分格式的使用使物理解的相速度与原来微分方程的真解产生了偏差。下表给出了

了在 $\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = 0.75$ 是，不同波长 L 下 $\frac{c_1}{c}$ 的值，可以发现， $\frac{c_1}{c} < 1$ ，也就是说，**差分格式的使用使得波动传播的相速度减慢，且波长越短，相速度减慢得越多，**

误差也就越大。

$\frac{L}{\Delta x}$	$\frac{c_1}{c}$	$\left \frac{C_2}{C_1}\right = \frac{1 - \cos \alpha\Delta t}{1 + \cos \alpha\Delta t}$
2	0	∞
3	0.45	7.35
4	0.72	0.2
6	0.90	0.14
8	0.95	0.08
12	0.98	0.04
24	0.995	0.01

▲ 中央差分格式造成的相速度与振幅的误差

第二个解为计算解，它的移动方向与物理解的移动方向相反。由表格可知，

波长越短，计算解的振幅越大，计算解的影响越明显；当 $L = 8\Delta x$ 时，计算解的相对振幅不到 $\frac{1}{10}$ 。所以，提高网格的分辨率不仅有利于提高相速度的准确率，也能够极少计算解的影响。

(2) 频率误差(时间截断误差)

以惯性振荡为例，它反映了旋转地球上均匀气压场中的大气水平振荡

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = 0 \\ \frac{dv}{dt} + fu = 0 \end{cases} \xrightarrow{W=u+iv} \frac{dW}{dt} = -ifW \Rightarrow W = W_0 e^{i\sigma t} (\sigma = -f)$$

① 中央差格式(显示格式)

其格式为 $W^{n+1} - W^{n-1} = -2if\Delta t W^n$ ，设数值解为 $W^n = W_0 e^{i\sigma_E n\Delta t}$ ，代入可求得

$$2i \sin \sigma_E \Delta t = -2if\Delta t \Rightarrow \sigma_E = -\frac{1}{\Delta t} \arcsin(f\Delta t)$$

此时有 $\frac{\sigma_E}{\sigma} = \frac{1}{f\Delta t} \arcsin(f\Delta t) \geq 1$ ，所以采用中央差格式的计算频率大于真解频率。

② *梯形格式(隐式格式)

梯形格式的差分格式为

$$\begin{cases} W^{n+1} - W^n = -if\Delta t W^n \\ W^{n+1} - W^n = -if\Delta t W^{n+1} \end{cases} \xrightarrow{\text{两式相加除以2}} W^{n+1} - W^n = -\frac{if\Delta t}{2} (W^{n+1} + W^n)$$

将解的形式代入有， $e^{i\sigma_i \Delta t} - 1 = -\frac{if\Delta t}{2} (e^{i\sigma_i \Delta t} + 1)$ 。将其展开得到

$$\cos \sigma_i \Delta t + i \sin \sigma_i \Delta t - 1 = -\frac{if\Delta t}{2} (\cos \sigma_i \Delta t + i \sin \sigma_i \Delta t + 1)$$

上式若要成立，必须有等式两边的实部与虚部相等，即

$$\begin{cases} \cos \sigma_i \Delta t - 1 = \frac{f\Delta t}{2} \sin \sigma_i \Delta t \\ \sin \sigma_i \Delta t = -\frac{f\Delta t}{2} (\cos \sigma_i \Delta t + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\cos \sigma_i \Delta t - 1}{\sin \sigma_i \Delta t} = \frac{f\Delta t}{2} \\ -\frac{\sin \sigma_i \Delta t}{\cos \sigma_i \Delta t + 1} = \frac{f\Delta t}{2} \end{cases}$$

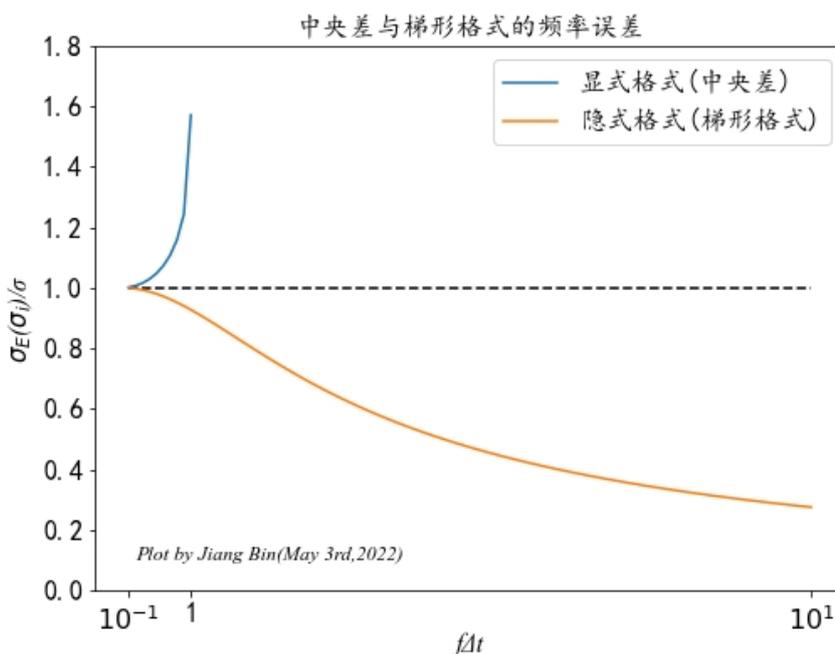
利用三角函数的半角公式与恒等变形，注意到

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

所以有 $\tan \frac{\sigma_i \Delta t}{2} = -\frac{f \Delta t}{2} \Rightarrow \sigma_i = -\frac{2}{\Delta t} \arctan \left(\frac{f \Delta t}{2} \right)$

此时有 $\frac{\sigma_i}{\sigma} = \frac{2}{f \Delta t} \arctan \left(\frac{f \Delta t}{2} \right) \leq 1$, 故采用梯形隐式格式得到的计算频率小于真解频率。

[注] 二者的比较如下:



(下标 E, i 分别表示差分格式为显示和隐式)

(3) 波数误差(空间截断误差)

设某要素场的变化可以用波动 $u = e^{i\mu x}$ 表示, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = i\mu e^{i\mu x}$, 令 $x = m\Delta x$, 则有

$$\frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} \left[e^{i\mu(m+1)\Delta x} - e^{i\mu(m-1)\Delta x} \right] = i \frac{\sin \mu \Delta x}{\Delta x} e^{i\mu m \Delta x} = i \frac{\sin \mu \Delta x}{\Delta x} e^{i\mu x}$$

我们称 μ 为微分方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = i\mu e^{i\mu x}$ 对应的波数, 称 $\mu^* = \frac{\sin \mu \Delta x}{\Delta x}$ 为用差分方程代替

后对应的波数(差分解波数、计算解波数), 显然, 有 $R = \frac{\mu^*}{\mu} = \frac{\sin \mu \Delta x}{\mu \Delta x} \leq 1$ 。R 符号用来反应空间差商代替空间微商时引起的波数误差, R 越大表示空间差分格式的精确度越高。

不同 $\frac{\Delta x}{L}$ 所对应的 R 值

$\frac{\Delta x}{L}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$R = \frac{\mu^*}{\mu}$	0.94	0.90	0.83	0.64	0

中央差分格式使得波数减小。由上表可知, 缩小网格间距(亦即提高网格精确度)可以减小误差。

*[注] 减小波数误差的另一中方法——构造高阶差分格式

例如对于一阶偏微商的四阶差分格式为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_m = \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{4}{3}(u_{m+1} - u_{m-1}) - \frac{1}{6}(u_{m+2} - u_{m-2}) \right]$$

计算波数解为 $\frac{8 \sin \mu \Delta x - \sin 2\mu \Delta x}{6\Delta x}$, 从而

$$R = \frac{8 \sin \mu \Delta x - \sin 2\mu \Delta x}{6\mu \Delta x} = \frac{\sin \mu \Delta x}{\mu \Delta x} + \frac{2 \sin \mu \Delta x - \sin 2\mu \Delta x}{6\mu \Delta x}$$

可见四阶的精度要比一阶的精度高。

(4) 群速度误差



相速度是等相位面移动的速度, 而群速度是波包移动的速度。当相速度与群速度相一致的波称为非频散波, 否则称为频散波。

对于一系列单频波 $y = A \cos(\mu x - \sigma t)$, 其相速度为 $c = \frac{L}{T} = \frac{2\pi f}{k} = \frac{\sigma}{\mu}$ 。群速度

的计算公式为 $c_g = \frac{d\sigma}{d\mu}$ (参考笔者整理的《动力气象学》笔记)。通过前面的推导

可以知道, 对于一维线性平流方程, 中央差分格式的物理解对应的频率为

$\sigma_E = \frac{1}{\Delta t} \arcsin(\beta \sin \mu \Delta x)$; 而对于梯形隐式格式, 其对应的频率为

$\sigma_i = \frac{2}{\Delta t} \arctan\left(\frac{\beta}{2} \sin \mu \Delta x\right)$, 这样, 可以求得两种格式对应的群速度:

$$c_{gE} = \frac{d\sigma_E}{d\mu} = c \frac{\cos \mu \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \mu \Delta x}}, c_{gi} = \frac{d\sigma_i}{d\mu} = c \frac{\cos \mu \Delta x}{1 + \frac{1}{4} \beta^2 \sin^2 \mu \Delta x}$$

由此可知, 在无论是显式格式还是隐式格式, 其群速度均与相速度不等(相速度就是用相应的 σ 除以波数)。因此, **差分格式使得波动变成了频散波, 产生了计算频散。**

【小结】

- (1) 差分方程的波动解在波的频率、波数、振幅、相速和群速度等方面都有误差。
- (2) 中央差(显式)格式使振动加快, 梯形隐式格式使振动减慢;
- (3) 相速度偏小是各种差分格式的通病, 对于中央差格式, 它使得波数减小, 振幅增大;
- (4) 差分使非频散波变为频散波;
- (5) 对有限网格距的差分格式上述误差总是存在, 尤其是当波长较短时偏差明显; 但当波长远大于空间格距时, 差分格式的各种误差都比较小。一般取空间步长 $\Delta x < L/10$ 可有效控制误差。

9. 非线性计算不稳定

(1) 非线性计算不稳定的产生

对于一组非线性偏微分方程, 其满足相应的线性稳定性判据, 在一段时间内非线性差分方程计算稳定, 但是随后计算结果突然迅速增长。这种因**非线性作用**而产生的不稳定称为**非线性不稳定**。

(2) 非线性计算不稳定的特点

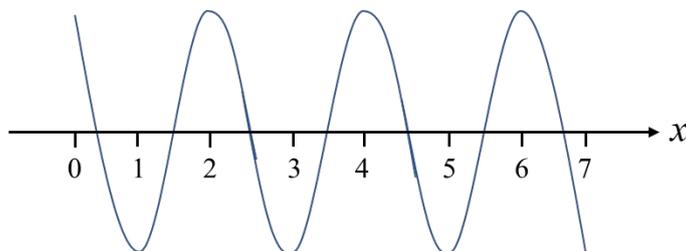
- ① 满足线性稳定性条件时仍会发生，具有突变性的特点；
- ② 不能通过缩短时间步长来解决；
- ③ 和差分方案有关，和初值有关，初值中的常数对计算稳定性起重要作用。

【线性计算不稳定 VS 非线性计算不稳定】

- 线性计算不稳定：当 $c \frac{\Delta t}{\Delta x} > 1$ 发生，其函数值增长较慢，波形和传播速度保持较好；
- 非线性计算不稳定：函数值增长迅速，突然出现不稳定，短波振幅增长，波形和传播速度变化较大。

(3) 产生原因——混淆误差

菲利普斯(Phillips)在 1959 年积分非线性涡度方程时，发现了非线性计算不稳定的现象。他认为波与波之间的非线性相互作用产生短波，有限网格不能正确区分短波而造成混淆现象，混淆误差可能引起计算不稳定。



设 x 轴上有一段区间 L_x ，共有 $M+1$ 个点，将其 M 等分，则 $L_x = M\Delta x$ 。一个简谐波至少需要三个点(表现出一个波长的图形)，所以 5 个点最多表现两个波，从而 $M+1$ 个点最多只能表现 $\frac{M}{2}$ 个波，故有

$$\frac{M}{2} \times L_{\min} = L_x = M\Delta x \Rightarrow L_{\min} = 2\Delta x$$

即有限网格下能识别的最短波长为 $2\Delta x$ ，或者说有限网格只能反映波长大于 $2\Delta x$ 的波。

将 U 在格点 m 上的值 U_m 进行级数展开，有

$$\begin{aligned}
 U_m &= \sum_{\mu=0}^{M/2} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{L_x} \mu x + b_k \sin \frac{2\pi}{L_x} \mu x \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{M/2} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{M\Delta x} \mu m \Delta x + b_k \sin \frac{2\pi}{M\Delta x} \mu m \Delta x \right) = \sum_{k=0}^{M/2} \left(a_k \cos \frac{2\pi \mu m}{M} + b_k \sin \frac{2\pi \mu m}{M} \right)
 \end{aligned}$$

假设 U_m 中只包含了 μ_1, μ_2 两种波数的波, 利用三角函数公式, 于是两种波动分别写成 $u_1 = A_1 \cos(\mu_1 x - \sigma_1 t), u_2 = A_2 \cos(\mu_2 x - \sigma_2 t)$, 根据欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 将波动用复数形式表示(注意此时实部表示真实振动), 有

$$e^{i(\mu_1 x - \sigma_1 t)} e^{i(\mu_2 x - \sigma_2 t)} = e^{i[(\mu_1 + \mu_2)x - (\sigma_1 + \sigma_2)t]}$$

也就是说, 经过非线性作用后, 会产生波数为 $\mu_1 + \mu_2$ 的新波, 如果 $\mu_1 + \mu_2 > \frac{M}{2}$, 那么此新波的波长小于 $2\Delta x$ 。

若 $\mu_1 + \mu_2 > \frac{M}{2}$, 令 $S = M - (\mu_1 + \mu_2)$, 则 $S < \frac{M}{2}$, 若做运算

$$\begin{cases} \cos \frac{2\pi(\mu_1 + \mu_2)m}{M} = \cos \frac{2\pi(M-S)m}{M} = \cos \frac{2\pi Sm}{M} \\ \sin \frac{2\pi(\mu_1 + \mu_2)m}{M} = \sin \frac{2\pi(M-S)m}{M} = -\sin \frac{2\pi Sm}{M} \end{cases}$$

显然, 由于三角函数的周期性, 新波 $\mu_1 + \mu_2$ 在有限网格上被歪曲为波数为 S 的波, 并且伴随有相位的改变, 从而造成了混淆现象。

【小结】 混淆现象产生的经过

- ① 有限网格只能反映波长大于 $2\Delta x$ 的波;
- ② 由于非线性作用, 会产生波长较短(波数较大)的新波;
- ③ 新波在有限网格上被歪曲, 波数和相位发生改变, 造成混淆现象。

【注】 发生能量反馈的波的波长在 $2\Delta x$ 和 $4\Delta x$ 间, 造成短波能量虚假激增, 导致不稳定。在这个过程中, **网格点上的函数值并没有被歪曲, 只是波数和函数的空间导数被歪曲。**

(4) 克服办法

- 抑制高频波和短波: 空间、时间平滑, 加入水平扩散项 $\mu \nabla^2 A$ (减少往短波堆积的能量), 采用抑制短波的差分格式

- 构造能量守恒的差分格式(避免能量虚假增长)
- 采用谱方法(避免空间导数被歪曲)

10. 平滑和滤波

平滑是指用某点周围点的值进行加权平均来代替该点的值，对空间平滑可滤去短波；对时间平滑可滤去高频波。

(1) 一维平滑

设某谐波函数为 $f(x) = A \cos(\mu x + \varphi)$ ($\mu = \frac{2\pi}{L}$ 为波数， φ 为初位相)，将其写成离散化形式，有

$$f_i = A \cos(\mu x_i + \varphi), x_i = i\Delta x$$

定义平滑算子 $\bar{f}_i = f_i + \frac{s}{2}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i) = (1-s)f_i + \frac{s}{2}(f_{i+1} + f_{i-1})$ ，其中 s 称为平滑系数，表示不同的平滑强度。因为涉及 $i-1, i, i+1$ 三个点，又叫三点平滑。根据该平滑的定义可知，边界点不参与平滑。将离散化的谐波函数代入平滑算子中：

$$\begin{cases} f_{i-1} = A \cos(\mu x_i - \mu\Delta x + \varphi) \\ f_{i+1} = A \cos(\mu x_i + \mu\Delta x + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \bar{f}_i = A [1 - s(1 - \cos \mu\Delta x)] \cos(\mu x_i + \varphi)$$

由此可见， f_i 经过平滑以后，振幅发生了改变，而波数和初位相没有发生改变。

定义响应函数

$$R(s, L) = \frac{\bar{A}}{A} = 1 - s(1 - \cos \mu\Delta x) = 1 - 2s \sin^2 \frac{\pi\Delta x}{L}$$

它是平滑后的振幅与平滑前的振幅的比值，表示平滑运算对某种尺度波动振幅的增长情况。由上面的表达式可知， R 与平滑系数 s 、波长 L 和网格间距 Δx 都有关。在实际情况中，还可以进行多次平滑。但是平滑次数越多，振幅衰减越严重，即便对与波长较长的波动，多次平滑后振幅也会出现相当严重的衰减。所以一般采用不同平滑系数进行多次平滑，目的是使得能够略去短波分量，但是对长波分量的衰减要尽量的小一些，此时的响应函数为

$$R_1 R_2 \cdots R_m = \prod_{r=1}^m \left(1 - 2s_r \sin^2 \frac{\pi \Delta x}{L} \right)$$

其中 s_r 为不同的平滑系数。

【注】这种多重平滑也称为一种滤波器。让低频波通过，高频波被滤去的多重平滑算子称为**低通滤波器**；让高频波通过、低频波滤去的多重平滑算子称为**高通滤波器**；让某一频带的波通过，其他波滤去的多重平滑算子称为**带通滤波器**。

(2) 二维平滑

- 方式一：同时沿 x 和 y 方向做平滑，再求两组平滑的算数平均值

$$\text{沿 } x \text{ 方向: } \overline{f_{i,j}^i} = f_{i,j} + \frac{s}{2}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j})$$

$$\text{沿 } y \text{ 方向: } \overline{f_{i,j}^j} = f_{i,j} + \frac{s}{2}(f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j})$$

$$\text{加权平均后有 } \overline{f_{i,j}^{i,j}} = \frac{1}{2}(\overline{f_{i,j}^i} + \overline{f_{i,j}^j}) = f_{i,j} + \frac{s}{4}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}),$$

由于涉及 5 个格点，故称为五点平滑。设 $f_{i,j} = Ae^{i(\mu x_i + \nu y_j + \varphi)}$ ，可得其响应函数为

$$R^* = 1 - s \left(\sin^2 \frac{\mu \Delta x}{2} + \sin^2 \frac{\nu \Delta y}{2} \right)$$

- 方式二：先沿某一方向，再沿另一方向平滑

$$\text{先沿着 } x \text{ 方向求平均, 有 } F_{i,j} = \overline{f_{i,j}^i} = f_{i,j} + \frac{s}{2}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j})$$

$$\text{再沿着 } y \text{ 方向求平均, 有 } \overline{f_{i,j}^{i,j}} = \overline{F_{i,j}^j} = F_{i,j} + \frac{s}{2}(F_{i,j+1} + F_{i,j-1} - 2F_{i,j})$$

进行化简如下：

$$\begin{aligned} \overline{f_{i,j}^{i,j}} &= \overline{F_{i,j}^j} = F_{i,j} + \frac{s}{2}(F_{i,j+1} + F_{i,j-1} - 2F_{i,j}) \\ &= \left[f_{i,j} + \frac{s}{2}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}) \right] + \frac{s}{2} \left\{ \left[f_{i,j+1} + \frac{s}{2}(f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i,j+1}) \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[f_{i,j-1} + \frac{s}{2}(f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - 2f_{i,j-1}) \right] - 2 \left[f_{i,j} + \frac{s}{2}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}) \right] \right\} \\ &= f_{i,j} + \frac{s(1-s)}{2}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}) + \frac{s^2}{4}(f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1} - 4f_{i,j}) \end{aligned}$$

上式中包含了九个点的值，故称为九点平滑。其响应函数为：

$$R^* = \left(1 - 2s \sin^2 \frac{\mu \Delta x}{2}\right) \left(1 - 2s \sin^2 \frac{l \Delta y}{2}\right)$$

需要指出的是，对于 $L_x > 2\Delta x, L_y > 2\Delta y$ 的长波，**五点平滑的振幅要比九点平滑衰减得慢一些**，因此我们常用五点平滑公式。

11. p 坐标系与 σ 坐标系

(1) p 坐标系的优缺点

- 优点：垂直运动和连续方程都变为诊断方程，方程形式简单；不含密度 ρ 。
- 缺点：下边界条件复杂，遇到地形时出现新的边界条件。 p 坐标系成立的前提是静力平衡，因此对中小尺度非静力过程不适用。

(2) σ 坐标系的定义

σ 坐标系下，垂直坐标的定义为：
$$\sigma = \frac{p - p_T}{p_s - p_T} = \frac{p - p_T}{p^*}$$
，式中 p_T 表示大气

上界的气压，一般取某一常数或者 0； $p_s = p_s(x, y, t)$ 表示地面气压。根据定义，有：

- 在地面处，有 $p = p_s \Rightarrow \sigma = 1$ ；在大气上界处，有 $p = p_T \Rightarrow \sigma = 0$ ；
- σ 坐标系与 p 坐标系一样，其值随高度均减小，其中 σ 坐标系又是一种无量纲的、在 0~1 之间取值的坐标。

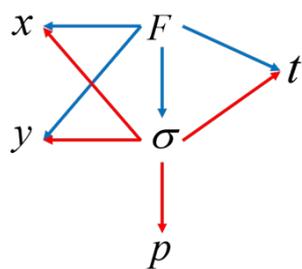
在 σ 坐标系中，垂直速度的定义为 $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ ，由前的定义，可知

$$\sigma = 0, \dot{\sigma} = 0; \sigma = 1, \dot{\sigma} = 0$$

上下边界变得极为简单。

(3) p, σ 坐标系间的一些转换关系

对于任意变量 $F(x, y, p, t)$ ，如下关系式恒成立



$$F(x, y, p, t) = F[x, y, \sigma(x, y, p, t), t] (*)$$

【注】从数学上来说 $F(x, y, \sigma(x, y, p, t), t)$ 的自变量是 x, y, p, t , $F(x, y, \sigma, t)$ 的自变量是 x, y, σ, t 且 σ 还是中间变量。

上式两端对 $s (s = x, y, t)$ 求偏导, 有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_\sigma + \frac{\partial F}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}\right)_p$$

由 $\sigma = \frac{p - p_T}{p^*}$, 得 $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s}\right)_p = \frac{\partial \sigma}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial s} = -\frac{p - p_T}{p^{*2}} \frac{\partial p^*}{\partial s} = -\frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial s}$, 于是上式可写为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)_\sigma - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

由此导出 p, σ 两坐标的二维微分算子转换关系

$$\nabla_p = \nabla_\sigma - \frac{\sigma}{p^*} \nabla p^* \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

若(*)式两端对 p 求偏导, 有

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} \xrightarrow{\frac{\partial \sigma}{\partial p} = \frac{1}{p^*}} \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{p^*} \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

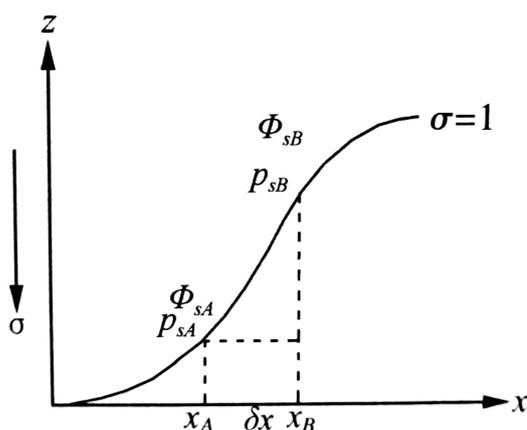
若取 F 位势高度场 Φ , 则有 $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{1}{p^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -p^* \alpha$

(4) σ 坐标系的优缺点

σ 坐标系的下边界条件变得极为简单, 便于研究地形对大气运动的影响。但是 σ 坐标系中的水平运动方程变得十分复杂。在地形陡峭的地方, 气压梯度力为两个大量之间的小差, 难以计算准确。

下面来讨论一下 σ 坐标下的压强梯度力项。利用前面提到的转换公式。将 p 坐标下的表达式写到 σ 坐标下为:

$$-\nabla_p \Phi = -\nabla_\sigma \Phi + \frac{\sigma}{p^*} \nabla p^* \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\nabla_\sigma \Phi - \sigma \alpha \nabla p^*$$



上式表明,在 σ 坐标中的水平压强梯度力由两项组成,如左图所示,在地面地表坡度很大的地方,将微分用差分近似(取 $p_T = 0$)有:

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_\sigma \approx \frac{\Phi_{sA} - \Phi_{sB}}{\delta x} < 0 \\ -\sigma \alpha \frac{\partial p^*}{\partial x} \approx \sigma \alpha \frac{p_{sA} - p_{sB}}{\delta x} > 0 \end{cases}$$

而上述的两项的数值很大,但符号相反,因此,采用 σ 坐标系并没有解决处理地形问题存在的困难,而是把 p 坐标系下边界条件的复杂性转变为水平气压梯度力的计算精确性。

克服的办法:

- ① 将 σ 坐标面的资料垂直内插到 p 坐标面,在等压面上计算气压梯度力;
- ② 在格点上假定一平均气压廓线,从两项中扣除静力分量;
- ③ 设计精确的差分格式;
- ④ 采用 $\sigma-p$ 混合坐标,低层用 σ 坐标,中高层用 p 坐标。

12. 地图投影有关知识

(1) 地图投影的概念

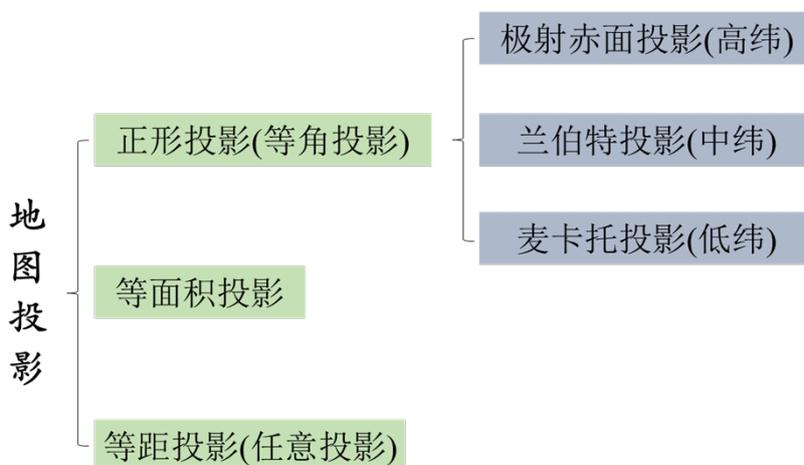
按照一定的数学条件(假想一个光源放在地球的某个位置),把球形的地球表面展绘于平面图上。

(2) 地图投影的误差: 距离误差、面积误差、角度误差(形状误差)

距离误差是指投影面上长度的放大或缩小倍数随地点或方向而改变。面积误差是指投影面上面积的放大或缩小倍数随地点而变化。角度误差或形状误差是指投影面上任何两条交线的夹角不等于地球上相应两条交线的夹角,或者投影面上某一地理区域的形状与地球上相应区的形状相似,这种类型的地图投影误差称为

角度误差或形状误差。

(3) 地图投影的种类



- ① **正形投影**：保持夹角不变的投影方式，即经过投影后地球上任意两条交线的夹角保持不变。目的是保证图上风向的准确性气压系统的形状、移动方向和实际相同，正形投影虽然没有角度误差，但有面积误差。
- ② **等面积投影**：在等面积投影面上，各地点面积的大小或缩小倍数均相等。即投影面上任意地理区域的面积都与地球表面上相应区域的面积成一定比例关系，这种地图投影没有面积误差，但有形状误差。
- ③ **等距投影**：既不等角又不等面积的投影称为任意投影。在这种地图投影中既有形状误差，也有面积误差。等距投影是一种任意投影，指沿某一特定方向之距离，投影之后保持不变，即沿该特定方向长度之比等于 1。

(4) 投影面、映像平面与地图

投影的投射面叫做投影面或映像面，它可以是平面，圆锥面或柱面(曲面)。例如极射赤面投影的投影面为平面，兰伯特投影的投影面为圆锥面，而麦卡托投影的投影面为圆柱面。投影面沿某一条经线切开所展成的平面称为映像平面。地图就是指映像平面按照地图比例尺缩小后的图。

(5) 切投影、割投影与标准纬度

投影面与地球表面相切于某一纬圈的投影称为切投影；投影面与地球表面相割于一个或两个纬圈的投影叫做割投影。映像面平面与地球表面相交的纬度称为

标准纬度，在标准纬度上，映像面上的距离精确地等于地球表面上相应的距离。

(6) 地图放大系数 m

$$m = \frac{\text{投影面上的距离}}{\text{地球上相应的实际距离}}$$

性质：对于进行投影 m 仅是度的函数；对于同一点，任意切线方向上放大系数的均相等；在标准纬度上 $m=1$ 。

(7) 正形投影的三种形式

① 兰伯托投影(Lambert Projection, 圆锥投影, 适用于中纬度温带地区)

以圆锥面作为投影面，使圆锥面与地球面相切或相割，将地球面上的经纬线投影到圆锥面上，然后把圆锥面沿一条母线剪开展为平面而成。其标准纬度为 30°N , 60°N (圆锥与地球相交的两个纬线圈位置)

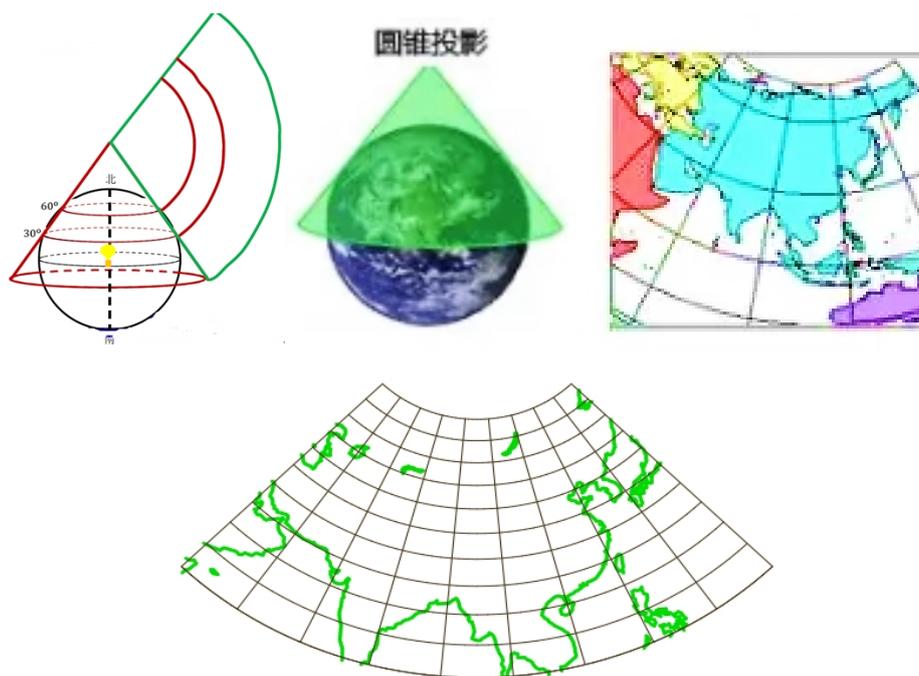


图 1 兰伯特投影示意图

② 极射赤面投影(Stereographic Projection, 半球投影, 适用于高纬度寒带地区)

标准纬度为 60°N

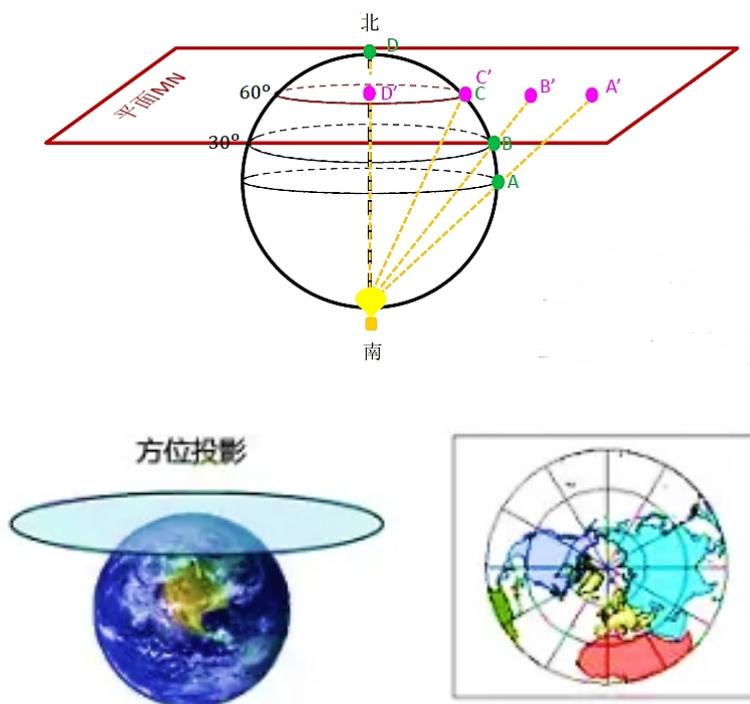


图 2 极射赤面投影示意图

③ 麦卡托投影(Mercator Projection, 圆柱投影, 适用于低纬度热带地区)

设想一个与地轴方向一致的圆柱切于或割于地球, 按等角条件将经纬网投影到圆柱面上, 将圆柱面展为平面后, 得平面经纬线网。投影后经线是一组竖直的等距离平行直线, 纬线是垂直于经线的一组平行直线。各相邻纬线间隔由赤道向两极增大。标准纬度是 22.5°N , 22.5°S

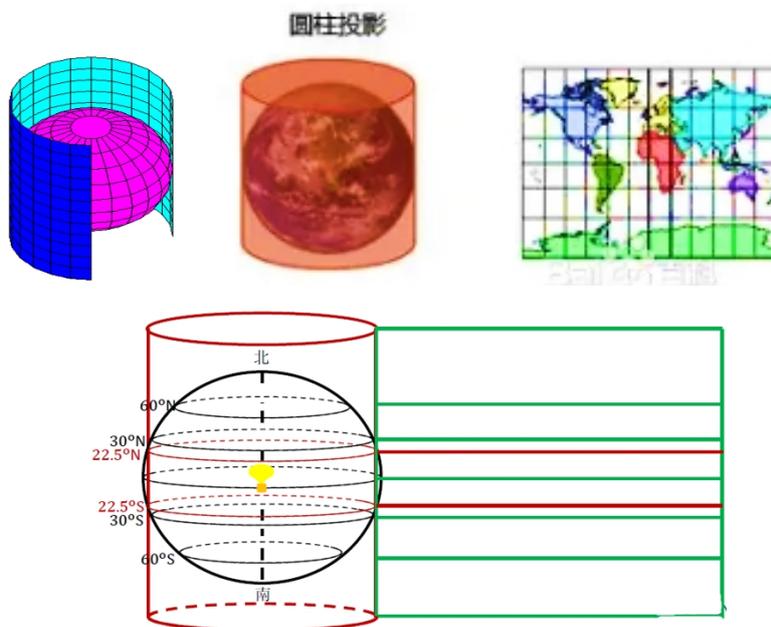
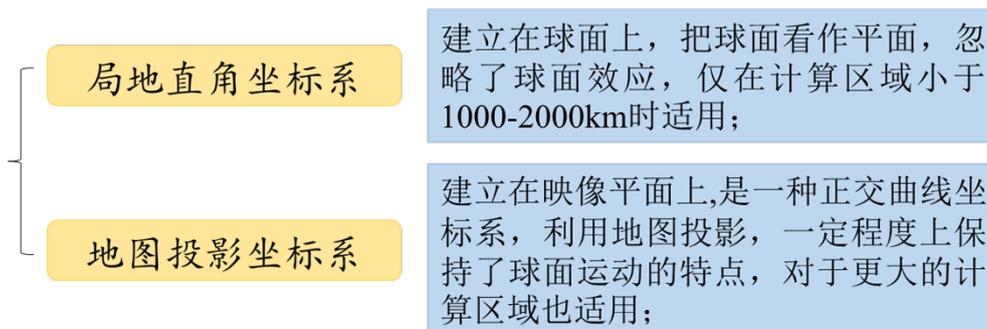


图 3 墨卡托投影示意图

[注] 地图放大系数在三种投影中的特点：在标准纬度上 $m=1$ ；在每种投影的适用区域， $m<1$ ；在适用地区之外， $m>1$ (可以结合投影的特点去理解)。

(8) 地图投影坐标系



➤ 正交曲面坐标系

沿坐标线的单位矢量方向空间点位置的变化而变化的坐标系。

通过坐标系的转换, 建立地球上的微元与映像平面上微元之间的数学关系, 从而建立地图投影坐标系。

地图投影坐标系	对应的地球上
长度元 $\Delta x, \Delta y$	曲线长度元 $\Delta S_x = \frac{\Delta x}{m}, \Delta S_y = \frac{\Delta y}{m}$
面积元 $\Delta x \Delta y$	曲线面积元 $\Delta S_x \Delta S_y = \frac{\Delta x \Delta y}{m^2}$

13. 数值天气预报模式

(1) 关于模式的几个概念

① **模式大气:** 实际大气包含了 各种时空尺度 的大气运动, 其中发生的物理过程也各种各样、复杂多变。为了使数值天气预报得以实现, 在 不失去大气主要特征 的前提下, 需要将非常复杂的大气理想化。这种 简化后的大气模型所描述的大气称为模式大气。

② **噪音及危害:** 诸如重力波、声波这些对大尺度运动意义较小或几乎没有意义的快播, 在气象上称为大尺度运动的“噪音”。他的危害体现在: 直接利用原始方程做预报时, 由于其中预报量比方程中的大项(气压梯度力

项、科氏力项等)小一个量级以上,若计算不加任何处理,则由于资料及计算中的误差,容易使“噪音”被虚假扩大,以致掩盖的有天气意义的运动。

- ③ **数值预报模式 (大气数值模式):** 指进行气候值模拟预测和天气预报的数学方案;或者说针对一定的模式大气,用以描述它的特征和运动规律的闭合方程组及其求解方法。称为数值预报模式。它包括以下几个方面:预报方程组(核心)及其定解条件、数值求解的近似方法与客观分析(数值求解方法)、水平网格、垂直分层和地图投影。

(2) 数值天气预报模式的分类

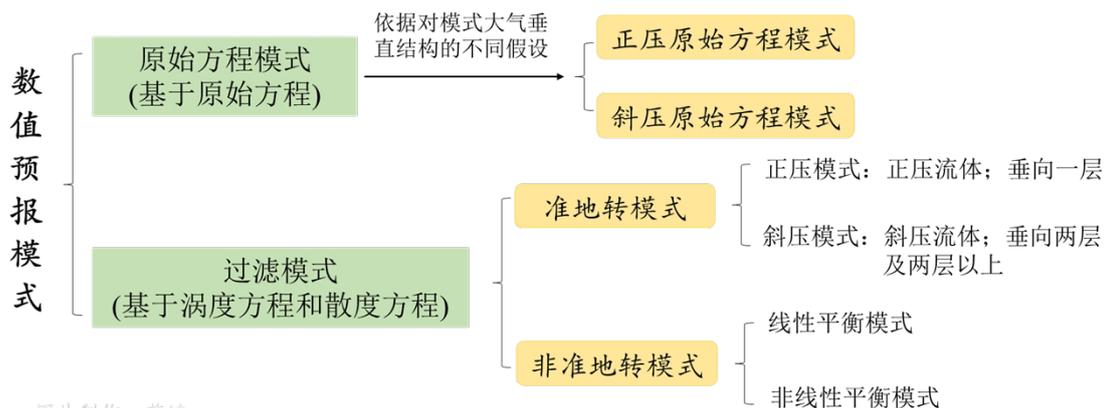
根据水平运动方程采用的形式,数值天气预报模式分为过滤模式和原始方程模式两大类型。

① 过滤模式

大气运动基本方程中包含声波、重力波、惯性波、长波、超长波等基本波动,通过对基本方程进行简化,起到滤波的作用,这些简化后的方程构成过滤模式,描写经过简化的模式大气中的运动。过滤模式的基本方程组有:由水平运动方程的变形即简化后的涡度方程和散度方程,以及相应的热力学方程、静力学方程、连续方程和状态方程,其特点是:采用准地转近似或准无辐散近似滤除了模式中的重力惯性波。

② 原始方程模式

原始方程模式的方程组有:由原始形式的水平运动方程,以及相应的热力学方程、静力学方程、连续方程和状态方程。其特点是:模式中包含了重力惯性波。

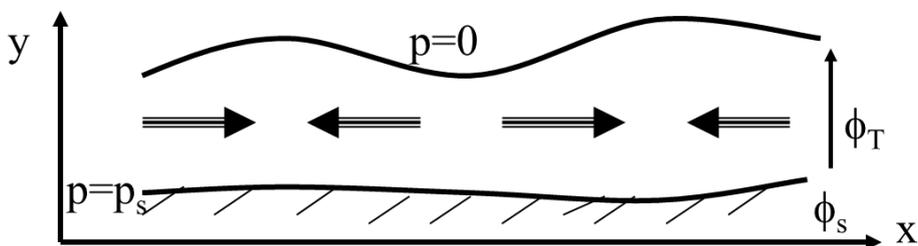


图片制作: 蒋斌

➤ 两种数值模式的比较

- (1) 原始方程模式中描述风压与气压场之间的适应过程，这一过程是通过重力惯性外波的频散来实现；
- (2) 过滤模式出现风压场不适应时，则是通过地转近似或者其他风压场的诊断关系加以调整，这种关系是强加的，而不是大气中自然的物理过程来实现。

14. 正压原始方程描述的物理过程及其守恒量



- (1) 运动的垂直尺度远小于水平尺度(即浅水情形)；
- (2) 允许整层的辐散辐合，辐散辐合引起的流体堆积或减少反映在自由面的起伏上；
- (3) 自由面的变化导致水平气压梯度力的变化，进而引起流场的调整(惯性重力波的频散)；
- (4) 流场调整达到准地转平衡状态后，扰动信号以 Rossby 波的形式传播，相对涡度的改变由自由面起伏和环境涡度变化所引起。

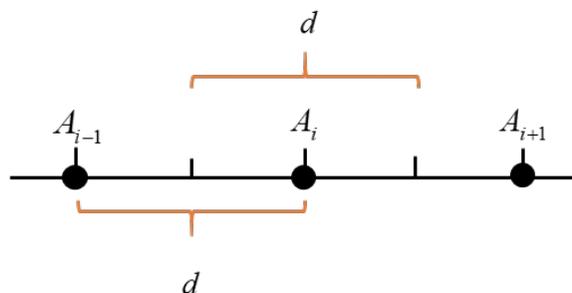
满足的守恒：质量守恒、总机械能守恒(不考虑热力过程)、位涡守恒。

15. 正压原始方程模式的空间差分格式及其守恒性质

一个合理的有限差分方程应该保持对应微分方程的物理特性，微分方程满足的守恒性质差分方程也要满足，这样才能保证差分方程的数值解能沿着正确的途径逼近微分方程的解。按照一定的守恒性质构造的空间差分格式称为守恒的空间差分格式。

- 微分方程组：闭合区域内积分；
- 差分方程组：闭合区域内所有的网格点求和

(1) 差分格式中的一些缩写符号



① 半个网格点

$$\text{差分} \begin{cases} A_x = \frac{1}{d} \left(A_{i+\frac{1}{2},j} - A_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ A_y = \frac{1}{d} \left(A_{i,j+\frac{1}{2}} - A_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \end{cases} \quad \text{平均} \begin{cases} \bar{A}^x = \frac{1}{2} \left(A_{i+\frac{1}{2},j} + A_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ \bar{A}^y = \frac{1}{2} \left(A_{i,j+\frac{1}{2}} + A_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \end{cases}$$

② 整个网格点中央差

$$\bar{A}_x^x = \frac{1}{2d} \left(A_{i+1,j} - A_{i-1,j} \right), \bar{A}_y^y = \frac{1}{2d} \left(A_{i,j+1} - A_{i,j-1} \right)$$

③ 其他的整个网格

$$\bar{A}^{xx} = \frac{1}{4} \left(A_{i+1,j} + 2A_{i,j} + A_{i-1,j} \right), A_{xx} = \frac{1}{d^2} \left(A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1} \right)$$

【记忆方法】

- 只出现一个上标或者下标的，是半个网格的格式。其中带下标不加一杠代表差分；带上标加一杠表示平均；

- 上下标都在且加一杠表示全网格中央差分；
- 上下标的 x, y 表明是沿着那个方向进行运算。

(2) 两种守恒格式的比较

{	一次守恒	$\sum_{i,j} \frac{\partial F_{i,j}}{\partial t} = 0$	求和号下的时间变化项是一次的这种守恒性不够严格，正负号可以相互抵消，不能保证绝对值不无限增长。
	二次守恒	$\sum_{i,j} \frac{\partial F_{i,j}^2}{\partial t} = 0$	求和号下的时间变化项是二次的，这种守恒性较严格(克服了正负号相抵消的问题)。

(3) 一次守恒格式的构造(平流+通量方程)

通量方程: $\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (FV) = 0$; 平流方程: $\frac{\partial F}{\partial t} + (V \cdot \nabla)F = 0$

将通量方程对某一闭合区域积分，根据二维的散度定理有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S F dS = - \int_S \nabla \cdot (FV) dS = - \int_S FV \cdot n dL = - \int_S FV_n dL = 0$$

上式中 n 表示区域 S 边界的法向量， L 表示区域 S 的边界， V_n 表示边界的法向速度。对于闭合区域，边界与外界之间没有通量的交换，所以边界法向速度为 0，故上式积分为 0。它表明， F 的平均值在区域 S 内守恒。

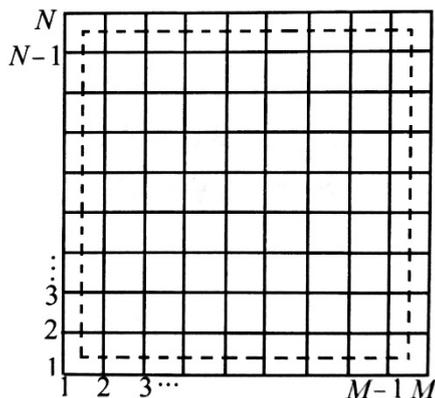
对于通量方程，构造中央差分格式如下

$$\overline{F}_t + (\overline{Fu})_x + (\overline{Fv})_y = 0$$

下面证明这样的差分格式是满足守恒的。对右图所示的区域 S 内各格点求和，得到

$$\sum_{i,j} \overline{F}_t \Delta S = - \sum_{i,j} \left[(\overline{Fu})_x + (\overline{Fv})_y \right] \Delta S = 0$$

$i = 2, 3, \dots, M-1, j = 2, 3, \dots, N-1$



式中 $\Delta S = d^2$ 为面积元(网格间距 d 要足够小)，上式结论的得出已经用到了如下的边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{1,j} = F_{2,j}, F_{M-1,j} = F_{M,j} \\ F_{i,1} = F_{i,2}, F_{i,N-1} = F_{i,N} \end{array} \right. \& \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_{\frac{1}{2},j}^x = \bar{u}_{M-\frac{1}{2},j}^x = 0 \\ \bar{v}_{i,\frac{1}{2}}^y = \bar{v}_{i,N-\frac{1}{2}}^y = 0 \end{array} \right. \quad (\text{闭合区域边界法向速度为0})$$

根据矢量运算法则 $\nabla \cdot (FV) = F\nabla \cdot V + (V \cdot \nabla)F$ ，可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (FV) &= \frac{\partial F}{\partial t} + (V \cdot \nabla)F + F\nabla \cdot V \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial F}{\partial t} + (V \cdot \nabla)F &= \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (FV) - F\nabla \cdot V \end{aligned}$$

因此可以得到平流方程的差分格式为

$$\bar{F}_t + (\bar{Fu})_x + (\bar{Fv})_y - F(\bar{u}_x + \bar{v}_y) = 0$$

采用和通量差分格式一样的证明方法，容易得到上式也是守恒的。

(4) 二次守恒格式的构造(平流+通量方程)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (FV) = 0 \xrightarrow{\text{两边同时乘以} F} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{F^2}{2} V \right) + \frac{F^2}{2} \nabla \cdot V = 0$$

和(3)中一样，方程两边对闭合区域 S 积分，得到 $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{F^2}{2} dS + \int_S \frac{F^2}{2} \nabla \cdot V dS = 0$ 。构造如下的差分格式

$$\bar{F}_t + (\bar{F}^x \bar{u}^x)_x + (\bar{F}^y \bar{u}^y)_y = 0$$

下面证明，该格式是守恒的。首先我们来看一下 $(\bar{F}^x \bar{u}^x)_x$ 的表达式如何。

$$\begin{aligned} \bar{F}^x &= \frac{1}{2} \left(F_{i+\frac{1}{2},j} + F_{i-\frac{1}{2},j} \right), \bar{u}^x = \frac{1}{2} \left(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} \right) \\ \bar{F}^x \bar{u}^x &= \frac{1}{4} \left(F_{i+\frac{1}{2},j} + F_{i-\frac{1}{2},j} \right) \left(u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} \right) \end{aligned}$$

根据 $A_x = \frac{1}{d} \left(A_{i+\frac{1}{2},j} - A_{i-\frac{1}{2},j} \right)$ ，有

$$\begin{aligned} \left(\overline{F^x \bar{u}^x}\right)_x &= \frac{1}{4d} \left[(F_{i+1,j} + F_{i,j})(u_{i+1,j} + u_{i,j}) - (F_{i,j} + F_{i-1,j})(u_{i,j} + u_{i-1,j}) \right] \\ &= \frac{1}{4d} \left[(F_{i+1,j}u_{i+1,j} + F_{i+1,j}u_{i,j} + F_{i,j}u_{i+1,j} + F_{i,j}u_{i,j}) - (F_{i,j}u_{i,j} + F_{i,j}u_{i-1,j} + F_{i-1,j}u_{i,j} + F_{i-1,j}u_{i-1,j}) \right] \\ &= \frac{1}{4d} (F_{i+1,j}u_{i+1,j} + F_{i+1,j}u_{i,j} + F_{i,j}u_{i+1,j} - F_{i,j}u_{i-1,j} - F_{i-1,j}u_{i,j} - F_{i-1,j}u_{i-1,j}) \end{aligned}$$

然后我们对前面构造的差分方程两边同时乘以 F ，有

$$\begin{aligned} F \left(\overline{F^x \bar{u}^x}\right)_x &= \frac{1}{4d} (F_{i,j}F_{i+1,j}u_{i+1,j} + F_{i,j}F_{i+1,j}u_{i,j} + F_{i,j}^2u_{i+1,j} - F_{i,j}^2u_{i-1,j} - F_{i,j}F_{i-1,j}u_{i,j} - F_{i,j}F_{i-1,j}u_{i-1,j}) \\ &= \frac{F_{i,j}^2}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2d} \right) + \frac{F_{i,j}u_{i,j}}{2} \left(\frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2d} \right) + \frac{F_{i,j}}{2} \left(\frac{F_{i+1,j}u_{i+1,j} - F_{i-1,j}u_{i-1,j}}{2d} \right) \\ &= \frac{F_{i,j}^2}{2} \bar{u}_x + \frac{F_{i,j}u_{i,j}}{2} \bar{F}_x + \frac{F_{i,j}}{2} \overline{Fu}_x \end{aligned}$$

同理可得 $F \left(\overline{F^y \bar{v}^y}\right)_y = \frac{F_{i,j}^2}{2} \bar{v}_y + \frac{F_{i,j}v_{i,j}}{2} \bar{F}_y + \frac{F_{i,j}}{2} \overline{Fv}_y$ ，注意到

$$\frac{F_{i,j}u_{i,j}}{2} \bar{F}_x + \frac{F_{i,j}}{2} \overline{Fu}_x + \frac{F_{i,j}v_{i,j}}{2} \bar{F}_y + \frac{F_{i,j}}{2} \overline{Fv}_y$$

正好是 $\nabla \cdot \left(\frac{F^2}{2} \mathbf{V} \right)$ 的差分格式，根据(3)的边界条件，可知其在闭合区域积分后为

0。于是，对前述的差分方程两边同时乘以 F 后对闭合区域积分，得到

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} F_{i,j} \bar{F}'_t \Delta S + \sum_{i,j} F_{i,j} \left[\left(\overline{F^x \bar{u}^x}\right)_x + \left(\overline{F^y \bar{v}^y}\right)_y \right] \Delta S &= 0 \\ \Downarrow \\ \sum_{i,j} F_{i,j} \bar{F}'_t \Delta S + \sum_{i,j} \frac{F_{i,j}^2}{2} (\bar{u}_x + \bar{v}_x) \Delta S &= 0 \end{aligned}$$

从而可以证明我们构造的通量形式的差分格式是守恒的。

对于平流方程的二次守恒形式，我们采用和(3)中同样的方法，可以得到

$$\bar{F}'_t + \left(\overline{F^x \bar{u}^x}\right)_x + \left(\overline{F^y \bar{v}^y}\right)_y - F(\bar{u}_x + \bar{v}_y) = 0$$

注意到有恒等式

$$\begin{cases} \left(\overline{A^x B^x}\right)_x = \overline{(B^x A_x)^x} + A \bar{B}_x \\ \left(\overline{A^y B^y}\right)_y = \overline{(B^y A_y)^y} + A \bar{B}_y \end{cases}$$

于是上述的平流方程的二次守恒格式又可以改写为

$$\overline{F}_t + \left(\overline{u F_x}\right)^x + \left(\overline{v F_y}\right)^y = 0$$

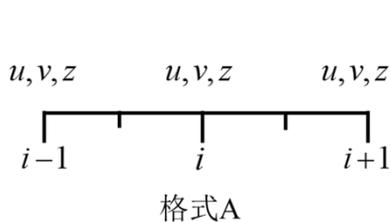
上述差分方程称为半动量格式或者松野格式。

16. 空间差分格式与地转适应

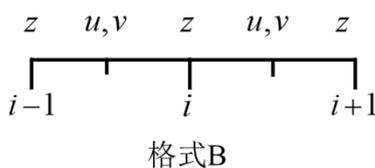
正压原始方程组的线性形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + H_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

(1) 一维情形



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{1}{2d} (z_{i+1} - z_{i-1}) = \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \bar{z}_x = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + H \frac{1}{2d} (u_{i+1} - u_{i-1}) = \frac{\partial z}{\partial t} + H \bar{u}_x = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{1}{d} (z_{i+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g z_x = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + H \frac{1}{d} (u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial z}{\partial t} + H u_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - f \frac{1}{2}(v_{i+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2}}) + g \frac{1}{d}(z_{i+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial u}{\partial t} - f\bar{v}^x + g\bar{z}_x = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial v}{\partial t} + f\bar{u}^x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + H \frac{1}{d}(u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial z}{\partial t} + H\bar{u}_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - f \frac{1}{2}(v_{i+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2}}) + g \frac{1}{2d}(z_{i+1} - z_{i-1}) = \frac{\partial u}{\partial t} - f\bar{v}^x + g\bar{z}_x^x = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{\partial v}{\partial t} + f\bar{u}^x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + H \frac{1}{2d}(u_{i+1} - u_{i-1}) = \frac{\partial z}{\partial t} + H\bar{u}_x^x = 0 \end{cases}$$

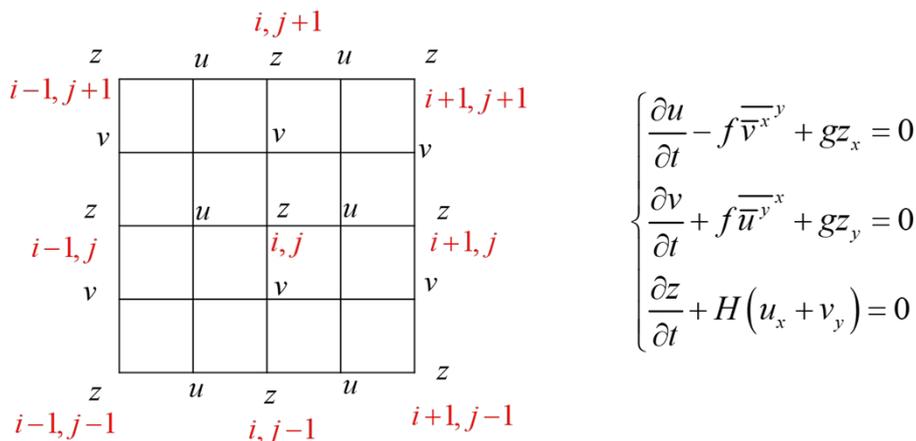
【记忆】 u 和 z 在相同的格点时，二者的空间差分均采用中央差(例如格式 B、D)。

(2) 二维情形

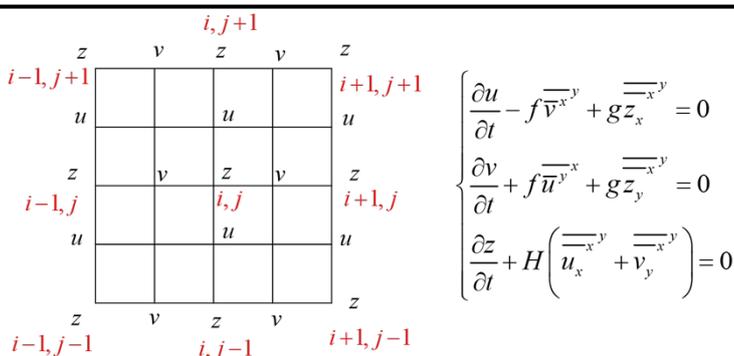
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - f\bar{v} + g \frac{1}{2d}(z_{i+1,j} - z_{i-1,j}) = \frac{\partial u}{\partial t} - f\bar{v} + g\bar{z}_x^x = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f\bar{u} + g \frac{1}{2d}(z_{i,j+1} - z_{i,j-1}) = \frac{\partial v}{\partial t} + f\bar{u} + g\bar{z}_y^y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + H \left[\frac{1}{2d}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{1}{2d}(v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \right] = \frac{\partial z}{\partial t} + H(\bar{u}_x^x + \bar{v}_y^y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - f\bar{v} + g\bar{z}_x^y = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f\bar{u} + g\bar{z}_y^x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} + H(\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x) = 0 \end{cases}$$

$$z_x = \frac{1}{d}(z_{i+\frac{1}{2},j} - z_{i-\frac{1}{2},j}) \Rightarrow \bar{z}_x^y = \frac{1}{2d}[(z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + (z_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - z_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})]$$



格式C



格式D

$$\overline{z_y^y} = \frac{1}{4d} [(z_{i+1,j+\frac{1}{2}} + z_{i,j+\frac{1}{2}} - z_{i,j+\frac{1}{2}} - z_{i-1,j+\frac{1}{2}}) + (z_{i+1,j-\frac{1}{2}} + z_{i,j-\frac{1}{2}} - z_{i,j-\frac{1}{2}} - z_{i-1,j-\frac{1}{2}})]$$

容易对于单个变量，容易证明：

$$\overline{z_y^y} = \overline{z_y^x} = \overline{z_x^y}, \overline{z_x^x} = \overline{z_x^x}$$

17.4 种水平边界条件：固定边界条件(边界上的风、压都不随时间变化)、由区域内要素值来外推边界上的要素值、海绵边界条件、Davis 边界条件。

18.3 种给定初值的办法：静处理、动处理、四维同化

19. 正压大气与斜压大气的区别

- (1) **正压**：没有密度变化，等温面和等压面重合，没有温度平流，忽略变量的垂直变化，将三维问题看作二维问题，不包括内能和动、位能间的转换；
- (2) **斜压**：等温面和等压面不重合，有温度平流，包含内能和动、位能间的转换。

常见斜压过程：如锋面，气旋的形成，寒潮，降水过程等

20. 次网格尺度过程

水汽凝结，湍流对热量、动量和水汽的输送等的时空尺度比大尺度小 1-2 个量级，计算网格上反映不出来，称次网格尺度过程。

21. 参数化方法

把一些次网格的物理过程，通过大尺度的物理量来描述它们的统计效用，并作为某些物理量的源或汇包含在大尺度的方程组中。

22. 斜压数值模式与正压数值模式的求解有何不同？

- (1) 斜压原始方程模式是空间三维的，需要考虑垂直坐标系，而正压原始方程模式是二维的；
- (2) 斜压原始方程模式需要考虑次网格过程，涉及参数化，而正压原始方程模式不需要考虑。

23. 资料同化

(1) 概念

综合利用观测、数值模式及其相关的不确定性，尽可能精确地估计大气流动状态及其相关的不确定性过程。

(2) 意义

利用资料同化将观测数据与上一时刻模式预测的结果相合，可提升对初始场估计的准确度，进而提升下一时刻预报的准确性。

(3) 为什么不直接使用观测数据？

- ① 观测的数据覆盖度有限，无法提供空间每一时刻，每个格点的数据；
- ② 观测变量与模式变量之间往往存在复杂的非线性关系；
- ③ 观测数据也存在一定的误差。

(4) 应用

为数值预报提供优化的初始场；从理论上理解大气的物理过程；可以对污染物和温室气的排放源进行反演。

24.3 类对流参数化方案：[对流入侵型](#)、[对流调整型](#)、[质量通量型](#)

25. 云微物理参数化方案 2 类模型：[Bin](#)、[Bulk](#)

26. 天气预报报不准的原因？

[初值的不确定性](#)、[模型本身的不确定性](#)、[外部参数的不确定性](#)。主要源于前两种不确定性。

27. 参数化的概念及需要参数化的原因

参数化是一种用简化过程代替太小尺度或者太复杂而无法在模型中用物理表示的过程的方法。需要参数化的原因有：

- (1) 所涉及的小尺度过程使得直接表示一个过程的计算成本太高；
- (2) 一个过程的复杂性使得直接表示的计算量太大；
- (3) 没有足够的知识来明确表示如何用数学表达一个过程。

参考资料

- [1] [数值计算方法](#)
- [2] [气候数值模拟-L06 数值差分计算方法](#)
- [3] [气候数值模拟-L05](#)
- [4] [第一章_大气数值模式概论.pdf](#)
- [5] [【精品】正压原始方程模式](#)
- [6] [第四章 正压原始方程模式](#)