



流体力学 I · 学习资料



《达芬奇的手稿》中对水流的描述

中国海洋大学 海洋气象学系
中国海洋大学 海洋气象学系

蒋斌 编著

(2022 年)

Fluid Mechanics I

目录

第一章 流体运动学.....	2
第二章 流体运动的基本方程.....	26
第三章 理想流体动力学.....	43
第四章 理想不可压流体的平面无旋定常流动.....	56
第五章 均质粘性不可压流体运动学.....	71
附录一 流体力学思考题.....	78
附录二 流体力学往年期末考试题.....	79
(一) 2021 秋季学期流体力学期末考试题	79
(二) 2022 年春季学期流体力学期末考试题	81

编者的话

《流体力学 I》的复习资料整理可以说是耗时最久的——没有之一，这也意味着在期末考试之前我没能够及时分享给班级同学，心中颇有些过意不去。不过，我还是坚持利用寒假的闲暇时间把资料完善，我想，做事还是要有始有终比较好。本资料的结构主要根据文凡老师的授课逻辑进行构造，每一章的主要知识点我也去查阅了相应的资料给出了详细的“来龙去脉”。在每一章的末尾，我也给出了参考资料的链接，如果觉得我的解释不能令您满意，可以点击查阅。同时，感谢张一航同学在考试后分享给我他整理的思考题和期末考试题，使得我的资料也得以丰富起来。



2022 年 2 月 8 日
于淅淅沥沥的雨夜

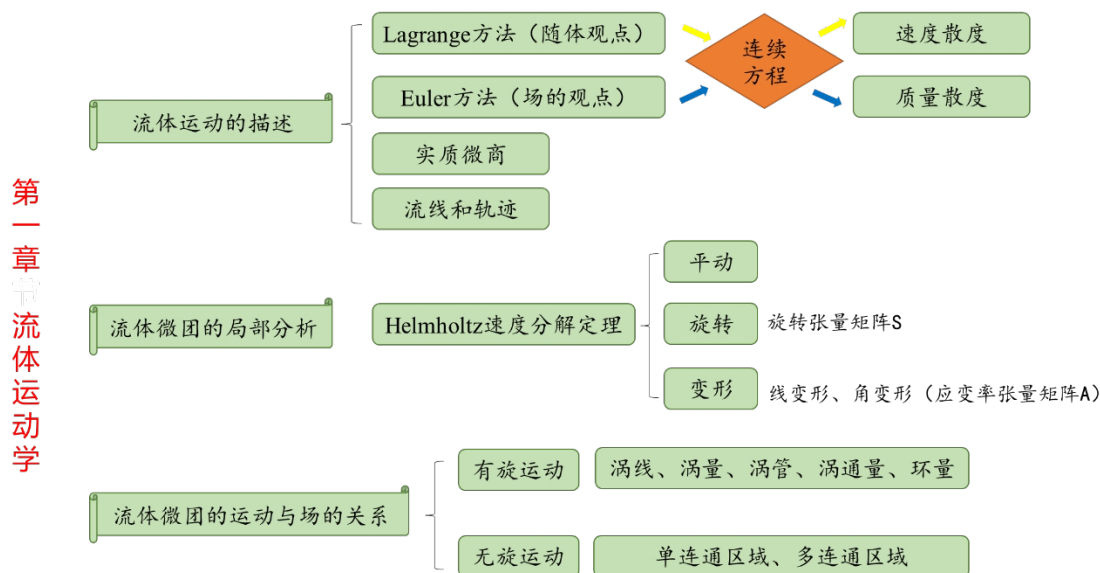
资料更新说明

📅 时间：20230226

感谢 2020 级海洋科学刘健斌同学提出的反馈与建议，针对资料中一些敲错的公式进行了修改，并丰富了一些问题的求解方法。

第一章 流体运动学

➤ 章节思维导图



图片制作：蒋斌

➤ 重要知识点

1. **流体的定义**：不能抵抗任何使其变形，但又不改变体积的趋势。
2. **连续介质假设 (模型)**：连介质模型认为物质连续地无间隙地分布于物质所占有的整个空间，流体宏观物理量是空间点及时间的连续函数。

📚 如何理解该假设

概括起来，就是“宏观上充分小，微观上充分大”以及“宏观上足够快，微观上足够慢”。正因为如此，可以认为物质不由离散的粒子组成，**连续介质完全是在宏观意义下的概念**。在连续介质中，常常把较微观粒子结构尺度大得多而较宏观特征尺度小得多的流体微团称为质点。

📚 既然是假设，应用范围也有限制

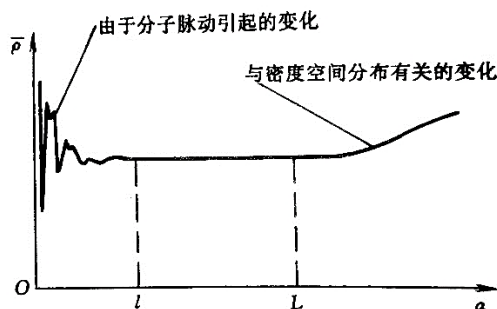


图 1.1 平均密度随尺度的变化

一般考虑的尺度比分子尺度要大得多的时候，连续介质假设是成立的，比如飞机在空气中的运动、船舶在水中的运动。但有时不能成立的，比如稀薄气体（其分子的平均自由程可与物体的特征尺度同阶）、血液在毛细血管中的流动（红细胞直径为 $10^{-6}m$ 与毛细血管直径相当）

3. 描述流体的两种方法——*Lagrange* 和 *Euler* 方法

(1) *Lagrange* 方法（随体描述）¹

设流体中的某一质点用一组数 (a,b,c) 表示（ (a,b,c) 为跟随该质点的坐标）， f 为该质点的某一物理量（矢径、速度、压强）在时间 t 时刻的值，那么 *Lagrange* 的数学描述为：

$$f = f(a, b, c, t)$$

例如，在 t 时刻流体质点的位置以 $\vec{r}$ 表示，那么其 *Lagrange* 描述为：

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ \vec{r} &= \vec{r}(a, b, c, t) \text{ 或者 } y = y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned}$$

(2) *Euler* 方法（空间描述）

Euler 描述的物理量是占据该空间点的流体质点的物理量，仍以 f 表示流体的一个物理量，其数学表达式为（在空间直角坐标系下）：

$$f = F(x, y, z, t) = F(\vec{r}, t)$$

例如, 流体速度的 *Euler* 描述为:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ \vec{v} &= \vec{v}(x, y, z, t) \text{ 或者 } v = v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned}$$

需要注意的是, 上述的流体速度描述表示的含义为: 在时刻 t 运动到空间点 (x, y, z) 的流体质点具有相应的速度 $\vec{v}$, 但是并未显示这一速度属于哪个质点.

▲ 因为 *Euler* 描述提供了一个个物理量的场, 在研究问题时比较方便, 因此, 在流体力学中空间描述成为主要的描述方法.

(3) *Lagrange* 描述与 *Euler* 描述之间的关系

设流体质点 (a, b, c) 恰好在时刻 t 运动到空间点 (x, y, z) 上, 按照 *Lagrange* 方法

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \quad ①$$

$$\text{又因为是同一物理量, 所以有 } f(a, b, c, t) = F(x, y, z, t) \quad ②$$

将①代入②, 可将 *Euler* 描述转化为 *Lagrange* 描述, 当然, 也可以反解① (雅可比行列式存在), 再代入②, 实现 *Lagrange* 描述向 *Euler* 描述转化 (这里比较抽象, 结合后面的例题理解)

经验: 由欧拉表示法到拉格朗日表示法的变换要求积分运算, 而从拉格朗日表示法到欧拉表示法的变换要求微分运算.

4. 实质微商 (随体导数) 与流体质点加速度

(1) *Lagrange* 描述

$$a(a, b, c, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(a, b, c, t)}{\partial t}, \text{ 即加速度就是速度对时间的偏导数 (随体导数),}$$

因为就是对同一质点而言

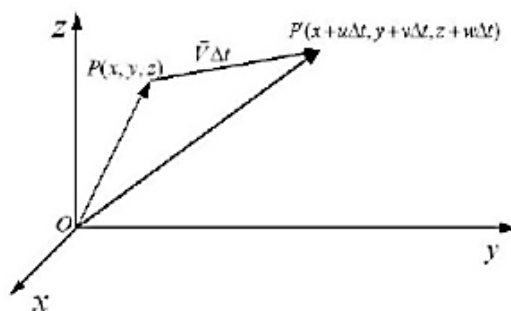
(2) *Euler* 描述

$a(x, y, z, t) = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}$ 不能称为流体质点的加速度，因为在直角坐标系下，

这个偏导数表示的意义为：固定某一空间点，求该空间点随时间的变化率——即局地变化率，这样的话就不是针对同一流体质点了。因此，欧拉描述下的加速度表达式应该采用全导数的形式，即（设 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ ）：

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

上述加速度可以写成分量形式，这里不做赘述。（也可尝试在直角坐标系下采用另一种方式推到加速度公式，如下图）



$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_{p'} - \vec{V}_p$$

$$= \vec{V}(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - \vec{V}(x, y, z, t)$$

$$\Delta \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u\Delta t + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v\Delta t + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w\Delta t + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \Delta t + 0(\Delta t^2)$$

$$= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \Delta t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \Delta t + 0(\Delta t^2)$$

(3) 实质微商公式

根据加速度的推到过程，若把速度换成任一物理量 F ，则可以得到实质微商的普适公式：

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) F$$

▲ 关于实质微商公式中哈密顿算子(Nabla)的数学说明

设有矢量 $\mathbf{A} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ 和标量 $u = u(x, y, z)$

Nabla 算子的表达式为： $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ ，这里需要注意的是， $\mathbf{A} \cdot \nabla$ 与

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的结果是完全不同的，它们的展开如下：

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \nabla = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{cases}$$

由上可知，矢量与 *Nabla* 算子进行点乘时，位置不同，结果也不一样。若矢量在算子的左侧，那么结果就为正常向量的点乘；若矢量在右侧，则在点乘的基础上，函数还要放到偏微分算子运算符里面去，即算子作用于函数。

另外， $\mathbf{A} \cdot \nabla$ 的结果既能继续作用于标量函数，又能继续作用于矢量函数：

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) A = P \frac{\partial A}{\partial x} + Q \frac{\partial A}{\partial y} + R \frac{\partial A}{\partial z}, (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{u} = P \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + Q \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + R \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$$

梯度： $\nabla + \text{标量} \rightarrow \text{矢量}$ 根据左边的三个基本概念，得到算子的运算原则：
 散度： $\nabla \cdot + \text{矢量} \rightarrow \text{标量}$ (1) 弄清楚算子是对什么运算；
 旋度： $\nabla \times + \text{矢量} \rightarrow \text{矢量}$ (2) 明白运算的结果是什么；
 (3) 分别微分原则（类比复合函数求导）

例如：已知标量函数 φ 和矢量函数 $\mathbf{u}$ ，求 $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{u})$ 。 $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{u}$

➤ 首先根据分别微分原则写出式子： $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}) = [\nabla () \varphi] () \mathbf{u} + \varphi () [\nabla () \mathbf{u}]$

➤ 再根据对什么运算、运算结果确定运算符号：

$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{u})$ 是一个散度运算，因此分别微分后的各项应该为标量

$\nabla \cdot$ 只能跟向量，而 ∇ 后只能跟标量，由此确定中括号处的形式应为 $\nabla \varphi$ ， $\nabla \cdot \mathbf{u}$

$\nabla \varphi$ 是矢量， $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 是标量，由此确定最终的形式为：

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{u}$$

5. 流线和轨迹

(1) **流线**：在某一时刻，描述流场中各点流动方向的曲线，表现为流线上任何一点的切线方向与流体在该点的速度方向一致。显然，流线对应于 *Euler* 描述。

在流线上取一小微元 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ ，根据流线的定义，有

$d\mathbf{r} \times \mathbf{V} = 0$ ($\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$)，把该式展开，得到在直角坐标系下的表达式：

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

(2) **轨迹**：某一质点在某一时间段内的运动轨迹，即同一质点在不同时刻的位置的连线，由此可知，轨迹对应于 *Lagrange* 描述。轨迹方程就是 *Lagrange* 描述

中的 $x = x(a, b, c, t)$, $y = y(a, b, c, t)$, $z = z(a, b, c, t)$, 但是由于我们在流体力学中常常采用 *Euler* 描述, 即都是给出速度场, 即:

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

解出上述的微分方程组, 就可得到轨迹方程。轨迹方程的表达式又可简写成如下形式:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

(3) 流线和轨迹的区别

- ① 迹线是同一质点不同时刻所形成的曲线, 它给出同一质点在不同时刻的速度方向; 流线是同一时刻不同质点的所组成的曲线, 它给出该时刻不同流体质点的运动方向。
- ② 迹线方程中, 时间 t 是自变量, x, y, z 是 t 的函数; 在流线方程中, 时间 t 是参数, 积分时当作常量处理。
- ③ 迹线是与拉格朗日方法相联系的; 流线是与欧拉方法相联系的。
- ④ 不定常运动时, 流线和迹线一般是不重合的, 而在定常运动时, 二者必然重合。

6. 连续方程 (质量守恒定律)

(利用散度定理 $\int_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ 来推导)

(1) *Euler* 观点: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$ ($\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})$ 称为质量散度)

(2) *Lagrange* 观点: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ($\nabla \cdot \mathbf{V}$ 称为速度散度)

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 表示是定常流, 即密度的局地变化为零 (也就是质量散度为 0), 它表示

单位时间内流出和流入固定控制体的质量是相等的; $\frac{d\rho}{dt} = 0$ 则是不可压缩流体,

$\rho = \text{const}$, 它表示流体在流动过程中流点的密度始终保持不变。

7. 亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理——流场内一点邻域的相对运动分析

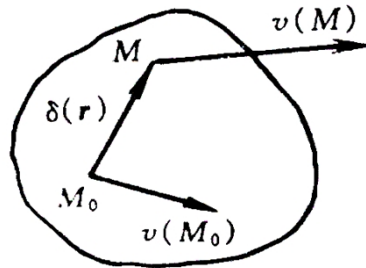


图 1.2 一点邻域的速度

如图 1.2 所示, 在时刻 t 的流场中取一点 $M_0(\mathbf{r}) = (x, y, z)$ 邻域任何一点 $M(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, 设 M_0 点的速度为 $\mathbf{v}(M_0)$, 由 Taylor 展开式, 当 $|\delta\mathbf{r}| \rightarrow 0$ 时, 邻点 M 的速度可以写为:

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(M_0) + \delta\mathbf{V} = \mathbf{V}(M_0) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \delta z$$

写成分量的形式如下:

$$\begin{cases} u(M) = u(M_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v(M) = v(M_0) + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w(M) = w(M_0) + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{cases}$$

根据矢量运算的物理意义可知, $\delta\mathbf{V}$ 实际上表示的是 M 点相对于 M_0 点的相对运动速度, $\delta\mathbf{V}$ 的表示可以用如下的矩阵来表示:

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

上式中的方阵可以分解为两个方阵:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

令等式右边的第一个矩阵为记为 A ，第二个矩阵为 S ，显然， A 矩阵是对称的，而 S 矩阵是反对称的，下面分别介绍矩阵中分量的所代表的物理意义，进而得到速度分解定理。

(1) 相对伸长率

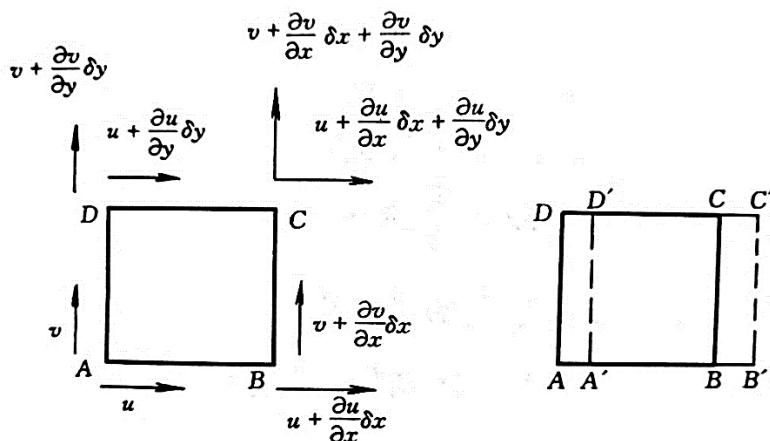


图 1.3 流体的平动

假设流体微团只沿 x 方向平动，物质线由 AB 变成 $A'B'$ ($\overline{AB} = \delta x$)，计算其相对伸长率为：

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x\right) \Delta t - u \Delta t}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = A_{11}$$

类比可知， $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = A_{22}$ ， $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = A_{33}$ 也具有表示相对伸长率的意义。由此可见。

A 矩阵主对角线三个物理量分别表示 x, y, z 方向上的相对伸长率。

▲ 进一步讨论 A_{11}, A_{22}, A_{33}

对于一个正方体流体微团，当 x, y, z 方向发生伸长或者缩短变化时，必然会导

致流体微团的体积发生变化，易求体积的相对变化率为：

$$\frac{\left(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \Delta t\right) \left(\delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y \Delta t\right) \left(\delta z + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \Delta t\right) - \delta x \delta y \delta z}{\Delta t} \div \delta x \delta y \delta z$$

$$\approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

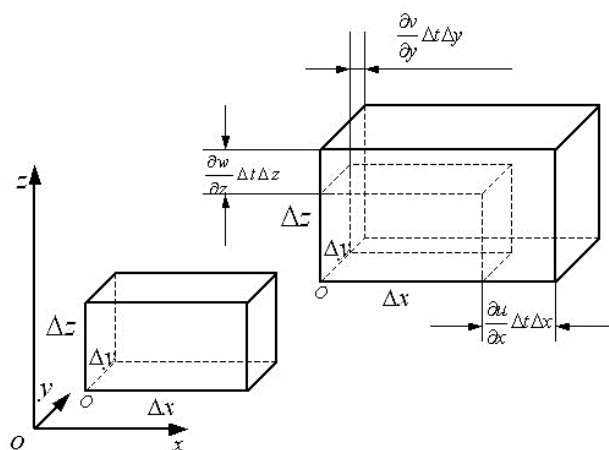


图 1.4 纯膨胀变形

这里说明，散度的物理意义还可以表述为：①体积的相对变化率；②三根正交物质线的相对伸长率之和。

(2) 旋转角速度

两正交微元流体线角速度的平均值，也即角平分线的旋转角速度。

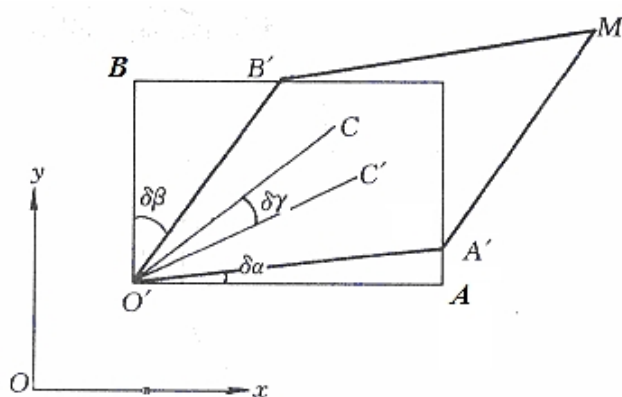


图 1.5 流体微团的旋转示意图

根据图 1.5，因为 $\delta\alpha$ 、 $\delta\beta$ 很小，可以用利用等价无穷小的关系： $\alpha \sim \tan \alpha$

来求解角度的变化, 即 $\delta\alpha = \frac{AA'}{\delta x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \delta x dt}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$, $\delta\beta = \frac{BB'}{\delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \delta y dt}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} dt$ 。

利用几何关系 $\begin{cases} \frac{\pi}{2} = \delta\alpha + \delta\beta + 2\angle A'O'C' \\ \frac{\pi}{4} = \delta\gamma + \delta\alpha + \angle A'O'C' \end{cases}$, 可以求得旋转角 $\delta\gamma = \frac{1}{2}(\delta\beta - \delta\alpha)$, 故旋

转角速度为 $\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\gamma}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ (规定逆时针方向的转角为正, 顺时针方

向的转角为负。根据图中可知 $\delta\gamma < 0$, 而角速度分量为标量应该大于零), 同理

可得到: $\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$, $\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ 。由此, 矩阵 S 又可写成:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

上面的矩阵 S 称为旋转张量。

▲ 进一步讨论 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V} \end{aligned}$$

上式表明, 速度旋度是角速度矢量的两倍。由此又可定义: $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, 称为无旋运动; $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$, 称为有旋运动。 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ 称为涡量, 在气象学上又称为涡度。

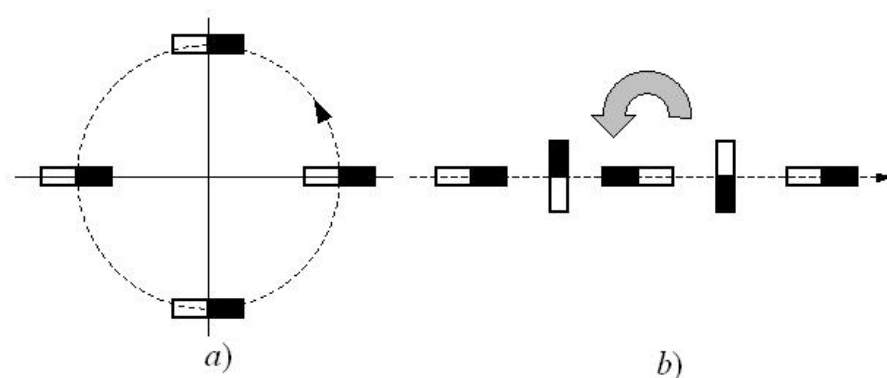


图 1.6 无旋运动(a)与有旋运动(b)

(3) 角变形率

直角边与角平分线夹角的变化速度。在图 1.5 中，流体微团发生变形后，角度变化量为： $\delta\theta = \delta\alpha + \delta\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta t$ ，根据定义，可以得到角变形速率

$$\varepsilon_{yx} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = A_{12}$$

同理可得到 $\varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = A_{23}$, $\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = A_{13}$ 。讨论至此，矩阵 A 可以表示为如下形式：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

上面的矩阵 A 称为应变率张量。

通过上述的讨论，亥姆霍兹速度分解定理便可写成如下矢量形式：

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(M_0) + (A + S) \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{V}(M_0) + \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V} \times \delta \mathbf{r} + A \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_D$$

它表明，点 M_0 邻近的任一点上的速度可分成三个部分：与 M_0 点相同的平移速度；绕 M_0 点转动在 M 点引起的速度；变形在 M 点引起的速度。(平动+转动+变形)

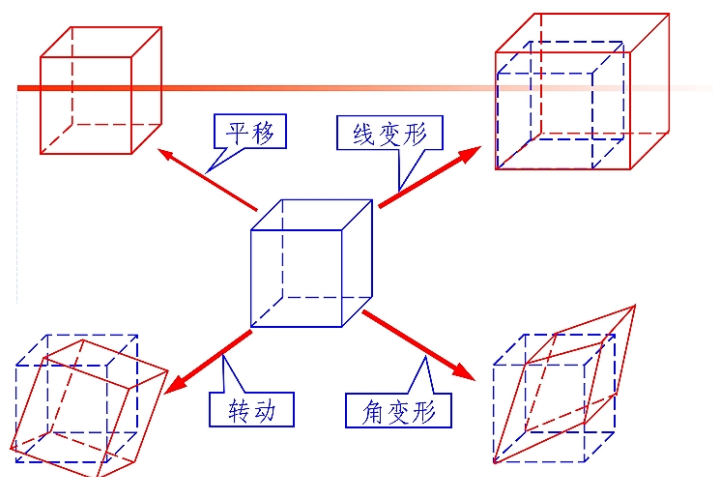


图 1.7 流体微团运动示意图

8. 变形速度(Deformation Velocity)对应的二次曲面与主轴的求法

(1) 势函数与速度势

如果某一矢量函数沿某方向的投影恰好等于某一标量函数在该方向上的偏导数，则称该矢量为有势矢量，此标量函数称为该矢量的势函数。根据高数中的结论： $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{u} = (u, v, w)$) 是 $u dx + v dy + w dz$ 成为某一标量函数 $\Phi(x, y, z, t)$ 全微分的充要条件。

在三维情形下， Φ 称为等值（势）面；在二维情形下， Φ 称为等值线。对于速度矢量 $\mathbf{V}$ ，其速度势 $\Phi(x, y, z, t)$ 与分量速度的关系为：

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} (\Leftrightarrow \mathbf{V} = \nabla \Phi)$$

利用上述公式代入 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ，可得 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ，从而 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ 。也就是说势函数存在，对应的一定是无旋运动（有势 $\Leftrightarrow$ 无旋）。容易验证，速度势函数满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

(2) 变形速度对应的二次曲面

引入相对坐标 $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0, \zeta = z - z_0$ （相对于质心的位置），根据速度

分解定理有, $V_D = A \cdot \delta r$, 写成分量形式有:

$$\begin{cases} u_D = A_{11}\xi + A_{12}\eta + A_{13}\zeta \\ v_D = A_{21}\xi + A_{22}\eta + A_{23}\zeta \\ w_D = A_{31}\xi + A_{32}\eta + A_{33}\zeta \end{cases} \quad (A_{ij} \text{ 是应变率矩阵 } A \text{ 中的分量})$$

再结合 $u_D = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, v_D = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, w_D = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$, 可以解出变形速度对应的二次曲面为:

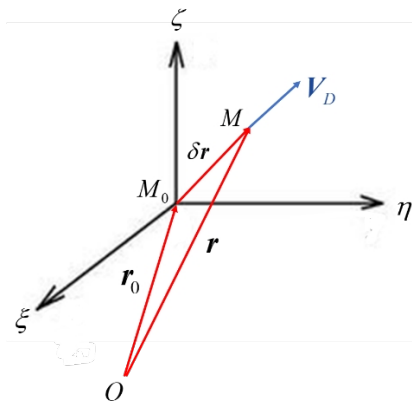
$$\Phi = \frac{1}{2}(A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2) + A_{12}\xi\eta + A_{13}\xi\zeta + A_{23}\zeta\eta = C \quad (\text{等值面}) \quad (\text{I})$$

(3) 二次曲面的主轴及其求法

在流体微团中, 存在三根正交的轴线, 这三根轴线能够代表整个微团的变形情况, 且在这三根轴线上, 仅有拉伸和收缩, 这三根轴线称为主轴。在空间中建立直角坐标系, 当空间坐标系与主轴重合的时候, 称改直角坐标系为主轴坐标系。显然, 在主轴坐标系下, 应变率矩阵应为对角阵。从一般坐标系到主轴坐标系, 只需要进行坐标变换。对(2)中(I)式做相应的线性变化后, 必有新的等值面:

$$\Phi' = \frac{1}{2}(A'_{11}\xi'^2 + A'_{22}\eta'^2 + A'_{33}\zeta'^2) = C' \quad (\text{II})$$

下面从代数的角度来讨论主轴坐标的求法 (在求的同时也是证明)



设 $V_D = \lambda(r - r_0) = \lambda \delta r$, $\delta r = \xi i + \eta j + \zeta k$, 根据前面的阐述, 有如下方程组:

$$\begin{cases} \lambda \xi = A_{11}\xi + A_{12}\eta + A_{13}\zeta \\ \lambda \eta = A_{21}\xi + A_{22}\eta + A_{23}\zeta \\ \lambda \zeta = A_{31}\xi + A_{32}\eta + A_{33}\zeta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A_{11} - \lambda)\xi + A_{12}\eta + A_{13}\zeta = 0 \\ A_{21}\xi + (A_{22} - \lambda)\eta + A_{23}\zeta = 0 \\ A_{31}\xi + A_{32}\eta + (A_{33} - \lambda)\zeta = 0 \end{cases}$$

设 δr 的方向余弦为 $li + mj + nk$, 根据 $\delta r = \delta r \cdot (li + mj + nk)$, 上面的方程组可

以进一步写为:

$$\begin{cases} (A_{11} - \lambda)l + A_{12}m + A_{13}n = 0 \\ A_{21}l + (A_{22} - \lambda)m + A_{23}n = 0 \\ A_{31}l + A_{32}m + (A_{33} - \lambda)n = 0 \end{cases}$$

我们知道, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 也就是说上述方程有非零解存在, 那么必有系数行列式为 0, 即:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

显然这是关于 λ 的一个三次方程, 必能解出三个不同的 λ , 回代方程, 得到三个不同的方向余弦, 由此确定了主轴。结论: $A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ (即 λ 的物理意义为相对伸长率)

9. 有旋运动

(1) **判断物理量:** 涡度—— $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ 对应无旋运动, $\nabla \times \mathbf{V} \neq 0$ 为有旋运动. 涡度的一个基本性质为 $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$.

(2) 有关基本概念

① 涡线 (类比流线)

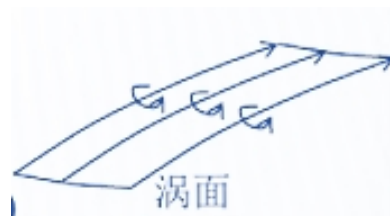
于某给定时刻, 曲线上任意一点的切线方向与在该点的流体的涡量方向一致.

$$\text{涡线方程: } \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} = 0, \text{ 直角坐标系下: } \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

根据涡线定义, 空间任一点只能作一条涡线。

② 涡面

给定瞬间, 通过某一曲线(本身不是涡线)的所有涡线构成的曲面称为涡面。



③ 涡管

由封闭涡面组成的管状涡面称为涡管

④ 涡通量

通过某一开口曲面的涡量总和, $J = \iint_A \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}$

(3) 涡量守恒定理 (Helmholtz 运动学涡旋定理)

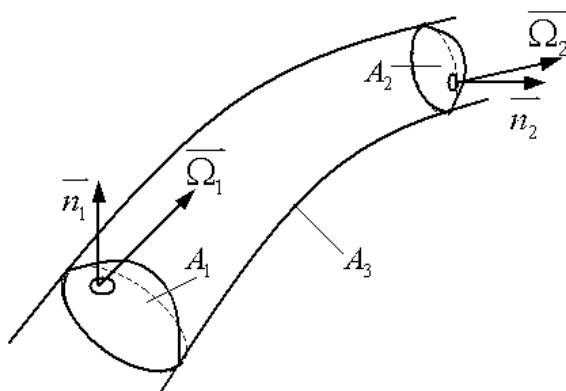


图 1.8 涡量守恒证明示意图

定理: 在同一时刻, 同一涡管的各个以绕涡管壁面的封闭曲线为边界的曲面
上的涡通量相同。证明过程如下:

结合涡度的性质以及涡通量的表达式, 有

$$0 = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV \xrightarrow{\text{散度定理}} - \int_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_1 dA + \int_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_2 dA + \int_{A_3} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_3 dA$$

根据涡线的定义, $\int_{A_3} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_3 dA = 0$, 从而 $\int_{A_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_1 dA = \int_{A_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_2 dA$, 得证。

▲ 从上述定理可以得到推论:

- ① 对于同一个微元涡管来说, 在截面积越小的地方, 流体旋转的角速度越大;
- ② 涡管截面不可能收缩到零。涡管不能始于或终于流体, 而只能成为环形, 或者始于边界, 终于边界, 或者伸展到无穷远。

(4) 速度环量及其与涡通量的关系

在流场中任取一封闭曲线 L , 速度沿该封闭曲线的线积分称为曲线 L 的速度环量. $\Gamma = \oint_L \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_L udx + vdy + wdz$ 。规定积分时正向为: 封闭曲线所包围的区域总在行进方向的左侧。

速度环量与涡通量有密切的关系。若 S 是以封闭周线 L 为周界的曲面, 如 L 为可缩曲线, 则由斯托克斯公式得

$$\Gamma = \oint_L \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = J$$

也就是说,可缩封闭曲线 L 的速度环量等于穿过以该曲线为周界的任意开口曲面的涡通量。

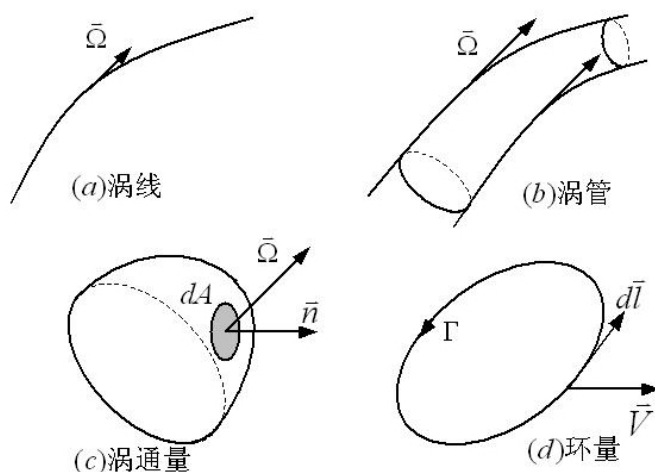


图 1.9 基本概念的示意图

10. 无旋运动

(1) 可收缩曲线与可重合曲线

在不碰边界的前提下,区域中的任意,一条曲线可收缩至一点,则该曲线称为可收缩曲线;若区域中的任意两条曲线经过变换可以完全重合,称两条曲线的任何一条为可重合曲线。若在给定的区域中,做出了 n 条不可重合不可收缩的曲线,则称该区域为 $(n+1)$ 连通区。

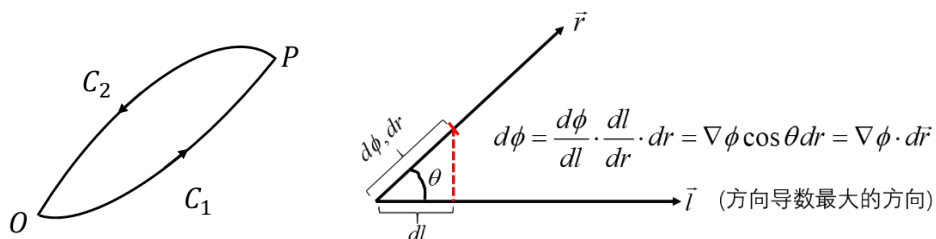
(2) 单值与多值速度势 $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$

① 单值速度势, 对应单连通区域的无旋运动。如下左图所示, 由 stokes 公式,

$$0 = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow \int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}, \text{ 即积分与路径无关,}$$

所以 O 和 P 两点的速度势只差了一个数, 即 $\phi_P - \phi_O = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ 。在单连通域中,

速度势是单值函数, 而且沿任意封闭曲线的环量为零。因此在单连通域的无旋流动中不可能存在封闭流线。 $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ 是单连通域里积分与积分路径无关的充要条件。



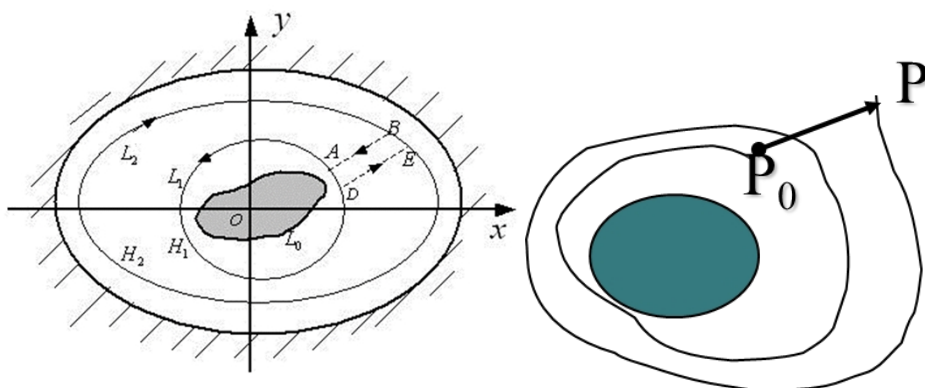
② 多值速度势，对应于多连通区域的无旋运动。此时积分的值与路径是有关的，我们通过双连通区域来加以说明。

证明一个定理：对双连通区域，任何不可压缩的封闭曲线上的环流相等。如下左图，在两个无限长的柱面之间的双连通域中做截面构成单连通区域，则有：

$$0 = \oint_{L_1+AB+ED+L_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{L_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + \int_{AB} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + \int_{ED} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{L_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

易知 $\int_{AB} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + \int_{ED} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ，从而 $\oint_{L_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{L_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \oint_{L_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{L_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ ，

上述的定理得证。



如上右图，对于双连通区域，闭合环流不为 0，记为 $\Gamma_0 = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ ，那么双连

通区域的速度势差为： $\phi_p - \phi_{p_0} = n\Gamma_0 + \int_{P_0P} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$

(3) 不可压缩流体的无旋运动的重要性质

① 势函数满足 Laplace 方程和叠加原理，即 $\nabla^2 \Phi_1 = 0, \nabla^2 \Phi_2 = 0 \Rightarrow \nabla^2 (\Phi_1 + \Phi_2) = 0$ ；

② $\int_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0$ ；

③ 速度势在流体内任何点上不可能存在极值；

④ 速度势在任何完全位于流体内部球面上的平均值等于球心处的速度势值；

⑤ 单连通区域的唯一性定理：边界上流体的法向速度唯一确定流场。

➤ 典型例题

1. 设二维流动 $u = x(1+2t)$, $v = y$, $w = 0$, 求 $t=0$ 时通过 $(1, 1)$ 点的轨迹。

解 根据轨迹的定义, 有 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1+2t) \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$, 积分得 $\begin{cases} x = c_1 e^{t(1+t)} \\ y = c_2 e^t \end{cases}$ 。结合条件 $t=0$ 时,

$$x = y = 1, \text{ 可解出 } c_1 = c_2 = 1, \text{ 故 } \begin{cases} x = e^{t(1+t)} \\ y = e^t \end{cases}, \text{ 消去 } t \text{ 得 } x = y^{1+\ln y}$$

2. 已知流动场为 $u = x+t$, $v = -y+t$, $w = 0$, 试求 $t=0$ 时过 $M(-1, -1)$ 点的流线和轨迹。

解 (1) 轨迹方程: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = dt$, 即 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x+t \\ \frac{dy}{dt} = -y+t \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = c_1 e^t - t - 1 \\ y = c_2 e^{-t} + t - 1 \end{cases}$, 根据初

始条件, 求得 $c_1 = c_2 = 0$, 从而 $\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$, 故轨迹方程为: $x + y = -2$

(2) 流线方程: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, 即 $\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t}$, 两边分别对 x, y 积分, 得到

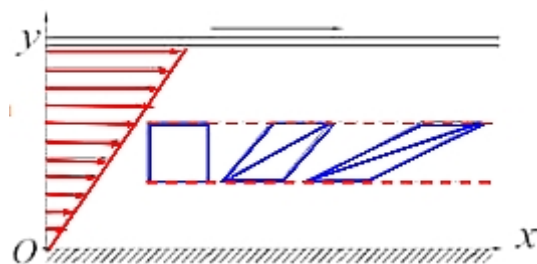
$(x+t)(-y+t) = C$, 根据初始条件, 求得 $C = -1$, 所以 $t=0$ 时刻的流线方程为 $xy = 1$ 。

▲ 本题中关于轨迹方程求解的提示

以 $\frac{dx}{dt} = x+t$ 为例, 这实际上是 x 关于 t 的一阶非齐次常微分方程, 写成标准形式为: $x'(t) - x = t$, 其通解为 $e^{-\int P(t)dt} \left(\int Q(t) e^{\int P(t)dt} + C \right)$

3. 已知平面剪切流场为: $u = ay (a > 0)$, $v = 0$, $w = 0$, 分析该流场的运动学特征。

解: (1) 流线: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, 从而有 $dy = 0 \Leftrightarrow y = c$, 即流线是平行于轴的直线族。



(2) 流体的散度: $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 说明是不可压缩流体.

(3) 流体的旋度 $\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = -a\mathbf{k}$, 说明是有旋运动.

(4) 对应的二次曲面:

根据流场表达式, 易知

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{13} = A_{23} = 0, A_{12} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{a}{2}$$

所以二次曲面的表达式为 $\Phi = \frac{1}{2} A_{12} \xi \eta = \frac{1}{2} a \xi \eta$

(5) 对应的变形速度: $\mathbf{V}_D = \nabla \Phi = -\frac{a}{2} \eta \mathbf{i} - \frac{a}{2} \xi \mathbf{j}$

(6) 主轴方向的求解

$$\text{根据 } \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ 有 } \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{a}{2} & 0 \\ -\frac{a}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

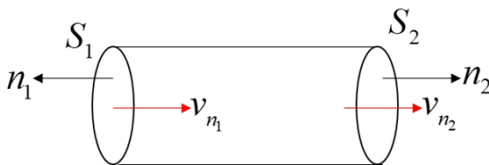
解得 $\lambda_1 = \frac{a}{2}, \lambda_2 = -\frac{a}{2}, \lambda_3 = 0$, 分别回代至代数方程组中, 解得三组方向余弦为:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)_{\lambda_1}, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)_{\lambda_2}, (0, 0, 1)_{\lambda_3}$$

4. 在一定常流动中任取一根截面很小的流管，证明连续方程： $\rho S v_n = \text{const}$

（其中 ρ 为流体密度， S 为流管的截面积， v_n 为管内垂直于截面的速度）

解：运用质量守恒定理。



根据质量守恒定律，在一段细流管内的质量应保持不变，即流进与流出的质量需相等。从而有 $\rho v_{n_1} S_1 = \rho v_{n_2} S_2$ （单位时间内），写成统一的形式，有：

$$\rho S v_n = \text{const}$$

5. 已知质点的位置表示为 $x = a, y = b + a(e^{-2t} - 1), z = c + a(e^{-3t} - 1)$ ，求：

(1) 速度的欧拉表示；

(2) 加速度的欧拉表示和拉格朗日表示，并分别求 $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ 以及

$(a, b, c) = (1, 0, 0)$ 时的值；

(3) 过点 $(1, 1, 1)$ 的流线及 $t = 0$ 时在 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 这一质点的轨迹；

(4) 速度旋度和散度、涡线。

解：(1) $u = \frac{\partial x}{\partial t} = 0, v = \frac{\partial y}{\partial t} = -2ae^{-2t} = -2xe^{-2t}, w = \frac{\partial z}{\partial t} = -3ae^{-3t} = -3xe^{-3t}$ （如果不用

x 替换 a ，那么速度描述为 *Lagrange* 描述，替换后就是 *Euler* 描述）

(2) 根据(1)中的表达式，加速度的 *Lagrange* 描述为 $(0, 4ae^{-2t}, 9ae^{-3t})$ ，*Euler*

描述为 $(0, 4xe^{-2t}, 9xe^{-3t})$ （根据 *Lagrange* 描述由 $x = a$ 直接替换）将

$(x, y, z) = (1, 0, 0), (a, b, c) = (1, 0, 0)$ 代入表达式，得加速度值均为 $(0, 4e^{-2t}, 9e^{-3t})$

(3) 因为 $u = 0$ ，故流线方程为 $\begin{cases} \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \\ dx = 0 \end{cases}$ ，加速度的表达式代入（注意是在

Euler 描述下），求得流线方程 $y = \frac{2}{3}e^t z + c$ ，由初始条件 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ，求

得 $c = 1 - \frac{2}{3}e^t$ ，故过点 $(1,1,1)$ 的流线方程为：

$$y = \frac{2}{3}e^t(z-1) +$$

轨迹方程为：

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = -2ae^{-2t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = -3ae^{-3t} \end{cases}, a=1$$

解上述微分方程，有 $\begin{cases} y = ae^{-2t} + c_1 \\ z = ae^{-3t} + c_2 \end{cases}$ ，根据初始条件 $t=0, (a,b,c)=(1,1,1)$ 可得

到 $c_1 = c_2 = 0$ ，故轨迹方程为：

$$x=1, y=e^{-2t}, z=e^{-3t}$$

$$(4) \text{散度 } \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$\text{旋度 } \operatorname{rot} \mathbf{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 3e^{-3t} \mathbf{j} + -2e^{-2t} \mathbf{k}$$

涡线方程为 $\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$ ，而 $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V}$ ，列出方程为：

$$\frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \Leftrightarrow \frac{dy}{\frac{3}{2}e^{-3t}} = \frac{dz}{-e^{-2t}}, dx=0$$

解得涡线方程为： $z = -\frac{2}{3}e^t y + c_1, x = c_2$

6. 已知 $u = (a-1)e^t + 1, v = 1 - (b+1)e^{-t}, w = 0$ ，求

- (1) 加速度场以及 $t=1$ 时在 $x=1, y=1$ 处的值；
- (2) 流线和轨迹，以及经过 $(0,1,0)$ 处的流线和 $t=1$ 时在 $(1,0,0)$ 处的轨迹；
- (3) 散度和旋度.

解：(1) 题中所给的速度场为 *Lagrange* 描述，因此加速度场为：

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right) = ((a-1)e^t, (b+1)e^{-t}, 0)$$

而题目中所给初始条件为 *Euler* 意义下的描述，因此有必要将上述 *Lagrange* 描述下的加速度场转换为 *Euler* 意义下描述的加速度场，根据：

$$\begin{cases} u = \frac{\partial x}{\partial t} = (a-1)e^t + 1 \\ v = \frac{\partial y}{\partial t} = 1 - (b+1)e^{-t} \\ w = \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + (a-1)e^t + c_1 \\ y = t + (b+1)e^{-t} + c_2 \\ z = c_3 \end{cases}$$

由 *Lagrange* 描述的初始条件： $t=0, (x, y, z) = (a, b, c)$ ，由此解得：

$$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = c$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x = t + (a-1)e^t + 1 \\ y = t + (b+1)e^{-t} - 1 \\ z = c \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} = (x-t-1, y-t+1, 0), \text{ 将初始条件代入, 得}$$

到加速度为 $(-1, 1, 0)$

(2) 由(1)可得速度的 *Euler* 描述为 $u = x-t, v = -y+t, w = 0$

因此流线方程为： $\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t}, dz = 0$ ，解得 $(x+t)(y-t) = c_1, z = c_2$

在 $(0, 1, 0)$ 处，解得 $c_1 = t(1-t), c_2 = 0$ ，故流线方程为

$$(x+t)(y-t) = t(1-t), z = 0$$

轨迹方程为： $\frac{dx}{dt} = x-t, \frac{dy}{dt} = -y+t, dz = 0$ （前两个为一节线性非齐次方程）

解得轨迹方程为： $x = t+1+c_3e^t, y = t-1+c_4e^{-t}, z = c_5$ ，由 $t=1$ 时

$(x, y, z) = (1, 0, 0)$ ，解得 $c_3 = -e^{-1}, c_4 = 0, c_5 = 0$ ，故轨迹方程为：

$$\begin{cases} x = t + 1 - e^{t-1} \\ y = t - 1 \end{cases}, z = 0$$

$$(3) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$$

➤ 习题一

1. 已知流体的运动: $x = a, y = \frac{a+b}{2}e^t + \frac{b-c}{2}e^{-t}, z = \frac{a+b}{2}e^t - \frac{b-c}{2}e^{-t}$, 求速度场的欧拉描述与拉格朗日描述.
2. 已知流场 $u = x + 1, v = x, w = 0$, 求:
 - (1) 速度的拉格朗日描述;
 - (2) 质点的加速度;
 - (3) 该流题是否可压, 是否有旋;
 - (4) 流线和轨迹.
3. 不可压流体从圆锥形管的顶点流出, 已知沿轴线方向, 距离顶点为 l 处横截面处的流速为 $u(t)$, 求距离截面为 x 上的流体质点的加速度.

答案:

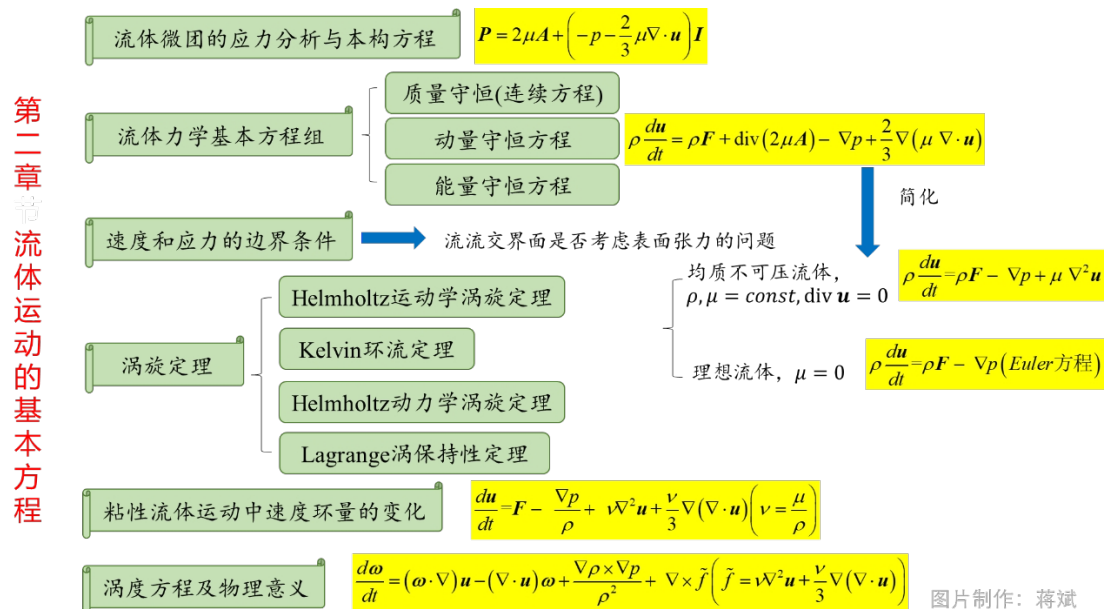
1. 拉格朗日描述: $\left(0, \frac{a+b}{2}e^t - \frac{b-c}{2}e^{-t}, \frac{a+b}{2}e^t + \frac{b-c}{2}e^{-t}\right)$; 欧拉描述: $(0, z, y)$
2. (1) $((a+1)e^t, (a+1)e^t - 1, 0)$; (2) $((a+1)e^t, (a+1)e^t, 0)$;
 (3) $\operatorname{div} \mathbf{V} = 1, \operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{k}$, 故可压缩, 有旋; (4) $y = x - \ln(x+1) + c_1, z = c_2$.
3. $a = \frac{l^2}{x^3} [xu'(t) - 2u^2(t)]$

参考资料

- [1] [哈密顿算子_百度百科](#)
- [2] [流体力学--第三章流体运动学.ppt](#)
- [3] [流体力学 第3章 流体运动学](#)
- [4] [流体力学\(流体运动学\)](#)
- [5] [流体力学第二章 流体运动学基础.ppt](#)
- [6] [Euler 与 Lagrange 观点下的连续方程](#)
- [7] [第五章：旋涡理论](#)

第二章 流体运动的基本方程

➤ 章节思维导图



➤ 重要知识点

1. 作用在流体上的力

(1) 质量力 (体积力)

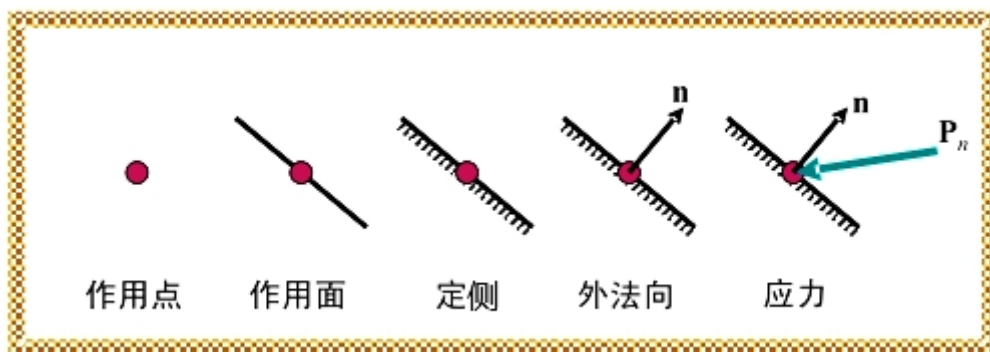
作用在每个流体微团上的力, 其大小与流体质量 (体积) 成正比, 是一种遇远程力。例如:重力、惯性力、磁力。

(2) 表面力

分离体以外的流体(或其他物体)通过分离体表面作用在流体上的力, 其大小与作用面积成正比。表面力分布在流体面上, 是一种接触力。定义表面力的面积密度, 即单位面积上流体所承受的表面力为应力 ($\mathbf{p}_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta A}$)。

▲ 凡谈及应力, 应注意明确以下几个要素:

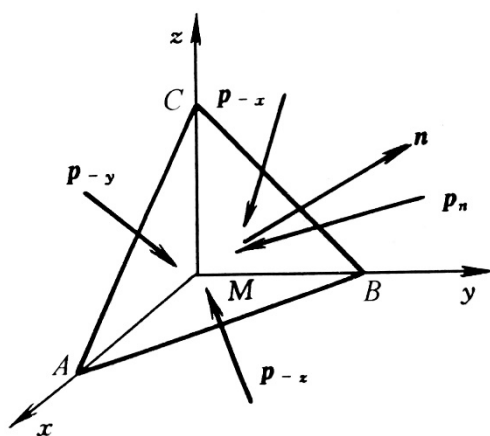
- ① 哪一点的应力;
- ② 哪个方位作用面上的应力;
- ③ 作用面的哪一侧流体是研究对象(表面力的受体), 从而决定法线的指向;
- ④ 应力在哪个方向上的分量。



▲ 对应力 p_n 的理解

- ① 应力 p_n 的方向一般并不与法向 n 一致，存在分量；
- ② p_n 的含义为： n 方向所指的流体对另一侧流体的作用。
- ③ $p_{-n} = -p_n$ ；

2. 流体中任意一点的应力分析



▲ 四面体的应力 (p_{-x}, p_{-y}, p_{-z} 不一定垂直坐标平面)

根据牛顿第二定律，有：

$$F \delta m + p_n \delta S + p_{-x} \delta S_x + p_{-y} \delta S_y + p_{-z} \delta S_z = a \delta m$$

通过量纲分析可知， $\delta m \propto (\delta l)^3$, $\delta S_i \propto (\delta l)^2$ (δl 很小)，又根据 $p_{-n} = -p_n$ ，有：

$$p_n \delta S = p_x \delta S_x + p_y \delta S_y + p_z \delta S_z$$

而 $\delta S_x, \delta S_y, \delta S_z$ 是 δS 在坐标平面上的投影：

$$\begin{cases} \delta S_x = \delta S \cos(n, x) = n_x \delta S \\ \delta S_y = \delta S \cos(n, y) = n_y \delta S \\ \delta S_z = \delta S \cos(n, z) = n_z \delta S \end{cases} \quad (n_x, n_y, n_z \text{ 为 } \mathbf{n} \text{ 的方向余弦})$$

所以上述式子最终可以化简为：

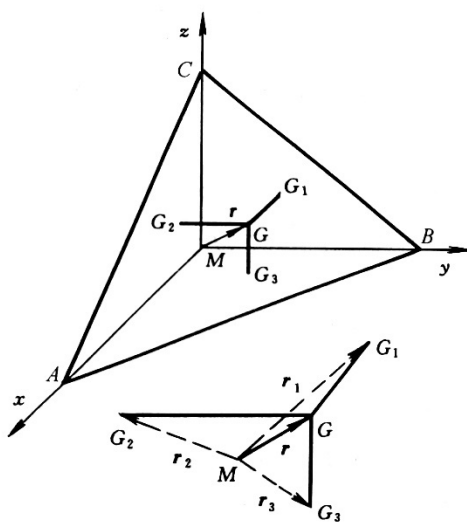
$$\mathbf{p}_n = n_x \mathbf{p}_x + n_y \mathbf{p}_y + n_z \mathbf{p}_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$$

上述的 $\mathbf{P}$ 矩阵称为应力张量，一共有 9 个量：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

可以证明，应力张量是对称的，有 $p_{ij} = p_{ji}$ ，也就是说，应力张量只有 6 个独立的分量。

[附：证明过程如下，了解即可]



▲ 应力对称性证明的示意图

上图中 $G(x, y, z), G_1(0, y, z), G_2(x, 0, z), G_3(x, y, 0)$ 分别为小四面体四个面的重心，通过前面牛顿第二定律的推导，可知动量矩满足：

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{p}_z n_z$$

又 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{r} \times \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{r} \times \mathbf{p}_z n_z$ ，两式作差可到：

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \times \mathbf{p}_x n_x + (\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \times \mathbf{p}_y n_y + (\mathbf{r}-\mathbf{r}_3) \times \mathbf{p}_z n_z = 0$$

而 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1 = x\mathbf{i}, \mathbf{r}-\mathbf{r}_2 = y\mathbf{j}, \mathbf{r}-\mathbf{r}_3 = z\mathbf{k}$, 上式可以化为:

$$xn_x \mathbf{i} \times \mathbf{p}_x + yn_y \mathbf{j} \times \mathbf{p}_y + zn_z \mathbf{k} \times \mathbf{p}_z = 0$$

$\Delta G_1 G_2 G_3$ 与 ΔABC 平行, 所以二者的法向量均为 $\mathbf{n}$, 考察四面体 $G-G_1 G_2 G_3$, 则有 $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{n}$ 均代表四面体的高, 所以 $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{n}$, 将分量形式代入, 有

$$xn_x = yn_y = zn_z$$

从而上述方程可以化为: $\mathbf{i} \times \mathbf{p}_x + \mathbf{j} \times \mathbf{p}_y + \mathbf{k} \times \mathbf{p}_z = 0$

将分量形式代入, 得 $(p_{yz} - p_{zy})\mathbf{i} + (p_{xz} - p_{zx})\mathbf{j} + (p_{xy} - p_{yx})\mathbf{k} = 0$, 得证。

3. 主应力

同流体微团的变形运动相类似, 流体的应力也有以下结论:

存在三个正交的主方向, 这三个方向上只有法向力没有切向力

▲ 主方向下的应力张量为
$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

▲ 应力的物理意义为压强

4. 静止流体的应力特点

(1) 只有法向力, 没有切向力;

(2) 同一位置, 各个方向的法向力大小相同, 为 $\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$ 。

▲ 运动流体中, 边界法向力的平均值也为 $\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$, 采用旋转坐标系找到主方向来证明。

5. 本构方程 (广义牛顿定律) —— 应力张量与应变率张量的关系

(1) 主应力的分解

令 $p_1 = -p + p'_1, p_2 = -p + p'_2, p_3 = -p + p'_3$ (其中 $p = -\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$):

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p'_1 & 0 & 0 \\ 0 & p'_2 & 0 \\ 0 & 0 & p'_3 \end{pmatrix}$$

也就是把主应力分为压强与除了压强以外剩余的部分，其中第二个矩阵，就是要建立本构方程的切入点。

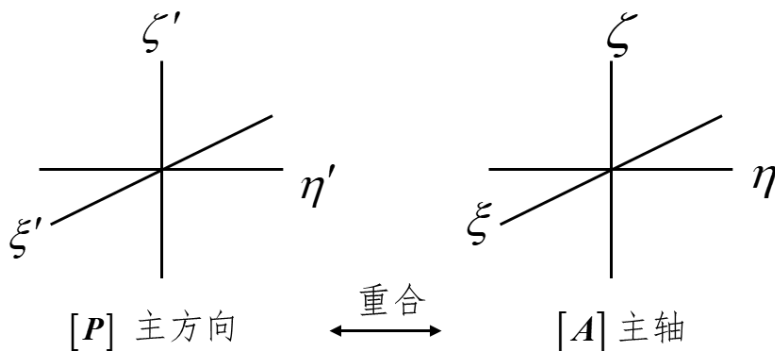
(2) 建立本构方程的三大假设

- ① 遵循广义胡克定律，即应力张量应是应变率张量的线性函数；
- ② 流体的性质在空间当中是各向同性的；
- ③ 应力主方向与应变率主轴重合。

(3) 本构方程的推导与建立

根据假设①，有

$$\begin{cases} p'_1 = a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_3 \\ p'_2 = a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + c_2 \lambda_3 \\ p'_3 = a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} (*)$$



根据假设③，有主方向与主轴重合，定义相互平行的轴之间为特殊关系，相互垂直的轴之间的关系为非特殊关系。例如，上图中 ζ' 与 ζ 之间是平行关系，那么它们之间为特殊关系，而 ζ' 与 ξ, η 为垂直关系，所以称为非特殊关系。根据特殊关系与非特殊关系的划分，再结合假设②，可以知道(*)中系数矩阵的对角线元素均为特殊关系，其他元素均为非特殊关系，且有

$$a_1 = b_2 = c_3 = a, a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = b$$

于是广义胡克定律可以简化为：

$$\begin{cases} p'_1 = a\lambda_1 + b(\lambda_2 + \lambda_3) \\ p'_2 = a\lambda_2 + b(\lambda_1 + \lambda_3) \\ p'_3 = a\lambda_3 + b(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{改写}} \begin{cases} p'_1 = b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 2\mu\lambda_1 \\ p'_2 = b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 2\mu\lambda_2 \\ p'_3 = b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 2\mu\lambda_3 \end{cases} \quad (\mu \text{ 为一系数})$$

由第一章的结论知 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \nabla \cdot \mathbf{u}$ 且 $p'_1 + p'_2 + p'_3 = p_1 + p_2 + p_3 + 3p = 0$ ，解得 $b = -\frac{2}{3}\mu$ ，

从而有：

$$\begin{aligned} p_1 &= -p + p'_1 = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ p_2 &= -p + p'_2 = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ p_3 &= -p + p'_3 = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

再结合一般坐标系下，应力、变形与主应力、主变形的关系，即可得到本构方程的表达式为：

$$\begin{cases} p_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ p_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ p_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial z} \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \varepsilon_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ p_{xz} = p_{zx} = 2\mu \varepsilon_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ p_{yz} = p_{zy} = 2\mu \varepsilon_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{P} = 2\mu \mathbf{A} + \left(-p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{I} \quad (\mathbf{I} \text{ 为单位对角阵})$$

▲ 满足本构关系的流体称为牛顿流体，否则称为非牛顿流体。

6. 流体力学基本方程组

▲ 描述流体运动的基本定律

质量守恒定律（连续方程）；

动量平衡方程；

动量矩平衡方程；

能量守恒定律（热力学第一定律）；

熵不等式（热力学第二定律）。

(1) 质量守恒定律（见第一章的推导）

(2) 动量平衡方程

取一物质曲面为 S 、体积为 τ 的流体微团，其总动量为： $\mathbf{K} = \int_{\tau} \rho \mathbf{u} d\tau$

前面的讨论指出，作用在流体微团上的力分为体积力（质量力）和表面力，因此根据动量定理，可以得到方程：

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau + \int_S \mathbf{P}_n dS$$

➤ 方程左边

$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau} \rho \mathbf{u} d\tau \right) = \int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\tau + \int_{\tau} \mathbf{u} \frac{d(\rho d\tau)}{dt}$ ，根据质量守恒，有 $\frac{d(\rho d\tau)}{dt} = 0$ ，于是

是方程左端结果为： $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\tau$

➤ 方程左端第二项

为了使得方程便统一，面积分需要转换成体积分。设 $\mathbf{N} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ，则根据 Stokes 公式，有

$$\int_S \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{N} dV = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

令 $\mathbf{N} = lP + mQ + nR$, (l, m, n) 为曲面的法向量，则 $\int_S \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (lP + mQ + nR) dS$ ，

再令 $Q = R = 0$ ，于是 Stokes 公式可以化为：

$$\int_S lP dS = \int_V \frac{\partial P}{\partial x} dV (*)$$

当 P 为某一向量时，有

$$\begin{cases} \int_S lA dS = \int_S lA_x dS + \int_S lA_y dS + \int_S lA_z dS \\ \int_V \frac{\partial A}{\partial x} dV = \int_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dV + \int_V \frac{\partial A_y}{\partial x} dV + \int_V \frac{\partial A_z}{\partial x} dV \end{cases}$$

根据(*)式可以得出 $\int_S lA dS = \int_V \frac{\partial A}{\partial x} dV$ 。而 $\mathbf{P}_n = l\mathbf{P}_x + m\mathbf{P}_y + n\mathbf{P}_z$ ，最终化简得到：

$$\int_S \mathbf{P}_n \cdot d\mathbf{S} = \int_\tau \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) d\tau, \text{ 于是, 总的方程可以写为:}$$

$$\int_\tau \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \rho \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) d\tau = 0$$

若定义 $\operatorname{div} \mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z}$, 动量平衡方程可写为:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{P}$$

分量形式为:

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv}{dt} = \rho F_y + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{dw}{dt} = \rho F_z + \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \end{cases}$$

把 $\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y, \mathbf{P}_z$ 各自看成为列向量, 则

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y, \mathbf{P}_z] = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{bmatrix}$$

矩阵的每行分别代表 i, j, k 方向的分量

$$\begin{cases} \mathbf{P}_x = P_{xx}\mathbf{i} + P_{xy}\mathbf{j} + P_{xz}\mathbf{k} \\ \mathbf{P}_y = P_{yx}\mathbf{i} + P_{yy}\mathbf{j} + P_{yz}\mathbf{k} \\ \mathbf{P}_z = P_{zx}\mathbf{i} + P_{zy}\mathbf{j} + P_{zz}\mathbf{k} \end{cases}$$

上述方程的未知量有: u, v, w, p_{ij} , 所以方程看似清晰, 实则由于未知量太多还

是很复杂。利用本构关系, 将 $\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{A} - \left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{I}$ 代入化简, 得到 Navier-

Stokes 方程:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \left\{ 2\mu\mathbf{A} - \left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{I} \right\} \\ &= \rho \mathbf{F} + \operatorname{div}(2\mu\mathbf{A}) - \operatorname{div} p - \frac{2}{3} \operatorname{grad}(\mu \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ &= \rho \mathbf{F} + \operatorname{div}(2\mu\mathbf{A}) - \nabla p - \frac{2}{3} \nabla(\mu \nabla \cdot \mathbf{u}) \end{aligned}$$

(读者可自行尝试写出分量形式)

N-S 方程左端代表单位体积流体的惯性力, 右端第一项表示单位体积的质量力, 第二项表示粘性变形应力, 它只与流体的粘性系数和应变率张量有关, 第三项代表作用于单位流体体积的压强梯度力, 第四项代表粘性体膨胀力。需要指出的是, 上述的方程的未知量有: ρ, u, v, w, p , 仍然比较多, 因此, 常常做出一些简化假设, 而事实证明, 这些假设在实际运用中大量存在。

● 均质流体, 即 $\mu = \text{const}$

那么 N-S 方程可以写为: $\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla p - \frac{2}{3}\mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$

其中 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 的求法同 $\operatorname{div} \mathbf{P}$ 的求法类似, 结果如下:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix}$$

矩阵中 1,2,3 行分别代表在 i, j, k 方向的分量。

● 均质不可压流体, 即 $\rho, \mu = \text{const}$

此时有 $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 于是可以推出 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{u}$, 于是流体 N-S 方程

的形式为:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

[推导提示]

对于第一行, 有:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

将 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ 代入上式, 化简可得到 $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

● 均质不可压的理想流体, 即 $\rho, \mu = \text{const}, \mu = 0$

方程进一步简化为: $\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p$, 此方程称为欧拉方程。

(3) 能量方程

对动量守恒方程 $\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{P}$ 两边同时点乘 $\mathbf{u}$ 再对体积积分, 有:

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\tau + \int_{\tau} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau$$

下面对方程各项进行化简与变形处理。

• 方程左边

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\tau = \int_{\tau} \rho \frac{d\left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\right)}{dt} d\tau \xrightarrow{\text{分部积分公式}} \int_{\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\tau \right) - \int_{\tau} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \frac{d(\rho d\tau)}{dt}$$

根据质量守恒 $\frac{d(\rho d\tau)}{dt} = 0$ ，所以方程左边为：

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\tau = \int_{\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\tau \right) = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\tau = \frac{dE}{dt} \quad (\text{一块流体动能随时间的变化})$$

• 方程右边第一项

在体积力有势，且与时间无关，有 $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Pi = \mathbf{u} \cdot \nabla \Pi$ ，第一项可化为：

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\tau = - \int_{\tau} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \Pi d\tau = - \int_{\tau} \rho \frac{d\Pi}{dt} d\tau \xrightarrow{\text{分部积分}} - \int_{\tau} \frac{d(\rho d\Pi)}{dt} + \int_{\tau} \Pi \frac{d(\rho d\tau)}{dt}$$

同样的 $\frac{d(\rho d\tau)}{dt} = 0$ ，所以 $\int_{\tau} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\tau = - \int_{\tau} \frac{d(\rho d\Pi)}{dt} = - \frac{dP}{dt}$ （一大块流体势能变化）

• 方程右边第二项

仍然采用分部积分进行转换：

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau &= \int_{\tau} \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) d\tau \\ &= \int_{\tau} \left(\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_z)}{\partial z} \right) d\tau - \int_{\tau} \mathbf{P}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{P}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{P}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} d\tau \\ &= \int_S [l(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_x) + m(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_y) + p(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_z)] dS - \int_{\tau} \mathbf{P}_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{P}_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{P}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} d\tau \\ &= \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_n dS - \int_{\tau} D_1 d\tau \end{aligned}$$

$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_n dS$ 表示应力做工的功率，将本构关系代入 $\int_{\tau} D_1 d\tau$ 中，得其表达式为：

$$\int_{\tau} D_1 d\tau = \int_{\tau} -p \nabla \cdot \mathbf{u} d\tau + \int_{\tau} \mu \left[-\frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\tau$$

上式中第一积分的物理含义为：

前面已经指出， $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 的物理意义之一为“体积的相对变化率”，所以 $\nabla \cdot \mathbf{u} d\tau$

表示体积的绝对变化，那么 $p\nabla \cdot \mathbf{u}d\tau$ 就表示做的功。记 $\frac{dI}{dt} = \int_{\tau} -p\nabla \cdot \mathbf{u}d\tau$ ，其中 I 表示储存能（类似弹性势能）；记

$$\phi = -\frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

那么能量方程可以写为：

$$\frac{d(E+P+I)}{dt} = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_n dS - \int_{\tau} \phi d\tau$$

上述方程表明，系统能量的改变，一部分由应力做功引起，另一部分由于自身消耗改变（如粘性流体的内摩擦耗散等）。需要指出的是，流体自身的耗散是必然的存在的，对 ϕ 进一步化简可得到：

$$\phi = \frac{2}{3}\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right]$$

可见 $\phi \geq 0$ ，由此说明了耗散必然存在。

7. 速度和应力的边界条件

(1) 运动学边界条件

边界上法向速度连续；流体质点不离边界。

边界上法向速度连续是指流体质点在边界的法向速度与边界本身的法向速度保持一致。流体质点不离边界，设边界的方程为 $F(x, y, z, t) = 0$ ，根据要求，经过 dt 时间后，有 $F(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = 0$ ，进行泰勒展开，有：

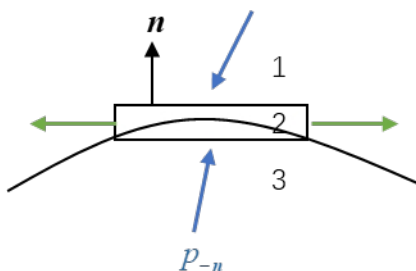
$$F + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \Leftrightarrow \frac{dF}{dt} = 0$$

(2) 动力学边界条件

流固交界面、流流交界面的切向速度连续；

流固交界面的应力显然是不连续的，这里不做讨论，下面讨论流流交界面的应力情况，其结论为：不考虑液体的表面张力时，法向应力连续；考虑表面张力

时，法向应力不连续。



根据牛顿第二定律，界面流体质点的动力学方程为：

$$a\delta m = \mathbf{F}\delta m + p_n\delta S + p_{-n}\delta S + \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)n\delta S$$

通过量纲分析， $\delta m \propto (\delta l)^3$, $\delta S \propto (\delta l)^2$ ，所以有 $p_n(\text{下}) = p_n(\text{上}) - \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)n$ ，

若继续在等式两边点乘 $\boldsymbol{\tau}$ (切向方向的单位向量)，则有 $p_n(\text{下}) \cdot \boldsymbol{\tau} = p_n(\text{上}) \cdot \boldsymbol{\tau}$ ——切向应力是连续的。

8. 粘性流体运动中速度环量的变化——环流定理

已知均质流体的 N-S 方程为：

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \left(\nu = \frac{\mu}{\rho} \right)$$

对封闭流体质点线进行积分有

$$\oint_l \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \oint_l \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\mathbf{l} + \oint_l \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$

$$[\text{注}] \oint_l \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\nu}{3} \oint_l d(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

考察环流的变化率 $\frac{d\Gamma}{dt}$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\oint_l \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \right) = \oint_l \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_l \mathbf{u} \cdot d\left(\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right) = \oint_l \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_l d\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \oint_l \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l}$$

上式表明，封闭流线的速度环量对时间的变化率等于此封闭流向的加速度环量。结合(1)和(2)，可以得到环流定理如下：

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \oint_l \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\mathbf{l} + \oint_l \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$$

(1) 若体积力有势($\mathbf{F} = -\nabla \Pi$), 右端第一项为可以消去。

(2) 压强梯度力对环流的影响

根据 Stokes 定理

$$-\oint_l \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{A} = -\oint_l \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p \cdot d\mathbf{A} + \int_s \nabla p \times \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{A} = \int_s \frac{\nabla p \times \nabla \rho}{\rho^2} \cdot d\mathbf{A}$$

(利用前第一章提到过的微分算子运算法则进行运算)

当密度仅是压强的函数时, 即 $\rho = \rho(T)$ 时, 称流体为正压流体; 反之, 称之为斜压流体。类比体积力有势, 正压流体有 $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla P$, 因此正压流体对环流是没有影响的。从上面的方程推导还可以看出, 当密度分梯度和压强梯度平行的时候, 环流无变化。

(3) 粘性力对环流的影响

无粘流体对环流显然没有影响。

已知矢量运算法则: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$, 于是

$$\begin{aligned} \nu \oint_l \nabla^2 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} &= \nu \oint_l \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l} - \nu \oint_l \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \nu \oint_l d(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nu \oint_l \nabla \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{l} = -\nu \oint_l \nabla \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

假设 $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}, d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$, 那么 $-\nu \nabla \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{l} = -\nu \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} dx - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} dy \right)$, 可见,

流体有粘性和涡通量的分布不均匀都会影响环流。

9. 几个重要的涡旋定理

(1) Helmholtz 运动学涡旋定理(第一章)

同一时刻同一涡管两个不同的截面上涡通量相同;

(2) Kelvin 环流定理

理想正压流体，且体积力有势，那么有 $\frac{d\Gamma}{dt}=0$ ，即沿着任意一条封闭流线的速度环量在流动过程中保持不变。

(3) Helmholtz 动力学涡旋定理(Helmholtz 涡管强度保持性定理)

根据 Helmholtz 运动学涡旋定理可知，某一时刻通过某一截面的速度环量与涡通量(涡管强度)的关系满足：

$$J = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A} = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma$$

再根据 Kelvin 定理可知，在运动过程中涡管强度也保持不变。

(4) Lagrange 涡保持性定理——流场是否有旋的判据

理想正压流体，且体积力有势，如果初始无旋，那么以后永远无旋。该定理反映了在一定条件下。流场的旋涡不会产生也不会消失。

10. 涡度方程

已知运算法则：

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \nabla) + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}$$

特别的，当 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 时，有 $\nabla \frac{A^2}{2} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{A}$

根据 8 中的 N-S 方程(假设体积力有势)，记 $\tilde{f} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ ，结合上述运算法则，方程可以转化为：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \left(\Pi + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{\nabla p}{\rho} + \tilde{f}$$

对上述方程两边分别取旋度，则方程进一步写为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \tilde{f}$$

已知矢量运算法则： $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ ，

于是 $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ ，从而涡度方程为：

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \tilde{\mathbf{f}}$$

[注]

- 标量场 φ 的梯度场是无旋场，也就是说它的旋度处处为零： $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ ；
- 向量场 $\mathbf{A}$ 的旋度场是无源场，也就是说它的散度处处为零： $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

从上述方程中，可以看到影响涡度改变的因子除了外力(有势可以则没有影响)、流体非正压和粘性外，还有一项 $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega}$ (称为内部作用)，下面对其进行简单讨论。

设 $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$ ，于是

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) - \omega_z \mathbf{k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= \omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{i} + \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{j} - \omega_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

(1) 平行转轴的方向 $\mathbf{k}$

当流体水平辐合时， $-\omega_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) > 0$ ，此时涡量将增加；流体水平辐散时

涡量减小。三维的速度散度表示体积的相对变化率，可以得到二维情形下水平散

度表示面积的相对变化率，即 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt}$ ，从而

$$\frac{d\omega_z \mathbf{k}}{dt} = -\omega_z \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \mathbf{k} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\omega_z A) = 0$$

即垂直方向的涡通量守恒。

(2) 垂直于转轴的方向 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

$\omega_z \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{i}, \omega_z \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{j}$ 表明了流体垂直方向上有速度的剪切时时，会使得涡量发生

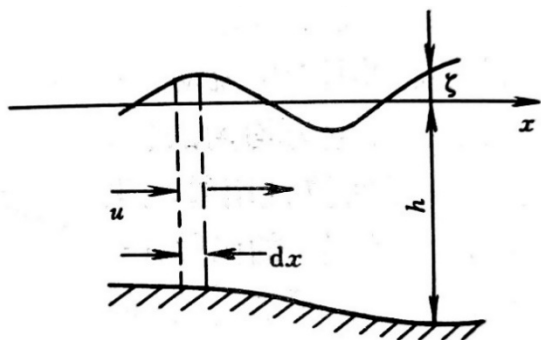
变化。也可以理解为，水平方向的速度在垂直方向上分布不均匀（垂直切变），

导致涡量改变，这种速度分布不均匀会导致涡管发生倾斜。

[注] 可以结合电磁学中的楞次定律来进行理解。

➤ 典型例题

1. 沿变深度矩形截面河道水面上有波动运动，求此波动满足的连续方程。



解: 设 x 轴取在河道方向静止水面上，自由静止水面算起的深度为 $h(x)$ ，自由表面离静止水面为 $\zeta(x, t)$ ，河道截面平均水流流速为 $u(x, t)$ ，河宽长度为 b 不变，水的密度为常数 ρ 。

取一长为 dx 的控制体，则单位时间内流过该控制体的净质量为

$$\rho(h + \zeta)bu + \frac{\partial}{\partial x}[\rho(h + \zeta)bu]dx - \rho(h + \zeta)bu = \frac{\partial}{\partial x}[\rho(h + \zeta)bu]dx$$

又单位时间内控制体质量的减少可以写为 $-\frac{\partial}{\partial t}[\rho(h + \zeta)b dx]$

由质量守恒，得 $-\frac{\partial}{\partial t}[\rho(h + \zeta)b dx] = \frac{\partial}{\partial x}[\rho(h + \zeta)bu]dx$ ，化简得连续方程为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial[(h + \zeta)u]}{\partial x} = 0$$

若 $\zeta \ll h$ ，上述方程可近似写为 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0$

2. 设某一细流管的截面积为 σ ，试证明其中的流动满足 $\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\sigma)}{\partial s} = 0$ ，

其中 u 表示流体在细管中的流动速度， δs 表示沿流动方向的微元。

证明: 沿流动方向取一段厚度为 δs 的控制体，根据质量守恒($\frac{dm}{dt} = 0$)，有

$$\frac{d}{dt}(\rho\sigma\delta s) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\rho\sigma)\delta s + \rho\sigma\frac{d(\delta s)}{dt} = 0$$

将第一项按照实质微商公式展开：

$$\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t}\delta s + u\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial s}\delta s + \rho\sigma\frac{d(\delta s)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} + u\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial s} + \rho\sigma\frac{1}{\delta s}\frac{d(\delta s)}{dt} = 0$$

上式中 $\frac{1}{\delta s}\frac{d(\delta s)}{dt}$ 可以表示沿 s 方向的相对伸长率, 根据速度散度的物理意义, 可

以知 $\frac{1}{\delta s}\frac{d(\delta s)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial s}$, 从而有 $\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} + u\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial s} + \rho\sigma\frac{\partial u}{\partial s} = 0$, 后两项进行合并,

得到 $\frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\sigma)}{\partial s} = 0$, 证毕。

▲ 有关连续方程的证明题, 证明的思路一般是根据 $\frac{dm}{dt} = 0$ 写出表达式后进行化简, 其中会用到一些微分的法则, 结果应尽可能的向证明的表达式靠。

► 习题二

1. 设有一明渠, 宽为 $b(x)$, 水深为 $h(x, t)$, x 代表明渠任一界面的位置。如果认为同一截面上速度相同, 即 $u=u(x)$, 试求连续方程。
2. 在上题中, 如果静止时 $h=h(x)$, 由于外部扰动, 使自由表面产生了波动, 此时任意一截面的水深可表为 $H(x, t)=h(x)+\xi(x, t)$, 其中, $\xi(x, t)$ 为波剖面。设流体为不可压流体, 试证明此时连续方程为:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(bHu)}{b\partial x} = 0$$

答案

1. 根据 $\frac{d}{dt}(\rho b h \delta x) = 0$, 得到连续方程为 $\frac{d}{dt}(\rho\sigma) + \frac{\rho h}{b}\frac{\partial(bv)}{\partial x} = 0$
2. 证明略, 可仿照例题 2 证明

参考资料

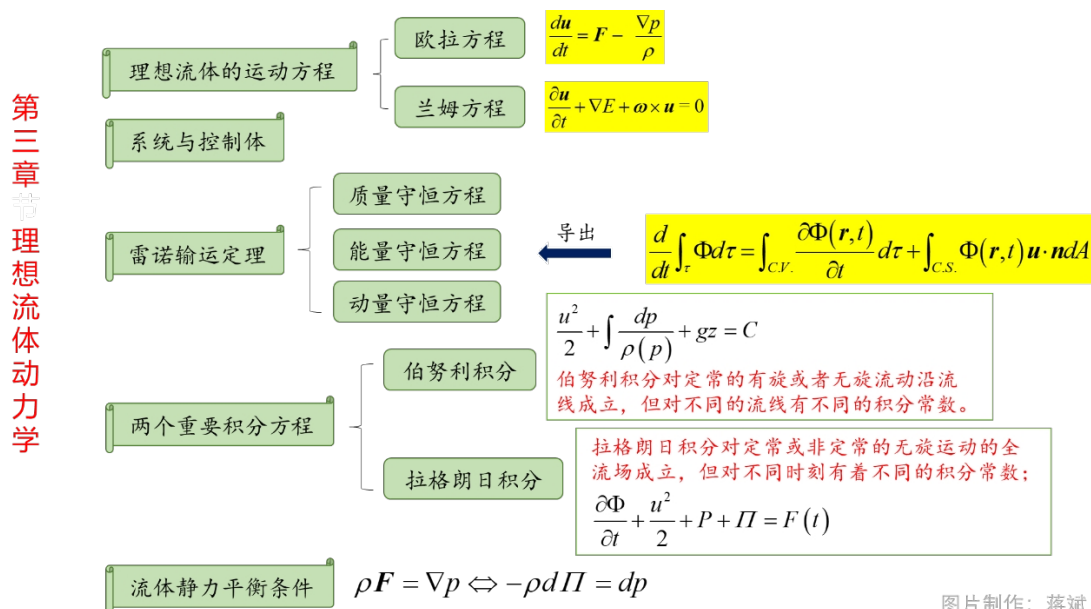
[\[1\] 作用在流体上的力](#)

[\[2\] 第二章第一节作用于流体的力应力张量 \(PPT 精品\)](#)

[\[3\] 微分形式的基本方程_流体力学](#)

第三章 理想流体动力学

➤ 章节思维导图



➤ 重要知识点

1. 理想流体的 *Euler* 方程与兰姆(Lamb)方程

前面在推导的 N-S 方程如下：

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \text{div}(2\mu \mathbf{A}) - \nabla p + \frac{2}{3} \nabla(\mu \nabla \cdot \mathbf{u})$$

对于理想流体，有 $\rho = \text{const}, \mu = 0$ ，于是得到理想流体的 *Euler* 方程如下：

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho}$$

上述方程可以进行改写，若体积力有势，且流体为正压流体，于是有

$\mathbf{F} = -\nabla \Pi, \frac{\nabla p}{\rho} = \nabla P$ ，等式左边可写成 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ，对于 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ，第二章

提到了微分运算法则：

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \nabla) + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}$$

从而有： $\nabla \frac{u^2}{2} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}$ ，记 $E = \frac{u^2}{2} + \Pi + P$ ，于是 *Euler* 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla E + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0$$

2. 系统与控制体

(1) 系统

系统是指某一确定流体质点集合的总体。系统以外的环境称为外界。分隔系统与外界的界面，称为系统的边界。系统具有的特点是：

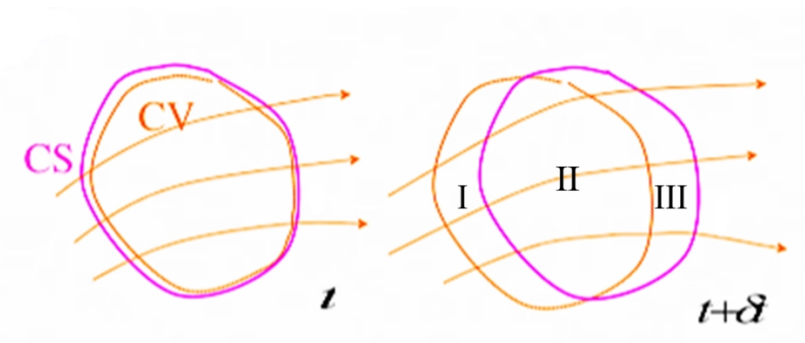
- 系统随系统内质点一起运动，系统内的质点始终包含在系统内，系统边界的形状与所围空间的大小，可随运动而变化；
- 系统与外界无质量的交换，但可以有力的相互作用，及能量（热和功）交换。

(2) 控制体

控制体是指在流体所在的空间中，以假想或者真实流体边界包围，固定不动形状任意的空间体积，包围这个空间体积的边界曲面，称为控制面。控制面的特点是：

- 控制体的形状与大小不变，并相对于某坐标系固定不动，控制体内的流体质点并非不变；
- 控制体既可通过控制面与外界有质量和能量的交换，也可与控制体外的环境有力的作用。

3. 雷诺(Reynolds)输运定理



如上图所示, 设 t 时刻体积在空间位置上 $\tau(t)$, $t + \delta t$ 时刻该体积到达另一位置 $\tau(t + \delta t)$, 设该物质单位体积携带的物理量为 $\Phi(\mathbf{r}, t)$, 将整块流体对时间求导, 有:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \Phi(t) d\tau = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\tau(t+\delta t)} \Phi(t + \delta t) d\tau - \int_{\tau(t)} \Phi(t) d\tau \right]$$

结合上图, 极限中积分差式可以进一步写成如下形式:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau(t+\delta t)} \Phi(t + \delta t) d\tau - \int_{\tau(t)} \Phi(t) d\tau \\ &= \int_{\text{II}} \Phi(\mathbf{r}, t + \delta t) d\tau + \int_{\text{III}} \Phi(\mathbf{r}, t + \delta t) d\tau - \int_{\text{I}} \Phi(\mathbf{r}, t) d\tau - \int_{\text{II}} \Phi(\mathbf{r}, t) d\tau \end{aligned}$$

于是, 原式可以根据积分区域化为三个极限:

◆ I 区

在 I 区的体积元可以写为: $d\tau = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \delta t$, 其中 $\mathbf{n}$ 为物质面的外法线方向, 从而有: $-\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\text{I}} \Phi(\mathbf{r}, t) d\tau = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\text{I}} \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \delta t = \int_{S_1} \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$

◆ II 区

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\text{II}} \Phi(\mathbf{r}, t + \delta t) d\tau - \int_{\text{II}} \Phi(\mathbf{r}, t) d\tau \right] = \int_{C.V.} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\tau \quad (\delta t \rightarrow 0 \text{ 时 II 区近似为}$$

控制体)

◆ III 区

同 I 区一样, 其体积元可以写成 $d\tau = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \delta t$, 则

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\text{III}} \Phi(\mathbf{r}, t + \delta t) d\tau = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\text{III}} \Phi(\mathbf{r}, t + \delta t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA \delta t = \int_{S_2} \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$$

其中, $S_1 + S_2$ 正好构成了控制面, 将上述式子进行合并整理, 可以得到雷诺输运定理的表达式如下:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \Phi d\tau = \int_{C.V.} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\tau + \int_{C.S.} \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$$

上式表明: 某一时刻可变体积上系统总物理量时间变化率, 等于该时刻所在空间域(控制体)中物理量的时间变化率与单位时间通过空间区域边界净运输的流

体物理量之和。

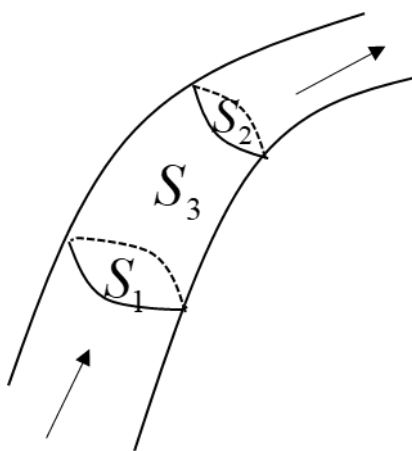
4. 质量守恒与能量守恒

由 3 中的雷诺输运定理可以推导质量守恒和能量守恒。

(1) 质量守恒

$$\frac{dM}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = 0, \text{ 由雷诺输运定理: } \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA,$$

对于定常流动, $\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = 0$, 有 $\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0$, 例如: 对于管道定常流动,



任取一小块流体, 根据质量守恒有 $\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0$, 亦即 $\int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0$,

在管壁曲面 S_3 上, 没有动量输出, 因此有 $\int_{S_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{S_2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$, 进而推出

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 \Leftrightarrow \rho u S = \text{const}$$

(2) 能量守恒

热力学第一定律: $\frac{dE}{dt} = \frac{\delta W}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta t}$ (用 “ d ” 表示物理量是状态量, 用 “ δ ”

表示物理量是过程量), 其中 $E = \int_{\tau} \left(e + \frac{1}{2} u^2 + gz \right) \rho d\tau$ 表示一块流体的总能(内能+

动能 + 势能), $\frac{\delta W}{\delta t} = \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{u} dS = - \int_S p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS$ 表示面积力做功的功率,

$\frac{\delta Q}{\delta t} = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$ 为热量的变化($\mathbf{q}$ 为热量通量, 指单位时间内通过垂直于热流方向

的单位面积上的热量)。根据雷诺输运定理:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \left(e + \frac{1}{2} u^2 + gz \right) \rho d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \left[\left(e + \frac{1}{2} u^2 + gz \right) \rho \right] d\tau + \int_s \left[\left(e + \frac{1}{2} u^2 + gz \right) \rho \right] \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$$

若考虑定常绝热流动, 有:

$$\int_s \left[\left(e + \frac{1}{2} u^2 + gz \right) \rho \right] \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_s p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dS$$

若物理量在截面上均匀, 有

$$\rho_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + gz_2 \right) u_2 S_2 - \rho_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + gz_1 \right) u_1 S_1 = p_2 u_2 S_2 - p_1 u_1 S_1$$

由 $\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2$, 上式可以继续化简为:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 + gz_2$$

5. 动量定理和动量矩定理

已知动量定理为: $\int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau + \int_s \mathbf{P}_n dS$, 方程左边可以应用雷诺输

运定理: $\int_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\tau = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{u} d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} d\tau + \int_s (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$, 若为定常流动, 则

动量定理可以写为:

$$\int_s (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau - \int_s p \mathbf{n} dS$$

▲ 对于动量矩定理, 在动量方程两边同时用 $\mathbf{r}$ 叉乘即可

6. 伯努利(Bernoulli)方程——**定常、正压流动**

对于定常流动, 兰姆方程中对时间的偏导项为 0, 从而运动方程形式为:

$$\nabla E + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0 \left(E = \frac{u^2}{2} + P + \Pi \right)$$

用流线的微元 $d\mathbf{s}$ 点乘上式各项: $\nabla E \cdot d\mathbf{s} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = 0$, 易知第二项的结果为 0,

从而 $dE = \nabla E \cdot d\mathbf{s} = 0$ (类比 $d\Phi = \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r}$), 沿流线积分此式, 考虑重力场在内,

可以得到:

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + gz = C$$

上式为一般形式的伯努利积分,它适用于可压或者不可压流体的有旋或者无旋运动,但要求运动必须是定常的。对于不可压流体, $\int \frac{dp}{\rho(p)}$ 可以写成 $\frac{p}{\rho}$ 。

▲ 伯努利积分仅对无粘正压流体,在体积力有势和定常运动情况下沿任一流线的各点成立。

7. 拉格朗日(Lagrange)方程——无旋运动

若流体运动无旋,则必存在一个势函数 Φ , 且有 $\mathbf{u} = \nabla \Phi$, 又由于空间与时间均为独立的变量, 有 $\frac{\partial(\nabla \Phi)}{\partial t} = \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, 故兰姆方程可以改写成:

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + \Pi \right) = 0$$

这表明括号中的函数不依赖于空间坐标 (x, y, z) , 仅依赖于时间 t , 即

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + \Pi = F(t)$$

其中 $F(t)$ 为一随时间变化的常数, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 为加速度项, 上式便称为拉格朗日积分或者柯西积分, 在同一时刻, $F(t)$ 对全流场为同一常数, 适用于全流场的任何点。

[注] 伯努利积分和拉格朗日积分的比较

📚 拉格朗日积分对定常或非定常的无旋运动的全流场成立, 但对不同时刻有着不同的积分常数;

📚 伯努利积分对定常的有旋或者无旋流动沿流线成立, 但对不同的流线有不同的积分常数。

8. 流体的力学平衡(≠理想流体的静力学)

对于一块流体微团, 其受到的力为体积力和面积力, 达到平衡时, 应该有:

$$\int_V \rho \mathbf{F} dV - \int_S p \mathbf{n} dA = 0$$

注意 $\mathbf{n}$ 为外法线方向，所以方程有个负号，利用散度定理(对于标量函数，有 $\int_V \nabla f dV = \int_S f \mathbf{n} dS$)，上式可以化成 $\int_V (\rho \mathbf{F} - \nabla p) dV = 0$ ，故有 $\rho \mathbf{F} = \nabla p (*)$ 。

对上述方程两边取旋度，得到 $\rho \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \rho \times \mathbf{F} = 0$ ，两边再用 $\mathbf{F}$ 点乘，得到：

$$\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

因此流体达到静力平衡的必要条件为体积力无旋： $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ 。

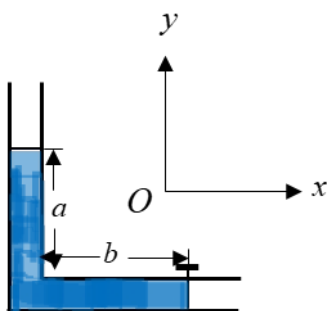
若体积力有势，即 $\mathbf{F} = -\nabla \Pi$ ，对 $(*)$ 式两边同时点乘 $d\mathbf{r}$ ，可以得到：

$$-\rho d\Pi = dp \Leftrightarrow \Pi + \int \frac{p}{\rho} = C$$

对于均质不可压流体，有 $\Pi + \frac{p}{\rho} = C$

➤ 典型例题

1. 表面均匀的直角联管内盛有不可压缩理想流体，在水平方向上有一个水栓，求水栓打开后流体运动规律。(已知大气压为 P_0)



解：题目中给出了“理想不可压流体”，所以直接运用理想流体的 *Euler* 方程即可

因为是流体在联管中连续，所以各流体质点在重力的作用下的速度大小应该相同，设速率为 u 。在铅直段和水平段，分别有：

$$\begin{cases} -\frac{du}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

设在打开水栓后的 t 时刻, 垂直方向的液面高度为 $y_0(t)$, 则水平方向的水柱长度为 $a+b-y_0(t)$ 。固定某一时刻, 可以把看 $\frac{du}{dt}$ 作常数, 在 $[t, t+\Delta t](\Delta t \rightarrow 0)$ 分别对上述两个方程积分, 有:

$$\begin{cases} \int_{p(y)}^{p'_1} dp = \int_{y_0(t)}^y \rho \left(\frac{du}{dt} - g \right) dy \\ \int_{p(x)}^{p'_2} dp = - \int_{a+b-y_0(t)}^x \rho \frac{du}{dt} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(y) = \rho \left(\frac{du}{dt} - g \right) [y - y_0(t)] + p'_1 \\ p(x) = \rho \frac{du}{dt} ([a+b-y_0(t)] - x) + p'_2 \end{cases} \quad (p'_1, p'_2 = \text{const})$$

在 $t=0$ 时刻, 有 $y_0(0)=a, x=b, y=a$, 此时的边界条件均为大气压强, 所以有:

$$p'_1, p'_2 = P_0$$

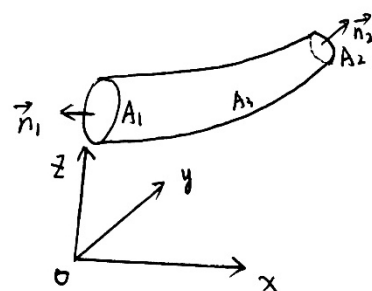
在联管直角顶点处 (这是一个特殊点), 即 $y=0, x=0$ 处, 这里应该为同一流体质点, 所以应该受到的压力相同, 即 $p(y=0)=p(x=0)$, 得 $\frac{du}{dt} = \frac{g}{a+b} y_0(t)$, 令 $k = \frac{g}{a+b}$, 而 $u = -\frac{dy_0}{dt}$, 所以上述方程化为: $y_0'' + k y_0 = 0$, 这是一个二阶齐次

常微分方程, 其特征方为 $r^2 + k = 0 \Rightarrow r = \pm i\sqrt{k}$, 得其通解为

$$y_0(t) = A \cos \sqrt{k}t + B \sin \sqrt{k}t \quad (A, B = \text{const})$$

根据初始条件: $y_0(0)=a, y_0'(0)=0$, 解得 $A=a, B=0$

所以流体的运动规律为: $y_0(t) = a \cos \sqrt{\frac{g}{a+b}}t$



2. 如图为一水平放置的弯管，管中有一理想不可压的定常流动，假设在弯管每个截面上的流动特性是均匀的，任意两个截面的压强分别为 p_1, p_2 ,

$n_2 = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$ ，在求流体作用在管壁上的力。

解：根据动量定理，有：

$$-\int_{\tau} \rho g k d\tau - \int_{A_1} p n dA - \int_{A_2} p n dA - \int_{A_3} p n dA = \int_{A_1} + \int_{A_2} \rho |u|^2 \cdot n dA$$

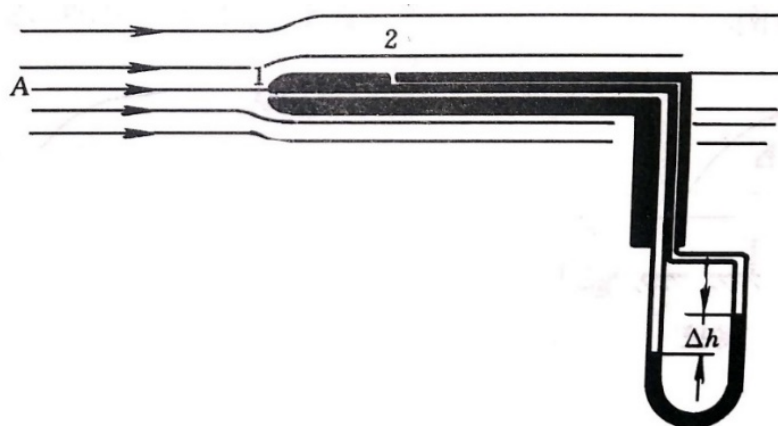
上式中 $\int_{A_3} p n dA$ 即为所求，记为 $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}$ ，因为在各截面流动均，有：

$$\rho g \tau \mathbf{k} - p_1 (-\mathbf{i}) A_1 - p_2 A_2 \mathbf{n}_2 - (\mathbf{R}_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}) = -\rho u_1^2 A_1 \mathbf{i} + \rho u_2^2 A_2 \mathbf{n}_2$$

在 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 方向上分别对求解，可以得到作用在管壁上力为：

$$\begin{cases} R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \varphi + \rho (u_1^2 A_1 - u_2^2 A_2 \cos \varphi) \\ R_y = -p_2 A_2 \sin \varphi - \rho u_2^2 A_2 \sin \varphi \\ R_z = \rho g \tau \end{cases}$$

3. [Bernoulli 积分]皮托管测压测速原理，如下图所示。

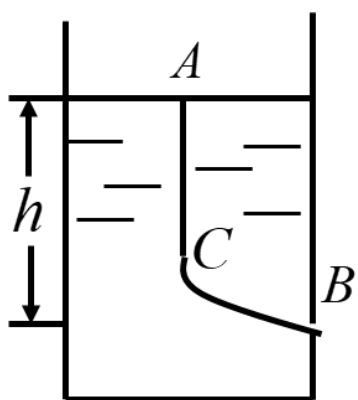


解：把空气看成理想不可压的气体，不计体积力，且为定常流动。待 U 型管中

的液面高度差达到稳定后，考虑沿流线的管壁的流线 A，在点 1 处，流体质点贴附在管壁上，所以速度为零，压强最大，这个点常常称为驻点。比较 1 点和 2 点的信息，应用伯努利积分：

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho^* g \Delta h}{\rho}}$$

4. [Bernoulli 积分] 有一盛满水的大容器，在距离容器水面 h 处的侧壁开了一个很小的细孔，求小孔的出流速度(已知大气压强为 p_0)。



解 因为细孔很小，可以认为容器内的溶液下降速度很慢，可以用准定常理论处理此问题。如图，取流线 ACB，比较 A,B 两处的信息，根据伯努利方程有

$$0 + \frac{p_A}{\rho} + gh = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} + 0, \text{ 根据边界条件, 有:}$$

$$p_A = p_B = p_0$$

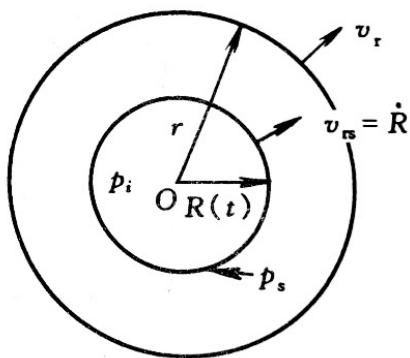
从而解得出流速度为 $v_B = \sqrt{2gh}$

需要注意的是，由于利用伯努利方程只考虑了 A,B 两点——这两处的均为大气压，似乎压强在这里没有起什么作用，我们取流线上的 A,C 点使用伯努利方程：

$$0 + \frac{p_0}{\rho} + gh = 0 + \frac{p_C}{\rho} + gh_C \Rightarrow p_C = p_0 + \rho(h - h_C)$$

即 C 点压强正好为静压强，换言之，流动的上部分为流体的重量所控制，从 C 点至测管只壁出口处，压强下降至大气压强。

5. [Lagrange 积分] 一球形气泡在静止无界的液体中膨胀, 液体做球对称的运动, 已知气泡半径随时间的变化率为 $R(t)$, 忽略气泡内部流动和重力的影响, 并假定气泡内部的压强 p_i 是均匀的, 当 $r \rightarrow \infty, p \rightarrow p_\infty, v_\infty = 0$ 求气泡表面压强随时间的变化规律。



解 因为液体是做球对称运动, 故可以认为运动是无旋的, 故存在一速度势 $\varphi(r, t)$ 如左图所示, 考察某一半径为 $r (r > R(t))$ 的球面, 记径向速度为 $\mathbf{v} = v_r \mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ 为矢径方向的单位矢量), 对任意时刻, 球表面的速度满足 $v_{rs} = R'(t)$ 。

- (1) 在所选取的两个球面处应用连续方程:

$$4\pi r^2 v_r = 4\pi R^2 R' \Leftrightarrow v_r = \frac{R^2 R'}{r^2}$$

- (2) 根据前面的分析可以知道, $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, 所以有 $\partial \varphi = v_r \partial r \Leftrightarrow \varphi = -\frac{R^2 R'}{r}$

- (3) 对 $r = R(t), r \rightarrow \infty$ 两处运用 Lagrange 积分, 有:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{r=R} + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2 R'}{R^2} \right) + \frac{p_s}{\rho} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{r \rightarrow \infty} + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{p_\infty}{\rho}$$

而 $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{R^2 R'' + 2RR'^2}{r}$, 将 $r = R(t), r \rightarrow \infty$ 代入, 最终的得到气泡表面的压强分布规律为:

$$p_s = p_\infty + \rho \left(RR'' + \frac{3}{2} R'^2 \right)$$

6. [流体平衡] 大气压公式的简单推导。

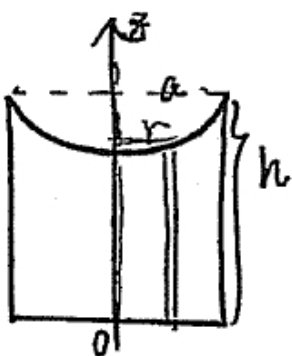
解: 流体平衡的必要条件为: $\rho \mathbf{F} = \nabla p \Leftrightarrow -\rho d\Pi = dp$

(1) 若大气为均值不可压气体, 则有 $\Pi + \frac{p}{\rho} = C \Rightarrow p = \rho g z$ (与静水压的结论相同)

(2) 若大气可压, 对于等温过程, 根据理想气体状态方程 $\frac{p}{\rho} = C \left(C = \frac{RT}{M_a} \right)$, 此

时应该使用积分式, 有: $\int_{z_1}^{z_2} d\Pi = \int_{p_1}^{p_2} -\frac{1}{\rho} dp \Rightarrow p_2 = p_1 \exp \left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{C} \right]$

7. [流体平衡] 如下图, 已知一圆柱形容器盛有理想不可压流体, 以等角速度 ω 绕铅直轴转动, 容器半径为 a , 求流体达到平衡状态时的压强分布情况。



解: 把坐标系取在旋转坐标系, 根据平衡条件, 有:

$$gz - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{p}{\rho} = C$$

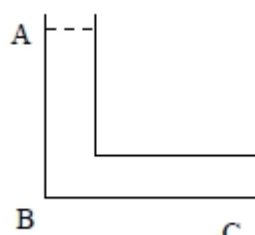
[注: 体积力势函数的求法为: $\Pi = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$]

解得压强分布为: $p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + C$

[读者可以尝试根据欧拉方程来求解压强分布]

由压强分布的表达式可知压强的分布为一抛物面的形状。

8. 有一垂直折管 ABC, C 端封闭, 并使 AB 段竖直放置(如图)。管中充满均值不可压液体。如果将 C 端开放, 试证明在开启的瞬间, 垂直管中的压强减少一半($AB=BC$), 并求水平管中压强的变(不计大气压强)。

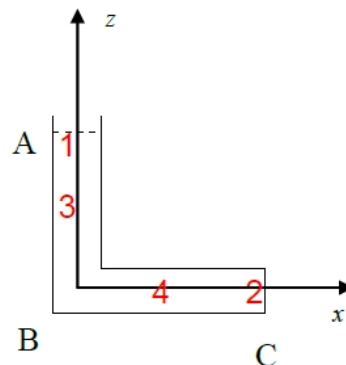


解: 拉格朗日积分为: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + \Pi = F(t)$, 这里

$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 无从下手, 但是由于空间与时间均为独立的变量,

有 $\frac{\partial(\nabla \Phi)}{\partial t} = \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ 。取右图 1-2 为积分路线, 对拉格朗日

方程两边积分得:



$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \frac{u^2}{2} dl + \int_1^2 \frac{p}{\rho} dl + \int_1^2 \Pi dl = \int_1^2 F(t) dl = 0$$

在 1 和 2 处, 开启的瞬间, $u_1 = u_2 = 0, p_1 = p_2 = 0$, 假设 $AB = BC = H$, $d\mathbf{l}$ 的正负可由建立的坐标系的正向单位向量来确定, 进而确定 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$ 的符号, 于是上述方程可化简为: $2H \frac{\partial u}{\partial t} - gH = 0 \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}g$, 即开启的瞬间, 垂直管中的压强减少一半。取 4-2 为积分路线对拉格朗日方程积分, 有:

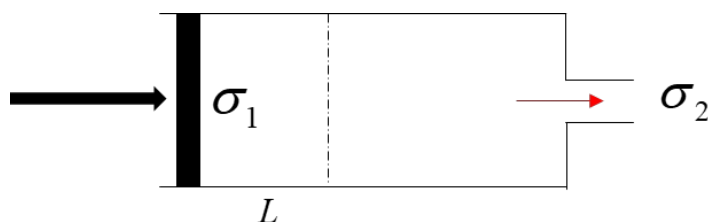
$$\frac{\partial u}{\partial t}(H-x) + \frac{0-p}{\rho} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}\rho g(H-x)$$

➤ 习题三

1. 炸弹在水下很深的地方爆炸, 证明水中任一点的压强与这点到炸弹中心的距离成正比。
2. 设气体状态满足 $p = k\rho^\gamma$, 气体通过一细导管流出一大的密闭容器。已知容器内的压强为大气压强 p_0 的 n 倍, 出口处气体的密度已知为 ρ , 不考虑容器内流体的势能, 求出流速度。
3. 某绝热气体满足状态方程 $p = k\rho^\gamma$, 以速度 u 沿一直细管流动, 如果不计质量力, 证明:

$$u^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

4. 如下图所示, 容器中盛有均质不可压流体, 左侧有一活塞, 右侧有一个小出口。现施加一个力推动活塞前进长度 L , 已知出流速度为 u_2 , 求这部分流体的出流时间。



答案

1. 证明略(可仿照例题 5 的方法证明)

2. $u^2 = \frac{2\gamma p_0}{(\gamma-1)\rho} \left(n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)$ (考查伯努利积分, 注意气体可压缩, 因此方程中压强

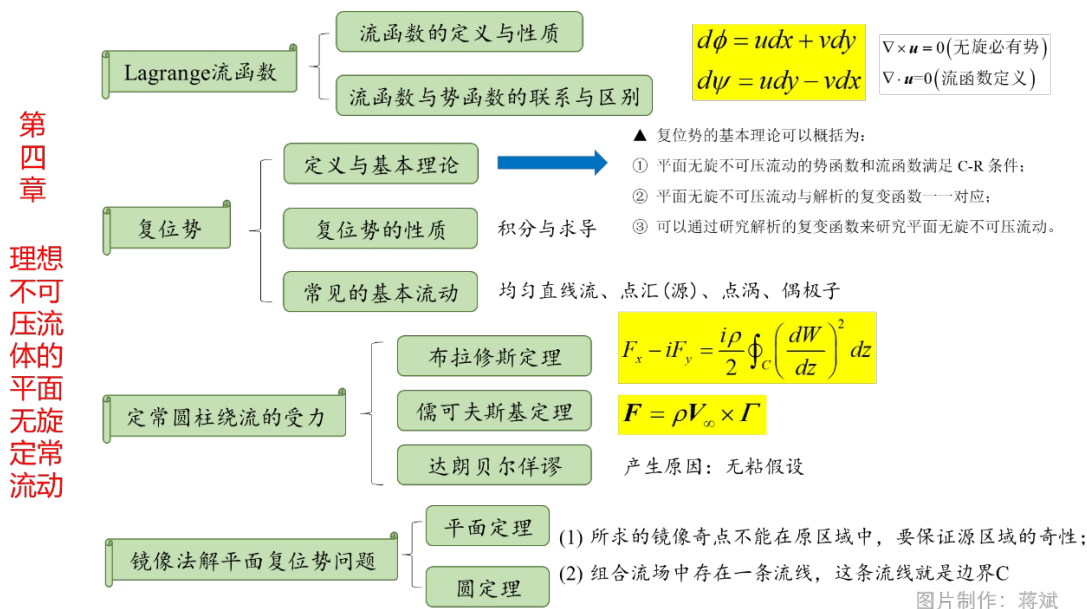
项为 $\int \frac{dp}{\rho}$)

3. 证明过程略, 注意点同 2

4. $T = \frac{\sigma_1 L}{\sigma_2 u_2}$ (提示: 利用伯努利积分)

第四章 理想不可压流体的平面无旋定常流动

➤ 章节思维导图



➤ 重要知识点

1. Lagrange 流函数

(1) 定义

对于二维下不可压缩流体的无旋运动, 满足 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ (由不可压, 即 $\nabla_h \cdot \mathbf{u} = 0$

得出)——这是 $-vdx + udy$ 成为某函数全微分的充要条件, 记为 $\psi(x, y)$, 则有:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -vdx + udy, \text{ 故 } u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi(x, y) \text{ 即为流函数。}$$

▲ 对于二维流动, 流线方程为 $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, 化简得到 $-vdx + udy = d\psi = 0$

▲ 柱坐标系下的连续方程为: $\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$, 此时, 流函数与速度的关系为:

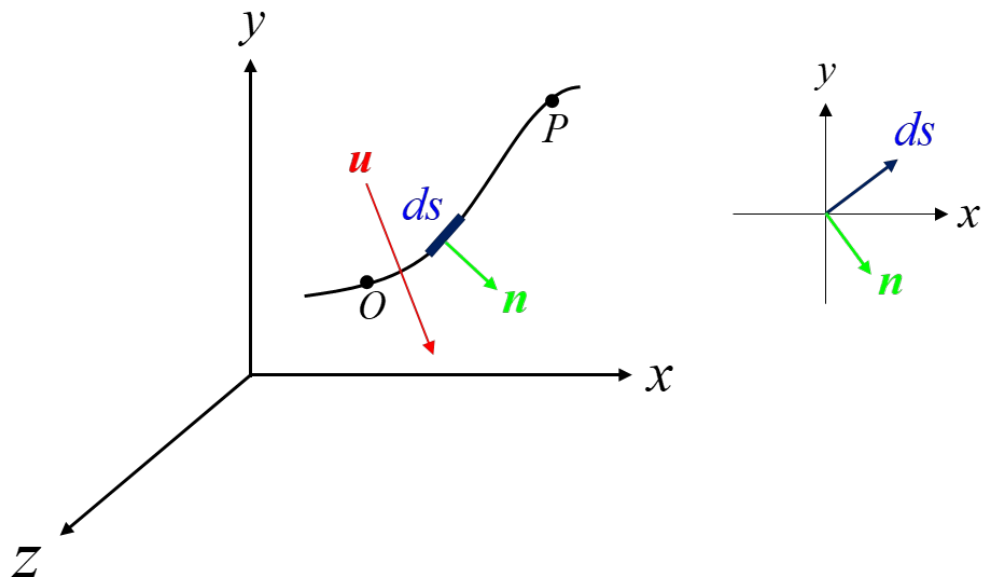
$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

(2) 流函数的物理意义

单位时间内流过连接空间两点的某一曲线流体的体积。如下图所示，单位时间内自左向右流过曲线 OP 的单位厚度的(z 方向)流体体积为：

$$V = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_O^P (un_x + vn_y) ds$$

由图可知， $n_x ds = dy, n_y ds = -dx$ ，代入上式有 $V = \int_O^P u dy - v dx = \psi_P - \psi_O$



(3) 流函数的性质

- ① 可差一个常数；
- ② 同一流线上流函数为一常数；

$$\text{流线方程为: } \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Leftrightarrow u dy - v dx = 0 \Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow \psi = c$$

- ③ 单连通区域流函数是单值的，多连通区域流函数是多值。(单值即流函数积分与路径无关；多连通区域流函数多值是因为流体可压了)
- ④ 平面不可压流体无旋运动的流函数满足 *Laplace* 方程；

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

- ⑤ 流函数的等值面和势函数的等值面正交；

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

2. 平面无旋不可压流动的复位势

(1) 复位势的定义

势函数与流函数的关系满足
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$
, 即 ϕ 和 ψ 满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann, C-R)条件, 因此调和函数 ϕ 和 ψ 可以组成一个解析函数。定义

$W(z) = \phi + \psi i (z = x + iy)$, 称 $W(z)$ 为复位势。

▲ 复位势的基本理论可以概括为:

- ① 平面无旋不可压流动的势函数和流函数满足 C-R 条件;
- ② 平面无旋不可压流动与解析的复变函数一一对应;
- ③ 可以通过研究解析的复变函数来研究平面无旋不可压流动。

(2) 复位势的性质

- ① 复位势可以求导: $\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = u - iv$ —— 复速度

复速度的模 $U = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$, 复速度又可表示为: $\frac{dW}{dz} = U e^{-i\alpha} \frac{dW}{dz} = U e^{-i\alpha}$

- ② 复速度可以积分, 计算环流和流量

环流: $\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \oint \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \oint d\phi$; 流量: $Q = \oint \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \oint d\psi$

从而 $\oint \left(\frac{dW}{dz} \right) dz = \oint dW = \oint d\phi + i \oint d\psi = \Gamma + iQ$

▲ 复速度积分实际计算时一般使用留数定理或者柯西积分公式, 在后面的推导中, 又以柯西积分公式的使用频率较高, 在此简单回顾柯西积分公式的形式:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i f'(z_0), n = 1 \\ \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_0), n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

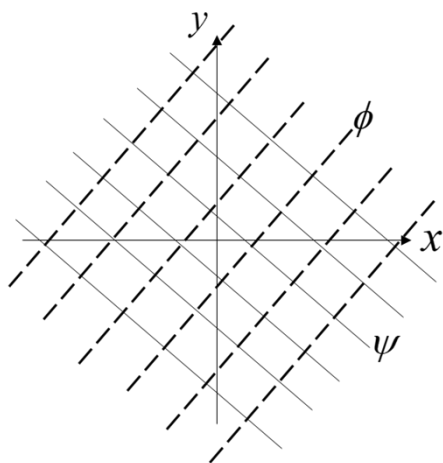
3. 利用复位势探究常见的基本流动

分析复位势题型的解题步骤: 第一, 根据复位势写出速度势和流函数; 第二, 对复位势求导, 得到速度场分布(画出流动场); 第三, 计算环流和流量; 第四, 物理上如何实现该流动。

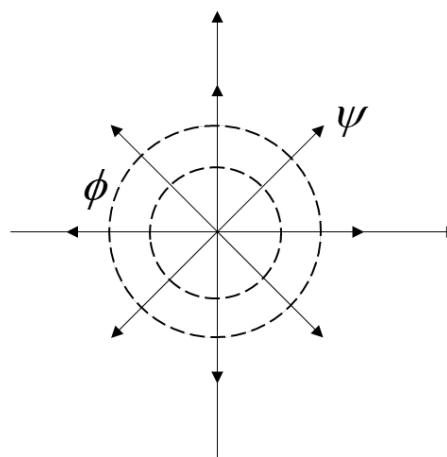
(1) 均匀直线流 $W = Az$ ($A = a + ib$ 为复常数)

$W = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$, 从而可以写出流函数和势函数的表达式分别为: $\phi = ax - by = c_1, \psi = ay + bx = c_2$, 计算环流和流量为:

$$\Gamma + iQ = \oint \left(\frac{dW}{dz} \right) dz = \oint A dz = 0 \Rightarrow \Gamma = Q = 0$$



▲ $W = Az$ 流动图案



▲ $W = \frac{Q}{2\pi} \ln z$ ($Q > 0$) 流动图案

(2) 点汇(源)流动 $W = A \ln z$ (A 为实数, $z = 0$ 为不解析点)

$$W = A \ln(re^{i\theta}) = A \ln r + iA\theta \Rightarrow \phi = A \ln r = c_1, \psi = A\theta = c_2$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{A}{z} = \frac{A}{r} e^{-i\theta}, \left| \frac{dW}{dz} \right| = \frac{A}{r}, u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r}, u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow A > 0, u_r > 0; A < 0, u_r < 0$$

因此可以通过观察 A 的正负来判断是源($A > 0$)还是汇($A < 0$), 现在取一个包围原点的闭合回路 C , 计算环流和流量:

$$\Gamma + iQ = \oint \left(\frac{dW}{dz} \right) dz = \oint \frac{A}{z} dz \text{ (柯西积分公式)} = 2\pi Ai \Rightarrow \Gamma = 0, Q = 2\pi A$$

因此有 $A = \frac{Q}{2\pi}$ ，所以对于放在原点处、流量为 Q 的源或汇的流动复位势常常写成 $W = \frac{Q}{2\pi} \ln z$ (Q 又可以称为点源/汇强度)

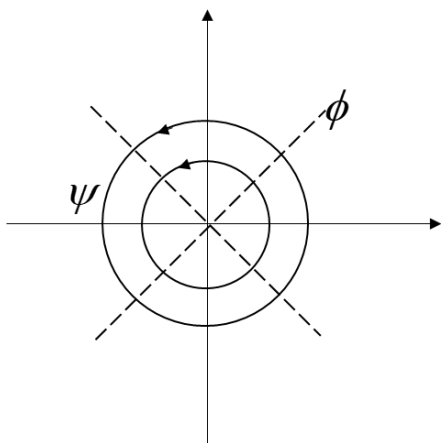
(3) 点涡 $W = Bi \ln z$ (B 为实数, $z=0$ 处不解析)

$$W = Bi \ln(re^{i\theta}) = -B\theta + iB \ln r \Rightarrow \phi = -B\theta = c_1, \psi = B \ln r = c_2$$

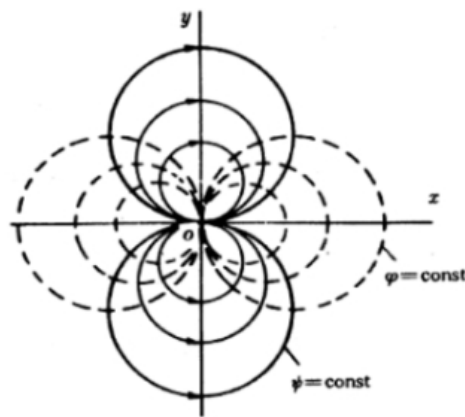
$$\frac{dW}{dz} = \frac{Bi}{z} = \frac{Bi}{r} e^{-i\theta}, \left| \frac{dW}{dz} \right| = \frac{B}{r}, u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{B}{r} \Rightarrow B < 0, u_\theta > 0; B > 0, u_\theta < 0$$

$$\Gamma + iQ = \oint \left(\frac{dW}{dz} \right) dz = \oint \frac{Bi}{z} dz \text{ (柯西积分公式)} = -2\pi B \Rightarrow \Gamma = -2\pi B, Q = 0$$

因此有 $B = -\frac{\Gamma}{2\pi}$ ，故对于放置在原点处、环量为 Γ 的点涡，其流动复位势又可以写为 $W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ 。 $u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ ，当 $\Gamma > 0$ 时，表示逆时针流动，当 $\Gamma < 0$ 时，表示顺时针流动。



▲ $W = Bi \ln z$ 的流动图案



▲ $W = \frac{\mu}{z}$ 的流动图案

(4) 偶极子 $W = \frac{\mu}{z}$ (μ 为常数)

偶极子可以看成是离得很近的一个点源和点汇的流动复位势叠加的结果，假设二者的距离为 Δz ，于是有

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln z - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \Delta z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(1 - \frac{\Delta z}{z}\right)$$

令 $\Delta z \rightarrow 0$, 得到复位势表达式 $W = \frac{Q\Delta z}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{\mu}{z} = \frac{\mu}{r} e^{-i\theta} = \frac{\mu}{r} \cos\theta - i \frac{\mu}{r} \sin\theta$

从而 $\phi = \frac{\mu}{r} \cos\theta, \psi = -\frac{\mu}{r} \sin\theta$, $\frac{dW}{dz} = -\frac{\mu}{z^2}, \left|\frac{dW}{dz}\right| = \frac{\mu}{r^2}$

$$\Gamma + iQ = \oint \left(\frac{dW}{dz}\right) dz = -\oint \frac{\mu}{z^2} dz \text{ (柯西积分公式)} = 0 \Rightarrow \Gamma = Q = 0$$

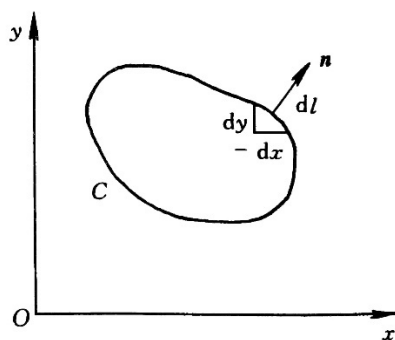
(5) $W = Az^n$ (A 为实常数)

$$W = Ar^n e^{in\theta} \text{ (棣莫弗公式)} = Ar^n \cos n\theta + iAr^n \sin n\theta \Rightarrow \phi = Ar^n \cos n\theta, \psi = Ar^n \sin n\theta$$

固定 n , 当 $\theta = 0, \theta = \frac{k\pi}{n} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $\psi = 0$, 故 $\theta = 0, \theta = \frac{k\pi}{n}$ 为一流线。

▲ 复位势具有可叠加性, 一些复杂的流动可看成是有上述几个基本的平面流动的叠加。

4. 布拉修斯(Blasius)定理



如上图所示, C 为圆柱体剖面的周界, 在 C 上取长为 dl 的微弧段, 其外法

线的方向余弦为 $(n_x, n_y) = \left(\frac{dy}{dl}, -\frac{dx}{dl}\right)$ 。于是 dl 受到的力(压强)可以表示为:

$$d\mathbf{F} = -p n dl \Rightarrow dF_x = -p dy, dF_y = p dx$$

构造复数 $dF_x - i dF_y = -p dy - i p dx = -i p d\bar{z}$, 若忽略质量力, 根据伯努利方程, 有

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = c \Rightarrow p = c - \frac{\rho}{2} u^2 = c - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{dz}}, \text{ 代入前式求积分得}$$

$$F_x - iF_y = -i \oint_C \left(c - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{dz}} \right) d\bar{z} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{dz}} \cdot d\bar{z} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{dz}} \cdot dz$$

其中, $\overline{\frac{dW}{dz} \cdot dz} = (u - iv)(dx + idy) = (udx + vdy) + i(udy - vdx)$, 在物质面 C 上, 由

于 C 是一条流线, 所以 $d\psi = udy - vdx = 0$, 故 $\overline{\frac{dW}{dz} \cdot dz} = udx + vdy = \frac{dW}{dz} \cdot dz$, 从而

得到 Blasius 公式为

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz$$

上式为用复速度表示定常绕流单位长度圆柱的受力。下面考虑其合力矩表示式。

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (dF_x\mathbf{i} + dF_y\mathbf{j}) = -y dF_x + x dF_y = p(xdy - ydx) = \text{Re}\{pz d\bar{z}\}$$

将 p 的表达式代入, 得

$$d\mathbf{M} = \text{Re} \left\{ cz d\bar{z} - z \frac{\rho}{2} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{dz}} d\bar{z} \right\} \Rightarrow \mathbf{M} = -\frac{\rho}{2} \text{Re} \left\{ \oint_C z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

▲ 易证 $\text{Re}\{z d\bar{z}\} = \text{Re}\{\bar{z} dz\} \Rightarrow \text{Re}\{z d\bar{z}\} = \frac{1}{2} [\text{Re}\{z d\bar{z}\} + \text{Re}\{\bar{z} dz\}] = \frac{1}{2} d(\text{Re}\{z\bar{z}\})$,

$$\text{所以 } \oint_C \text{Re}\{z d\bar{z}\} = \frac{1}{2} \oint_C d(\text{Re}\{z\bar{z}\}) = 0$$

5. 儒可夫斯基(Joukowski)定理

讨论无穷远均匀来流的绕流问题, 在周界 C 以外无奇点, 则对任一包围物体周界 C 的圆周 C_1 , 复速度在 C_1 外域中可展开为洛朗级数:

其中系数满足: $a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{dW}{z^{m+1}} dz (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。在 ∞ 处, 有

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)_{z=\infty} = V_\infty e^{-i\alpha}, \text{ 因此可以得到 } \begin{cases} a_0 = V_\infty e^{-i\alpha} \\ a_1 = a_2 = \dots = 0 \end{cases}, \text{ 特别的,}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{dW}{dz} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} dW = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} d\phi + i d\psi = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi}$$

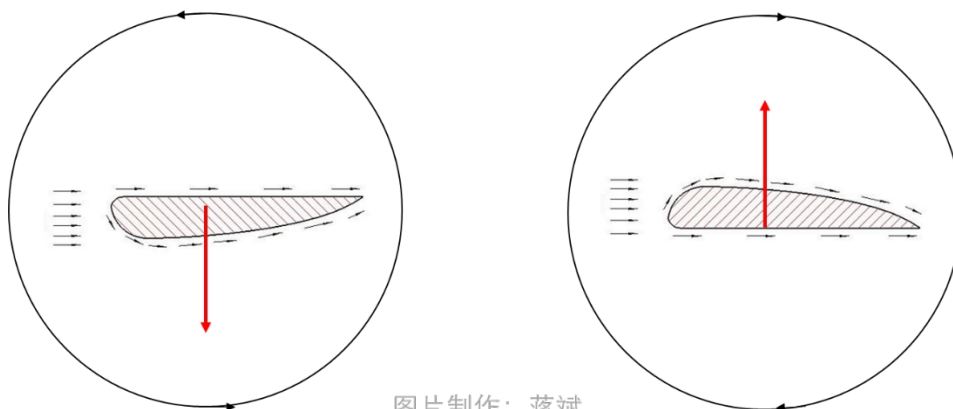
从而复速度的洛朗级数展开具有如下的形式:

$$\frac{dW}{dz} = V_{\infty} e^{-i\alpha} + \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} \cdots + \frac{A_n}{z^n} + \cdots$$

在边界上, $Q=0$, 将上式代入布拉修斯公式, 得:

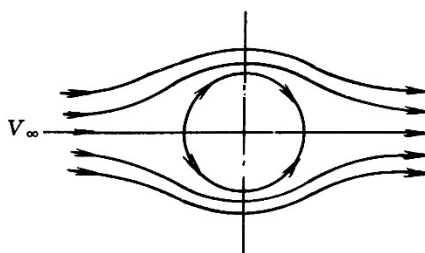
$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \\ &= \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(V_{\infty} e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} + \frac{A_2}{z^2} \cdots + \frac{A_n}{z^n} + \cdots \right)^2 dz \quad (\text{柯西积分公式}) \\ &= \frac{i\rho}{2} \oint_C V_{\infty} e^{-i\alpha} \frac{\Gamma}{\pi i} \cdot \frac{1}{z} dz = \rho V_{\infty} \Gamma i e^{-i\alpha} = \rho V_{\infty} \Gamma \sin \alpha + i \rho V_{\infty} \Gamma \cos \alpha \end{aligned}$$

于是 $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = \rho V_{\infty} \Gamma \sin \alpha \mathbf{i} - \rho V_{\infty} \Gamma \cos \alpha \mathbf{j} = \rho V_{\infty} \times \mathbf{\Gamma}$ 。该式称为儒可夫斯基公式, 它表明对于无粘不可压流体的平面定常无旋流动, 流体作用在柱体上的合力与流体的性质以及均匀来流的速度、环量的大小成正比, 这个合力称为升力, 其方向为把来流方向逆环流方向旋转 90° , 与来流方向垂直。(环流的矢量方向可由右手螺旋法则确定)



图片制作: 蒋斌

6. 无环流的圆柱绕流问题(达朗贝尔佯谬)



▲ 无环量圆柱定常绕流

假设拖着一根长的细棒在静止的流体中运动, 此时细棒的头和尾可分别看作源和汇。如果将细棒的距离缩小, 则细棒可以看成圆柱, 从而可将均匀来流的绕柱的复位势看成是偶极子和均匀流的叠加:

$$W = V_{\infty}z - \frac{\mu}{z} = \left(V_{\infty} - \frac{\mu}{x^2 + y^2} \right) + iy \left(V_{\infty} + \frac{\mu}{x^2 + y^2} \right)$$

考查 0 流线:
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = -\frac{\mu}{V_{\infty}} \end{cases}$$
, 圆柱的边界可以是一条流线, 此时偶极子的

强度为 $\mu = -\pi a^2 V_{\infty}$ (a 为圆柱的半径), 那么因 $x^2 + y^2 = a^2$ 是 0 流线的一部分, 所以圆

柱绕流的复位势可以写为 $W = V_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$, 复速度为 $\frac{dW}{dz} = V_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$ 在圆柱边界

上, 有 $z = ae^{i\theta}$, 所以复速度可写为

$$\frac{dW}{dz} = V_{\infty} (1 - e^{-2i\theta}) = V_{\infty} e^{-i\theta} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2V_{\infty} \sin \theta e^{-i\theta}$$

所以圆柱表面的速度大小为 $\left| \frac{dW}{dz} \right| = 2V_{\infty} |\sin \theta|$, 从表达式可以看出, 在 $\theta = 0, \pi$ 处,

速度为 0, 称为驻点; 而在 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 处, 速度有极大值, 为均匀来流流速的两倍。

再来分析圆柱的受力。若忽略质量力, 伯努利方程可以写为:

$$p_{\infty} + \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} = p + \frac{\rho u^2}{2} \Rightarrow p = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

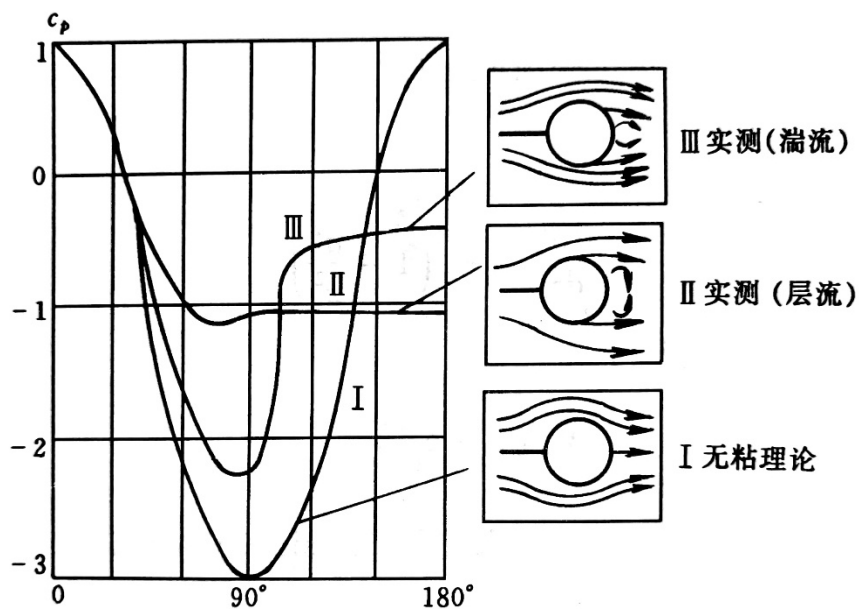
定义无量纲压强系数(描述遍布整个流场的相对压力) $c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho}{2} V_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$, 易

知 c_p 关于 x 轴和 y 轴对称, 即圆柱受到的合力为 0 (圆柱的受力也可以通过积分

求得: $\mathbf{F} = -\oint_C p \mathbf{n} dl = -\oint_C \left[p_{\infty} + \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right] \mathbf{n} dl = 0$)。也就是说当圆柱作无

环量定常流动时, 是不受力的, 即不存在升力, 也不承受阻力, 这就是著名的达朗贝尔佯谬, 首先由达朗贝尔在 1752 年得出。达朗贝尔佯谬产生的原因在于对流体所做的无粘假设, 使得实际上存在的粘性阻力和压差阻力全被忽略了。对

于真实的流体，不仅因粘性作用使得流体对圆柱表面产生摩擦力，而且由于流动不对称，圆柱后出现尾涡，流体还将对圆柱体产生压差力。实际上，流体并不会一直沿着圆柱表面流动，会出现“绕流脱体”现象。



▲ 圆柱绕流压强曲线

7. 有环流的圆柱绕流问题(马格鲁斯效应)

考虑有环流的情形, 则 6 中的复位势还要再叠加上一个点涡的复位势:

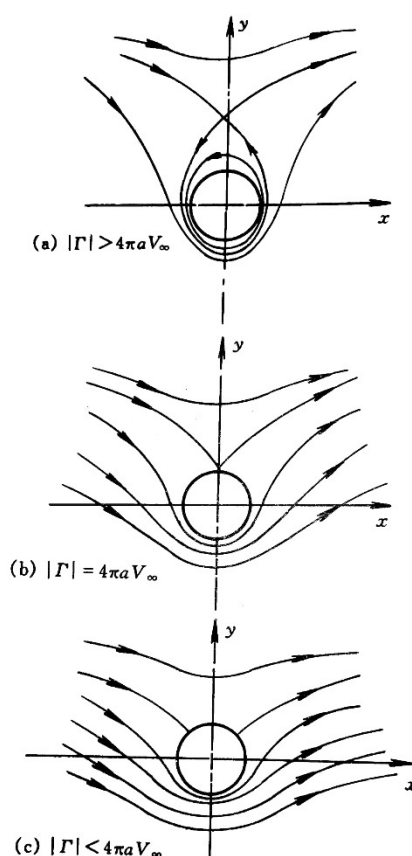
$$W(z) = V_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

复速度为 $\frac{dW}{dz} = V_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$, 令 $\frac{dW}{dz} = 0$, 得

驻点

$$z = \frac{\Gamma i}{4\pi V_{\infty}} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi V_{\infty}} \right)^2}$$

不同情况下的流动图案如左图所示。此时, 圆柱的受力称为升力, 表达式为前面导出的儒可夫斯基公式, 方向与来流垂直。1852 年马格鲁斯在实验中发现了这个侧向的升力, 它使圆柱产生横向运动, 这个现象后来被称为“马格鲁斯效应”。马格鲁斯效应在实际生活中的现象: 足球运动中的“香蕉球”、乒乓球中的“弧圈球”。



8. 镜像法解平面势流问题(证明过程略)

▲ 镜像法求解的关键有两点: (1) 所求的镜像奇点不能在原区域中, 要保证源区域的奇性; (2) 组合流场中存在一条流线, 这条流线就是边界 C 。

(1) 平面边界

➤ 平面定理(1)——固壁设在 $y = 0$

若在 $y > 0$ 的上半平面中存在流体力学奇点, 其复位势已知为 $f(z)$, 则当流场中放入 $y = 0$ 的平面固壁后, 上半平面的流场复位势变为 $W(z) = f(z) + \bar{f}(z)$ 。

▲ 上式中 $\bar{f}(z)$ 的定义为: 除了 z 之外将 $f(z)$ 中所有的虚数 i 改为 $-i$ 。例如,

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0), \text{ 则 } \bar{f}(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0)$$

➤ 平面定理(2)——固壁设在 $x=0$

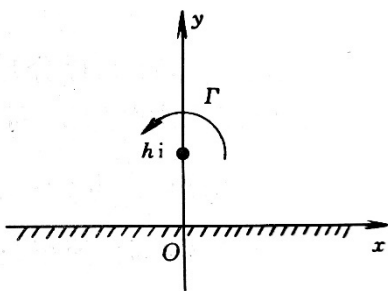
若在 $x>0$ 的右半平面中存在流体力学奇点，其复位势已知为 $f(z)$ ，则当流场中放入 $x=0$ 的平面固壁后，右半平面的流场复位势变为 $W(z)=f(z)+\bar{f}(-z)$ 。

(2) 圆边界

若在 $|z|=a$ 的圆周之外无界流场中存在流体力学奇点，其复位势已知为 $f(z)$ ，则当流场中放入 $|z|=a$ 的平面固壁后，流场复位势变为 $W(z)=f(z)+\bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right)$ 。

➤ 典型例题

1. 如图所示，在 $z_0=hi$ 处放置一个环量为 Γ 的点涡， $y=0$ 是一无限长的固壁，求流场的复位势、固壁上的速度与压强分布(不计质量力)。



解：当固壁不存在时，在 $z_0=hi$ 处的点涡的复位势可表示为：

$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-hi)$ ，加入 $y=0$ 固壁后，根据平面定理(1)，得到加入固壁后的流场复位势为：

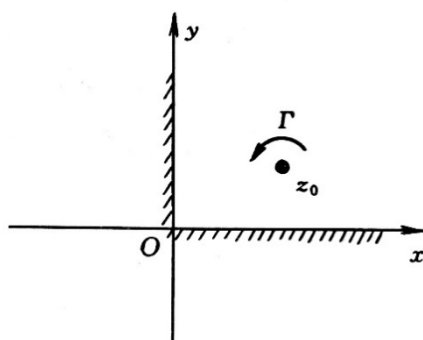
$$W(z)=f(z)+\bar{f}(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-hi)-\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+hi)$$

$$\text{流场的复速度 } \frac{dW}{dz}=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-hi}-\frac{1}{z+hi}\right)=\frac{\Gamma h}{\pi}\left(\frac{1}{z^2+h^2}\right)$$

在固壁 $y=0$ 上，有 $u=\frac{\Gamma h}{\pi}\left(\frac{1}{x^2+h^2}\right)$, $v=0$ ，再根据伯努利方程，得到压强分布为：

$$p = c - \frac{1}{2}u^2 = c - \frac{\rho\Gamma^2 h^2}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{(x^2 + h^2)^2} \quad (c \text{ 为某一常数})$$

2. 如图所示, 在第一象限直角区域内 z_0 处放置一个环量为 Γ 的点涡, 求流场的复位势与复速度。



解: 假设只放入固壁 $y=0$, 则流动复位势可由 1 求出为

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \bar{z}_0)$$

放入固壁 $x=0$ 后, 由平面定理(2), 得到流场的复位势为:

$$\begin{aligned} W(z) &= f(z) + \bar{f}(-z) \\ &= \left[\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \bar{z}_0) \right] + \left[-\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(-z - \bar{z}_0) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(-z - z_0) \right] \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \cdot \frac{-z - z_0}{-z - \bar{z}_0} \right) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - \bar{z}_0^2} \end{aligned}$$

复速度为

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{1}{z + \bar{z}_0} + \frac{1}{z + z_0} \right) = \frac{\Gamma}{\pi i} z \left(\frac{1}{z^2 - z_0^2} - \frac{1}{z^2 - \bar{z}_0^2} \right) = \frac{\Gamma}{\pi i} z \left(\frac{z_0^2 - \bar{z}_0^2}{(z^2 - z_0^2)(z^2 - \bar{z}_0^2)} \right)$$

3. 某一平面流场速度分布为 $u = x^2 - y^2 + x, v = -2xy - y$, 判断该流动是否不可压、是否无旋(等效为判断该流动是否存在流函数和势函数)。

解: 散度 $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, 所以流体不可压, 故存在流函数, 为:

$$\psi = \int u dy - v dx = \int (x^2 - y^2 + x) dy + \int (2xy + y) dx = 2(x^2 y + xy) - \frac{1}{3} y^3 + C_1$$

旋度 $\nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 所以流动无旋, 故存在势函数, 为:

$$\phi = \int u dx + v dy = \int (x^2 - y^2 + x) dx - \int (2xy + y) dy = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - xy^2 + C_2$$

4. 已知某流动复位势为: $W = m \ln \left(z - \frac{1}{z} \right) (m > 0, z = re^{i\theta})$ 。

(1) 该流动可以看成由哪些基本流动组成?

(2) 求该流动的速度势及流函数, 以及过 $z = 1 + i, z = 2$ 的线段的流体体积。

解: (1) 将复位势函数改写为:

$$W = m \ln \frac{z^2 - 1}{z} = m \ln(z + 1) + m \ln(z - 1) - m \ln z$$

可知此流动由三个基本流动组成: 位 $z = 1, z = -1$ 处的强度均为 $2\pi m$ 的两个点源和位于 $z = 0$ 处强度为 $2\pi m$ 的一个点汇组成。

(2) 将 $z = re^{i\theta}$ 代入复位势表达式有:

$$W = m \ln \left(z - \frac{1}{z} \right) = m \ln \left(re^{i\theta} - \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right) = m \ln \left[\left(r - \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(r + \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right]$$

令 $\left(r - \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(r + \frac{1}{r} \right) \sin \theta = R e^{i\Theta}$, 有 $W = m \ln R + im\Theta$, 其中:

$$\begin{cases} R = \sqrt{\left(r - \frac{1}{r} \right)^2 \cos^2 \theta + \left(r + \frac{1}{r} \right)^2 \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\theta + 1}}{r} \\ \Theta = \arctan \frac{\left(r + \frac{1}{r} \right) \sin \theta}{\left(r - \frac{1}{r} \right) \cos \theta} = \arctan \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \tan \theta \right) \end{cases}$$

从而可得势函数为 $\phi = m \ln \frac{\sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2\theta + 1}}{r}$, 流函数为

$\psi = m \arctan \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \tan \theta \right)$ 。对于 $z = 1 + i$, 有 $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$; 对 $z = 2$, 有

$r = 2, \theta = 0$ ，于是过 $z = 1 + i, z = 2$ 的线段的流体体积为：

$$V = |\psi_2 - \psi_1| = m \arctan 3$$

[注]本题的难点在于将所给的复位势进行实部与虚部分离，本题提供的方法可以作为借鉴，另外读者可尝试用直角坐标系进行运算。

5. 平面边界附近有强度为 m 的源，以平面边界为 x 轴，经过点源的 x 轴的垂线为 y 轴，设点源坐标为 $(0, b)(b > 0)$ ，求：

- (1) 边界上的速度分布及最大值点；
- (2) 边界上的压强分布及压强最小值点；
- (3) 设边界为单位宽度且无限长，求源对边界的作用力。

解：(1) 由题意可得复位势为：

$$W = \frac{m}{2\pi} \ln(z - bi) + \frac{m}{2\pi} \ln(z + bi) = \frac{m}{2\pi} \ln[(z - bi)(z + bi)]$$

从而复速度 $\frac{dW}{dz} = \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{z - bi} + \frac{1}{z + bi} \right)$ ，在边界上，有 $z = x$ ，故边界上的速度

分布可以表示为： $v(x) = \frac{m}{2\pi} \frac{2x}{x^2 + b^2}$ ，根据求最值的原理，当 $x = \pm b$ 时，速度大小有极大值，为 $|v_{\max}| = \frac{m}{2\pi b}$

(2) 根据伯努利方程，不计质量力，在边界上有：

$$p = p_{\infty} - \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{\infty} - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{2x}{x^2 + b^2} \right)^2$$

当速度最大时，压强有最小值，将 $x = \pm b$ 代入，得到压强最小为：

$$p_{\min} = p_{\infty} - \frac{\rho m^2}{8\pi^2 b^2}$$

(3) 根据 Blasius 定理，边界受合力的表达式为 $F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_c \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz$

边界的受力大小可以表示为：

$$F = \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{m}{\pi} \frac{x}{x^2 + b^2} \right)^2 dx = \frac{\rho m^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\rho m^2}{4\pi b}$$

[注] 关于第三小问的求积分的思路提示如下:

查阅《高等数学(上册)》(同济大学出版)的积分表公式得到两个不定积分公式:

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \\ \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \end{cases}$$

此外, 还可以采用复变函数的方法求解。积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + b^2)^2} dx$ 属于“积分路径

上无奇点的反常积分”的求解类别, 在复变函数中有如下定理:

设 $f(z)$ 在上边平面 $\text{Im } z > 0$ 内除有限多个孤立奇点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 外解析, 在 $\text{Im } z \geq 0$ 上除点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 外连续, 且 $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \text{Im } z \geq 0}} z f(z) = 0$ 一致成立, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z)$$

因为 $f(z) = \left(\frac{z}{z^2 + b^2} \right)^2 = \frac{z^2}{(z + bi)^2 (z - bi)^2}$, 所以在上半平面, $z = bi$ 为 $f(z)$ 的一个二阶极点, 求解留数的定理如下

若 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点, 则 $\text{Res } f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1} \left[(z-a)^n f(z) \right]}{dz^{n-1}}$ 。

由此可以求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + b^2)^2} dx = 2\pi i \text{Res } f(z)_{z=bi} = 2\pi i \frac{d}{dz} \left[(z-bi)^2 \cdot \frac{z^2}{(z+bi)^2 (z-bi)^2} \right]_{z=bi} = \frac{\pi}{2b}$$

➤ 习题四

1. 已知速度势 ϕ , 求对应的流函数 ψ 。

$$(1) \phi = xy; \quad (2) \phi = x^3 - 3xy^2; \quad (3) \phi = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad (4) \phi = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

2. 已知 $W = \ln \frac{z}{z-2.5}$, 求沿着 $|z|=1.5$ 的环量 Γ 以及通过该圆周的流量 Q 。
3. 在速度为 V_∞ (沿 x 轴正方向) 的均匀来流中, 若在原点处放置一个流量为 Q_s 的源, 求沿 x 轴上的压强分布 (已知 ∞ 处的压强为 p_∞ , 不计质量力)。
4. 在和分别放置一个源和汇, 强度均为 Q , 且有一均匀来流, 速度为 V_∞ , 沿 x 轴正方向, 求驻点及过驻点的流线。
5. 证明 $\phi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2x - 3y$ 所表示的流场和 $\psi = xy + 3x + 2y$ 所表示的流场完全相同。

答案

1. (1) $\psi = \frac{y^2 - x^2}{2}$; (2) $\psi = 2x^2y - y^3$; (3) $\psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; (4) $\psi = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
2. $\Gamma = 0, Q = 2\pi$ (复速度求积分即可)
3. $p_x = p_\infty - \frac{\rho Q_s}{2\pi x} \left(V_\infty + \frac{Q_s}{4\pi x} \right)$
4. 驻点 $x = \pm \sqrt{a^2 + \frac{aQ}{\pi V_\infty}}, y = 0$; 过驻点流线: $V_\infty y - \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = 0$
5. 略 (提示: 证明两流动的复位势一样或者差一个常数)

参考资料

- [1] [流函数](#)
- [2] [第 6 章无粘性不可压缩流体的无旋运动](#)
- [3] [第 3 章: 粘性流体运动](#)
- [4] [第六章 势流理论](#)

第五章 均质粘性不可压流体运动学

➤ 章节思维导图

第五章 均质粘性不可压流体运动学

牢记N-S方程与连续方程，根据问题条件进化简

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v + F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w + F_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

解微分方程

简化后可以求解

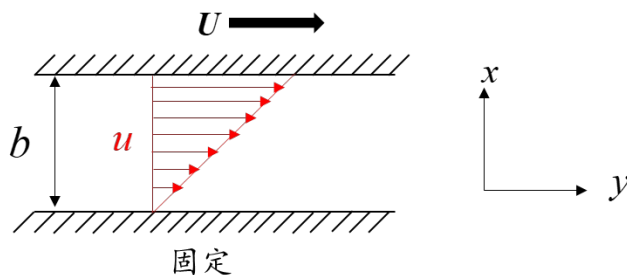
简化后不可以求解

量纲分析

图片制作：蒋斌

➤ 重要知识点

1. 平面库埃特(Couette)流



有两个间距为 b 的无限长平板，其中下板固定，上板以速度 U 移动。两板之间充满粘性不可压流体，平板组成的通道两端压力相同(即水平方向无压强梯度)。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ v = w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = u(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

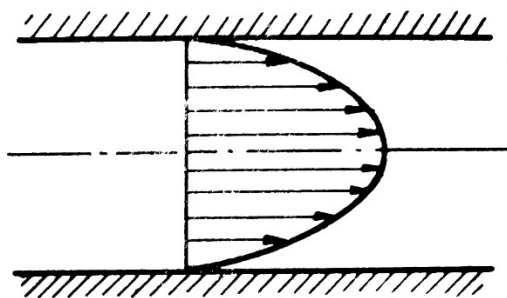
此时可以直接解出 $u = C_1 y + C_2$ ，根据边界条件： $y = 0, u = 0, y = b, u = U$ ，解得速

速分布的表达式为 $u = \frac{U}{b} y$

2. 平面泊肃叶(Poiseuille)流

有两个间距为 b 的无限长平板，其中下下板均固定，两板之间充满粘性不可压流体，平板组成的通道两端压力不相同(即水平方向存在压强梯度)。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ v = w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = u(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$



由方程 2 和 3 式，解得 $p = -\rho g y + p(x)$ ，回代 1 式得到：

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p(x)}{\partial x}$$

上述等式相等的充分必要条件为 $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial p(x)}{\partial x}$ 等于同一个常数，设压强梯度为

$-\frac{\partial p(x)}{\partial x} = G$ ，则由 $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -G$ ，解得 $u = -\frac{G}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$ ，根据边界条件

$y = 0, u = 0, y = b, u = 0$ ，解得 $u = \frac{G}{2\mu} y(b-y)$

3. 量纲分析

基本思想：以 L, M, T 分别代表长度，质量和时间这三个基本物理量的量纲，用 $[P]$ 表示物理量 P 的量纲。例如，要探讨物体在无自由面流体中运动受到的阻力。设物体的线度为 l ，相对于流体的速度为 v ，流体的密度为 ρ ，流体的粘度为 μ ，假设阻力可写成 $Q = kl^\alpha v^\beta \rho^\gamma \mu^\delta$ ，于是有 $[Q] = k[l]^\alpha [v]^\beta [\rho]^\gamma [\mu]^\delta$ ，而

$$[Q] = \frac{ML}{T^2}, [l] = L, [v] = \frac{M}{T}, [\rho] = \frac{M}{L^3}, [\mu] = \frac{M}{LT}$$

(注：粘性系数的定义为单位速度梯度下单位面积上的力，可据此推导其量纲) 代入前式，可得到方程组：

$$\begin{cases} \gamma + \delta = 1 \\ \alpha + \beta - 3\gamma - \delta = 1 \\ -\beta - \delta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 - \delta \\ \alpha = 2 - \delta \\ \beta = 2 - \delta \end{cases}$$

于是 $Q = kl^{2-\delta} v^{2-\delta} \rho^{1-\delta} \mu^\delta$ 。当 $\delta = 1$ 时， $Q = klv\mu$ ，此时满足 *Stokes* 阻力定律；当 $\delta = 0$ 时， $Q = kl^2 v^2 \rho$ ，此时满足 *Newton* 阻力定律。

▲ **π 定理**：在一个物理问题中，如果有 n 个物理量，其中包含 r 个基本物理量，那么这个问题就可以用 $n-r$ 个独立的无量纲量来描述。

4. 相似律——保持模拟流场和实际流场之间的相似性

(1) 两个流动相似的四个不同层次

- **几何相似(大前提)**：两流动流场的几何形状相似，即两流动的对应长度成比例，对应角度相等。
- ▲ 分别取模型和实物的特征长度和特征时间构成无量纲量，则两流场中无量纲坐标和无量纲时间相同的点称为**时空对应点**。
- **运动相似**：指两个几何相似的流场中时空对应点的速度大小方向相同，大小成比例。
- **动力相似**：指两个运动相似的流场中时空对应点上对应面元的所受力的方向相同，大小成比例。
- **热力相似**：指两个动力相似的流场中时空对应点的温度成比例，通过对应点

上对应面源的热流方向相同，大小成比例。

- ▲ 上述几个相似之间的关系：几何相似是运动相似和动力相似的前提与依据；动力相似是决定两个流动相似的主导因素；运动相似是几何相似和动力相似的表现。

(2) 两流动相似的充要条件

斯特劳哈尔数 $St = \frac{L}{U_\infty T}$ 、Euler 数 $Eu = \frac{p_0}{\rho U_\infty^2}$ 、费劳德数 $Fr = \frac{U_\infty^2}{gL}$ 与雷诺数

$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ 均相同，且初始边界条件也相同。

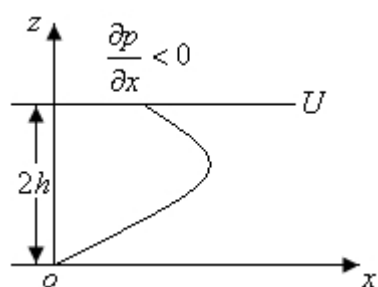
- ▲ 雷诺数的物理意义：表示惯性力和粘性力的相对大小(二者比值)，雷诺数较小时，粘滞力对流场的影响大于惯性，流场中流速的扰动会因粘滞力而衰减，流体流动稳定，为层流；反之，若雷诺数较大时，惯性对流场的影响大于粘滞力，流体流动较不稳定，流速的微小变化容易发展、增强，形成紊乱、不规则的紊流流场。

➤ 典型例题

1. 讨论两无限长水平平行平板间的定常、层流运动，其中一平板固定，另一平板以速度 U 在其所在平面内等速平移运动，求作用在上下平板上的摩擦应力。

解：根据题意建立如下图所示的坐标系。满足的条件有： $\frac{\partial}{\partial y} = 0, v = w = 0$

由连续方程： $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ，所以得到速度分布为 $u = u(z)$ 。简化的 $N-S$ 方程为：



$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

由 2 式可知， p 与 y 无关，解第 3 式有 $p = -\rho gz + p_1(x)$

将 p 的表达式代入第 1 式, 有 $\frac{1}{\rho} \frac{dp_1}{dx} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{c}{\rho}$, 从而解得:

$$p_1 = cx, u(z) = \frac{c}{2\mu} z^2 + c_1 z + c_2$$

边界条件: $z = 0, u = 0, z = 2h, u = U$, 解得 $c_2 = 0, c_1 = \frac{U}{2h} - \frac{ch}{\mu}$

所以 $u(z) = \frac{c}{2\mu} z^2 + \left(\frac{U}{2h} - \frac{ch}{\mu} \right) z$, 应力公式: $p_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = cz + \frac{\mu U}{2h} - ch$

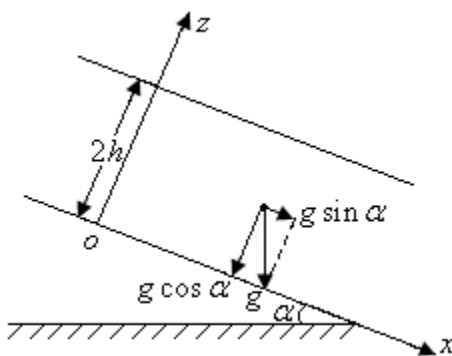
上板应力(摩擦力): $p_{xz}(z = 2h) = \frac{\mu U}{2h} + ch$

下板应力(摩擦力): $p_{xz}(z = 0) = \frac{\mu U}{2h} - ch$

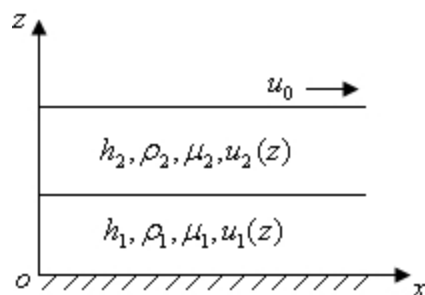
在压强梯度和上板运动共同作用, 假设 $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ 即高压向低压方向与 U 同向,

此时流速面仍是抛物线, 只不过其最大流速不象 *Poiseuille* 流在板中间, 而是靠近上板, 其值最大也超过了上板运动速度。

[变式训练] 假设把上题的平行平板倾斜放置, 与水平成 α 角, 运动情况如何?



2. 两无限大平行平板间有两层不同密度、不同粘性的流体。已知上、下层流体厚度、密度和粘性系数分别为 h_2, ρ_2, μ_2 和 h_1, ρ_1, μ_1 。设水平方向无压差, 上平板以速度 V_0 匀速运动, 下平板静止。试给出边界条件并求速度分布。



解：建立如上图所示的坐标系，边界条件如下：

$$z = 0, u_1 = 0$$

$$z = h_1, u_1 = u_2, \mu_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$z = h_1 + h_2, u_2 = V_0$$

两层流体满足的 N-S 方程如下：

$$\text{上层:} \begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\mu_2}{\rho_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial y} \\ 0 = -g - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} \end{cases}, \text{下层:} \begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\mu_1}{\rho_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} \\ 0 = -g - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} \end{cases}$$

因为水平方向无压差，所以 $\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0$ ，所以速度分布为

$$u_1 = c_1 z + c_2, u_2 = c_3 z + c_4$$

$$\text{代入边界条件，有} \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 h_1 = c_3 h_1 + c_4 \\ \mu_1 c_1 = \mu_2 c_3 \\ V_0 = c_3 (h_1 + h_2) + c_4 \end{cases}, \text{解此方程组，得}$$

$$c_1 = \frac{V_0 \mu_2}{\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1}, c_3 = \frac{V_0 \mu_1}{\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1}, c_4 = \frac{V_0 (\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 h_2 + \mu_2 h_1}$$

参考资料

- [1] [第八章 不可压缩粘性流体内部流动](#)
- [2] [第六章——不可压缩粘性流体的内部流动](#)
- [3] [相似理论与量纲分析](#)

附录一 流体力学思考题

编者注：流体力学期末考试会涉及简答题，因此增设了此版块，本版块不提供答案，以留给读者更多的思考与查阅资料的余地。

3. 什么是连续介质模型?适用范围如何?
4. 简述系统与控制体及各自的特点。
5. 流体静压强的特性是什么?
6. 什么是理想流体，正压流体，不可压缩流体?
7. 分别用数学表达式给出拉格朗日法和欧拉法的流体加速度表达式。
8. 流线和迹线有何区别，在什么条件下流场中的流线和迹线相重合?
9. 理想流体运动时有无切应力?粘性流体静止时有无切应力?静止时无切应力的流体是否无粘性?为什么?
10. 流体力学中的边界有哪些? 这些边界上的速度和应力有什么特点?
11. 试述伯努利方程 $p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \Pi$ 中各项的物理意义，并说明该方程的适用条件。
12. 压强梯度力在什么情况下会影响环流? 为什么? 此外，影响环流的因素还有哪些?
13. 简述 *Stokes* 环流定理的基本内容。
14. 什么是速度势函数?无旋运动与有势运动有何关系?
15. 什么是流函数?流函数存在什么性质? 其物理意义是什么?
16. 什么是本构? 本构在流体力学中的应用?
17. 为推出牛顿流体的本构方程，*Stokes* 提出了 3 条基本假设，分为是什么?
18. 作用在流体微团上的力分为哪两种?流体力学中对这两种力如何描述?
19. 简述流体运动的 *Helmholtz* 速度分解定律的基本内容，并利用该定理说明流体微团的变形运动。
20. 涡管的定义? 什么条件下涡管的强度守恒?
21. 影响涡度的因素有哪些?
22. 兰金组合涡的速度和压强分布有什么特征?

23. 什么是复位势？它的性质有哪些？
24. 简述流体力学复位势理论的基本内容。
25. 在理想有势的流动假设条件下，绕流物体产生的升力主要受那些因素的影响，有何规律？
26. 什么是达朗贝尔佯谬？产生的原因是什么？实际流动情况又是如何？
27. 什么是雷诺数？它的物理意义是什么？
28. 流动相似的条件是什么？简述 π 定理的内容。

参考资料

[1] [《高等流体力学》复习题](#)

[2] [高等流体力学复习总结](#)

附录二 流体力学往年期末考试题

（一）2021 秋季学期流体力学期末考试题

编者注：本试卷由张一航同学考试后回忆整理得到，命题的老师为文凡老师

1. 已知 $u = \omega y, v = -\omega x, w = 0$ 。
 - (1) 求流线、轨迹；
 - (2) 简述速度散度的物理意义。
2. (1) *Helmholtz* 速度分解定理的内容是什么？(2) 简述流体微团的运动图像。(3) 静止流体中的应力有什么特点？(4) 环流和涡度的关系？(5) 环流为 0，涡通量一定为 0 吗，为什么？

3. 已知速度势 $\phi = -k^2(x^2 + y^2 - 2z^2)$.

- (1) 求压强分布;
- (2) 简述 Bernoulli 方程的内容和物理意义.

4. 已知流动由一沿 x 方向的均匀流和一位于原点的点汇叠加而成.

- (1) 求过(1,1)的流线方程;
- (2) 简述象的方法的基本思想.

5. 一无限大平板置于 xOy 平面上, 其运动规律为 $u=Usint$, 上半空间充满流体.

- (1) 求上半空间流动满足的方程, 并写出边界条件;
- (2) 定性分析上半空间的流动规律.

(二) 2022 年春季学期流体力学期末考试题

编者注：本试卷由刘阅同学考试后回忆整理，命题的老师为毛新燕和孟静老师

一、概念题

连续介质假设；正压流体；开尔文定理；兰金组合涡.

二、已知 $u=(6x-4y)t$, $v=(9x-6y)t$, 求:

求加速度；此流动是否为定常流动？此流动是否为均匀流动？

三、有一水平放置的粗细不均的水管， $D_1=15\text{ cm}$ ， $D_2=7.5\text{ cm}$ ， $P_1=1.5g\text{ N/cm}^2$ ， $P_2=4g\text{ N/cm}^2$ ，求管内流量。（ g 为重力加速度）

注：原题就是这么给的压强。

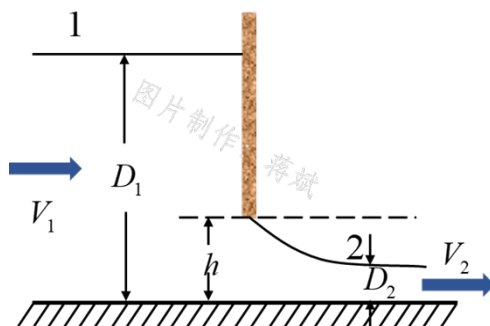
四、甲球在水中进行测试，水速 $u_1=2\text{ m/s}$ ，所受阻力 $F=5\text{ N}$ ，乙球的直径为甲球的 2 倍，将乙球放于空气中测试，空气密度 $\rho=1.3\text{ kg/m}^3$ ，运动学黏性系数为水中的 13 倍。

1. 空气流速多大才能满足相似准则数？
2. 计算空气中小球所受阻力。

五、某流动场的复势为： $W(z) = (1+i)\ln(z^2+4) + (3-4i)\ln(z^2-9) + 5z + \frac{20}{z}$

1. 写出基本势流；
2. 求 $|z|=4$ 处的速度环量 Γ 及通过的流量 Q .

六、明渠中理想不可压缩流体流经闸门，情况如下图所示，1、2 断面上水深分别为 D_1 和 D_2 ，渠宽 w ，求明渠中流体对闸门的水平作用力 R 。略去渠壁摩擦力和体力。



七、水平放置的两无限大平行平板之间充满粘性不可压缩流体，假若保持上平板不动，下平板以速度 U 在自己所在的平面内匀速运动，求当流动达到定常状态后流体的速度分布以及两平板各自所受到的粘性应力。