

流体力学 II 学习笔记

整理/OU Cer-19 大气科学 蒋斌

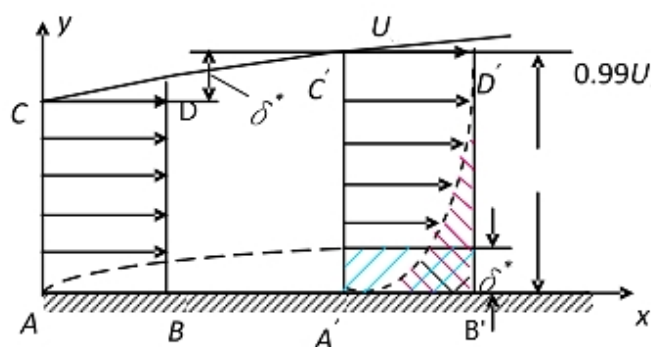
第一部分 边界层

1. 边界层厚度的四个定义

(1) 名义厚度(Nominal Thickness)—— δ_{99}

边界上的流速达到 $0.99U_{\infty}$ 的点到物面的法向距离。

(2) 位移厚度(Displacement Thickness)—— δ^*



设想边界层内的流体为无粘性时，以均流速度 U 流过平板；而实际流体具有粘性，以相同速度流过平板时，由于壁面无滑移条件，速度从 U 跌落至 0。如此形成的边界层对流动的影响之一是使设想中的无粘性流体流过该区域的质量流量亏损了（图中阴影区，平板宽度设为 1）。将亏损量折算成无粘性的流量，并假设这些质量以流速度 U 流过边界层，那么，此时亏损的质量的厚度为 δ^* ：

$$U\delta^* = U\delta - \int_0^{\delta} u dy \Rightarrow \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

✧ 位移厚度的物理意义

等式右端表示厚度为 δ 的理想流体进入边界层时的流量损失(图中划右斜线的面积)，它相当于损失了厚度为 δ^* 的理想流体的流量 δ^*U (图中划左斜线面积)，这部分流量被排向边界层区域的外侧，使得区域外侧的流线较原来的位置外移了 δ^* (流线 CC')，这也相当于与置于势流中时物体的厚度增加了 δ^* (图中虚线)。

位移厚度的物理意义是为了保持有黏性流与无黏性流动的质量流量相等。在用理想流体设计固壁或管道时，应将管壁向外放大 δ^* 。

(3) 动量厚度(Momentum Thickness)—— δ^{**}

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

为了说明物理意义，上述式子可以改写为： $\rho \delta^{**} U^2 = \int_0^\delta \rho u (U - u) dy$ ，还是对单位宽度的平板分析，于是等式右边即表示由于粘性使流入边界层的流体所具有的动量和理想势流相比的动量差(把 $\rho u dy$ 看成质量)，即动量损失。边界层内损失的动量相当于厚度为的理想流体的动量 $\rho \delta^{**} U^2$ (等式左边)。

(4) 能量损失厚度(Kinetic Energy Thickness)—— δ^{***}

$$\delta^{***} = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) dy$$

4 个厚度具有相同量阶，但 δ^* , δ^{**} 和 δ^{***} 都小于 δ_{99}

2. 边界层内外场的特征

- (1) 边界层外部粘性影响很小， $\mathbf{v}$ 可以忽略不计，可认为边界层外部的流动是理想、无旋的势流，适用欧拉方程；
- (2) 势流的近似计算中，可略去边界层的厚度，解出沿物体表面的流速和压力分布，并认为就是边界层边界上的速度和压力分布(边界层的边界条件)，据此来计算边界层；
- (3) 边界层内速度梯度很大；
- (4) 边界层内的流动是有旋流动： $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ ；
- (5) 边界层内粘性力和惯性力具有相同的数量级；
- (6) 根据边界层厚度极薄的基本假设，边界层厚度比物体特征长度小得多，可将 N-S 方程化简，获得边界层的基本微分方程；

- (7) 边界层厚度沿流体流动方向是增加的。由于边界层内流体质点受到黏性力的作用，流动速度降低，所以要达到外部势流速度，边界层厚度必然逐渐增加。

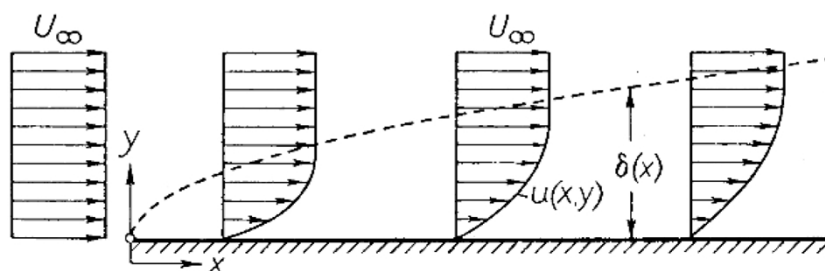
3. 层流边界层向湍流边界层转变的判断规则

由层流边界层转变为湍流边界层的点(x_{cr})称为**转捩点**。转捩点的雷诺数为临界雷诺数，可表示为

$$Re_{cr} = \frac{Ux_{cr}}{\nu}$$

特点: 临界雷诺数的大小与边界层外流动的压强分布、壁面粗糙性质、来流的脉动程度有关，**脉动强，临界雷诺数小**。对于平板的边界层，层流转变为紊流的临界雷诺数为： $Re_{cr} = 3 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$

4. Prandtl 边界层微分方程



✧ 假设条件

- (1) 粘性不可压缩流体，不计质量力，定常流 U 流过长度 L 的平板；
- (2) 边界层厚度 δ 较平板特征长度 L 小得多，即 $\delta' = \frac{\delta}{L} \ll 1$ ；
- (3) 边界层内粘性力 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 和惯性力 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 具有相同的数量级；
- (4) 边界为层流边界层；
- (5) 考虑上图所示的二维流动情况。

✧ N-S 方程(均质不可压): $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$

✧ 根据假设，N-S 方程的进一步化简+连续方程

不计质量力, $\mathbf{F} = 0$; 二维流动 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$; 定常流动 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$;

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

边界条件: $y=0, u=v=0; y=\delta, u=U(x)$

✧ 去量纲化

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L, x' = \frac{x}{L} \sim O(1) \\ 0 \leq y \leq \delta, y' = \frac{y}{L} = \frac{\delta}{L} \sim O(\delta') (\delta' \text{ 是一个远小于 } 1 \text{ 的数}) \\ 0 \leq u \leq U, u' = \frac{u}{U} \sim O(1) \end{cases}$$

根据上面得到的三个无量纲因子继续推导。

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} \sim O(1), \text{ 由 } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v'}{\partial y'} \sim \frac{\partial u'}{\partial x'} \sim O(1) \Rightarrow v' \sim O(\delta')$$

$$v' \sim O(\delta') \Rightarrow \frac{\partial v'}{\partial x'} \sim O(\delta'), \frac{\partial u'}{\partial x'} \sim O(1) \Rightarrow \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \sim O(1), \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \sim O\left(\frac{1}{\delta'^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \sim O(\delta'), \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \sim O\left(\frac{1}{\delta'}\right)$$

根据假设(3), 有

$$O\left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Leftrightarrow \nu \frac{U}{\delta^2} = \frac{U^2}{L} \Rightarrow \delta^2 = \frac{L}{\text{Re}} \left(\delta = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \Leftrightarrow \delta' = \frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \right)$$

雷诺数越大, 边界层越薄。

✧ 无量纲因子 $x' = \frac{x}{L}, y' = \frac{y}{L} \left(= \frac{y}{\delta} \right), u' = \frac{u}{U}, v' = \frac{v}{U}, p' = \frac{p}{\rho U^2}$ 回代简化 N-S 方程

需要注意的是, 无因次量纲分析后方程中的压强梯度力项的量级无法直接得出, 它主要起调节作用, 由方程中最大的量级决定。

$$\begin{cases} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

[代入过程示例]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = (u'U) \frac{\partial (u'U)}{\partial (x'L)} = \frac{U^2}{L} u' \frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial (x'L)} \left(\frac{\partial (u'U)}{\partial (x'L)} \right) = \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$$

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$1 * 1 \quad \delta' * \frac{1}{\delta'} \quad 1 \quad \delta'^2 \quad 1 \quad \frac{1}{\delta'^2}$

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$1 * \delta' \quad \delta' * 1 \quad \frac{1}{\delta'} \quad \delta'^2 \quad \delta' \quad \frac{1}{\delta'}$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

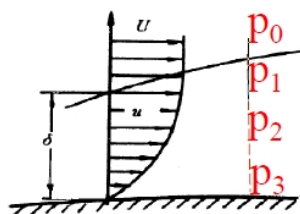
$1 \quad 1$

图片制作：蒋斌

通过量纲分析将一些低阶的量略去，将无因次量转换成有次量，得到边界层微分方程如下：

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (y=0, u=v=0; y=\delta, u=U(x))$$

方程中 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ 表明压力在整个边界层厚度上是常数的特征，即 $p = p(x)$



$$p_1 = p_2 = p_3 = p_0$$

方程适用范围:

由于在方程简化过程中, 设 x 与 y 具有不同的数量级, 即

$$\frac{y}{x} \sim \frac{u_y}{u_x} \sim \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \sim \varepsilon \ll 1$$

显然, 这一假设在平板壁面前缘部分是不成立的。

方程适用条件:

稳定绕流、不可压缩、二维流动、质量力不计

5. 平板边界层的 *Falkner-Skan* 解

在边界层外, 为定常流动, 且不计粘性($u = U(x), v = 0$), 代入边界层微分

方程中有: $U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, 于是 *Prandtl* 边界层微分方程又可以改写为

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad B.C. \begin{cases} y=0, u=v=0 \\ y \rightarrow \infty, u \rightarrow U(x) \end{cases}$$

引入流函数 ψ , 有 $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, 继续代入上述方程化简有

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad B.C. \begin{cases} y=0, u=v=0 \\ y \rightarrow \infty, u \rightarrow U(x) \end{cases}$$

边界层微分方程的解 u 一般应该是 x, y 的函数, 即 $u = u(x, y)$, 无量纲化后为

$\frac{u}{U} = g(x, y)$ 。但是，在某些特殊条件下，解具有如下形式 $\frac{u}{U} = g(\eta)$ ，其中 η 是一无量纲量，若如此，即速度剖面是单变量 η 的函数，则称此剪切层是相似的， η 可以是 x 和 y 的某个特定函数，叫**相似参数**。

引入相似性变量 $\eta = \frac{y}{g(x)} (g(x) = h\delta(x), h = \text{const})$ ，有

$$u = U(x)F(\eta) = U(x)f'(\eta)$$

上式中 $F(\eta)$ 为另一函数 $f(\eta)$ 的导数，即 $F(\eta) = f'(\eta) \Leftrightarrow f(\eta) = \int_0^\eta F(\eta) d\eta$

据此可以求出流函数为 $\psi = \int_0^y u dy = \int_0^y g(x)U(x)F(\eta) d\eta = g(x)U(x)f(\eta)$ ，从而：

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = [g(x)U(x)f(\eta)]' = g'Uf + gUf' - gUf' \cdot \frac{yg'}{g^2} = f(g'U + gU') - U\eta gf'$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = [g(x)U(x)f(\eta)]' = gUf' \cdot \frac{1}{g} = Uf'$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = [Uf']' = Uf'' - Uf' \frac{g'}{g^2} = Uf'' - \frac{U\eta}{g} g' f'' , \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{U}{g^2} f'''$$

上式中 $g' = \frac{dg}{dx}, U' = \frac{dU}{dx}, f' = \frac{df}{d\eta}$ ，代入方程中进行化简得到

$$\begin{aligned} & Uf' \left(U'f' - \frac{Ug'}{g} \eta f'' \right) - ((U'g + Ug')f - Ug'\eta f') \frac{U}{g} f'' = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{U}{g^2} f''' \\ & Uf'U'f' - Uf' \frac{Ug'}{g} \eta f'' - U'gf \frac{U}{g} f'' - Ug'f \frac{U}{g} f'' + Ug'\eta f' \frac{U}{g} f'' = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{U}{g^2} f''' \\ & UU'f'^2 - \frac{U^2g'}{g} \eta f'f'' - U'Uff'' - g' \frac{U^2}{g} ff'' + g'\eta \frac{U^2}{g} f'f'' = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{U}{g^2} f''' \\ & UU'f'^2 - \left(U'U + g' \frac{U^2}{g} \right) ff'' - \left(\frac{U^2g'}{g} \eta - g'\eta \frac{U^2}{g} \right) f'f'' = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{U}{g^2} f''' \\ & \quad \frac{g^2U'}{\nu} f'^2 - \left(\frac{g^2U'}{\nu} + \frac{g'Ug}{\nu} \right) ff'' = \frac{g^2}{\nu} U' + f''' \\ & \quad - \left(\frac{g^2U'}{\nu} + \frac{g'Ug}{\nu} \right) ff'' = \frac{g^2}{\nu} U' - \frac{g^2U'}{\nu} f'^2 + f''' \\ & \quad - \left(\frac{g^2U'}{\nu} + \frac{g'Ug}{\nu} \right) ff'' = \frac{g^2U'}{\nu} (1 - f'^2) + f''' \\ & \quad - \frac{g}{\nu} (U'g + Ug') ff'' = \frac{g^2U'}{\nu} (1 - f'^2) + f''' \end{aligned}$$

最终得到 $f''' + \frac{g}{\nu}(Ug)' ff'' + \frac{g^2 U'}{\nu}(1-f'^2) = 0 \quad ((Ug)' = \frac{d(Ug)}{dx})$

由于 f, f' 只是 η 的函数, 不妨令 $\frac{g(gU)'}{\nu} = c_1, \frac{g^2 U'}{\nu} = m$, 于是有关系

$$\frac{1}{\nu} \frac{d}{dx}(g^2 U) = \frac{2gg'U}{\nu} + \frac{g^2 U'}{\nu} = \frac{2g[(gU)' - gU']}{\nu} + \frac{g^2 U'}{\nu} = \frac{2(gU)'}{\nu} - \frac{g^2 U'}{\nu} = 2c_1 - m$$

即 $g^2 = (2c_1 - m) \frac{\nu x}{U} \Leftrightarrow g \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \left(g = h\delta(x) \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \right)$, 令 $2c_1 - m = 1$, 则

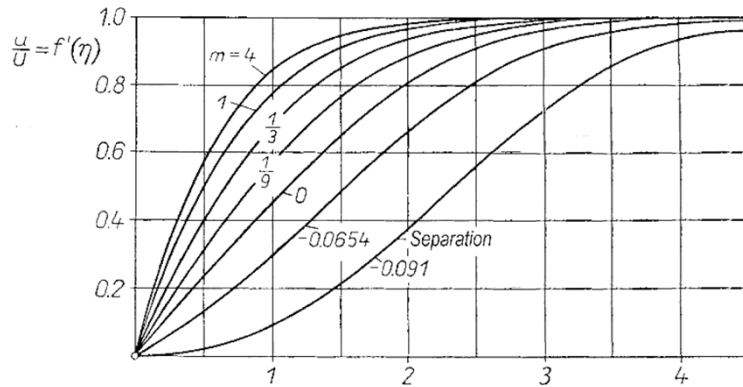
$$g = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \eta = \frac{y}{g} = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}$$

将上述结论代入 $\frac{g^2 U'}{\nu} = m \Leftrightarrow \frac{U'}{U} = mx \Rightarrow U = cx^m$, 这个公式称为 **Goldstein 公式**,

是流动相似性的条件。进而可以将边界层方程进一步写成:

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1-f'^2) = 0 \quad B.C. \begin{cases} \eta = 0, f = 0 \\ \eta = 0, f' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty, f' \rightarrow 1 \end{cases}$$

此方程得到的解为 *Falkner-Skan* 解, 其随 m 的变化如下 $\frac{u}{U}(f'(\eta)) - \eta$ 图所示(注意 $m < -0.091$ 的解不再满足边界层条件)



6. 平板边界层的 Blasius 解

前面讨论的是非均匀流情形, 现在考虑均匀来流情形, 即 $U = const$ 。边界层方程为

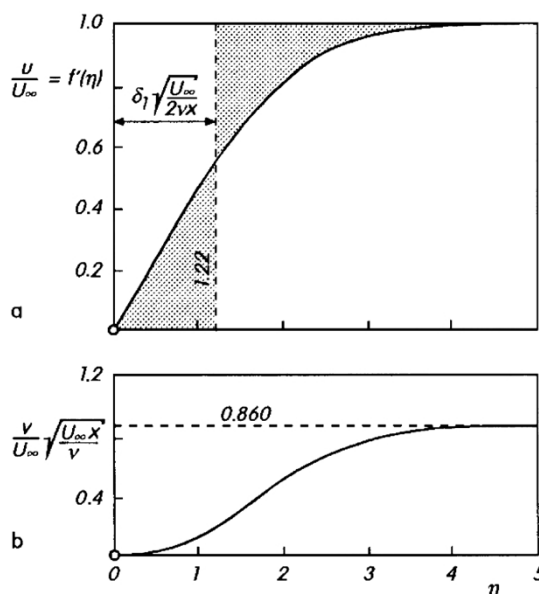
$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad B.C. \begin{cases} y=0, u=v=0 \\ y \rightarrow \infty, u \rightarrow U \end{cases}$$

由条件, $-\frac{g}{\nu}(U'g + Ug')ff'' = \frac{g^2 U'}{\nu}(1-f'^2) + f'''$ 中 $U'=0$, 因此我们可以得

到边界层方程为:

$$f''' + \frac{Ug'g}{\nu}ff'' = 0 \xrightarrow{g=\frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}} 2f''' + ff'' = 0 \quad B.C. \begin{cases} \eta=0, f=0 \\ \eta=0, f'=0 \\ \eta \rightarrow \infty, f' \rightarrow 1 \end{cases}$$

上述方程表明 f 满足的是三阶非线性常微分方程, 因此得不到解析解。可以采用级数展开办法, 或者数值积分的方法得到数值解。由于 f 和 η 均为无量纲量, 且在方程及边界条件中不显含 u, v 及 U , 故所得结果可以一劳永逸地应用。上述方程的解由 *Blasius* 最早给出, 因此上述方程的解又称为 *Blasius* 解。



Blasius解的部分参数

$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U}$	f''
0	0	0	0.3321
1	0.1658	0.3298	0.3230
2	0.6500	0.6298	0.2668
3	1.3968	0.8461	0.1614
4	2.3058	0.9555	0.0642
5	3.2833	0.9916	0.0159
6	4.2996	0.9990	0.0024
7	5.2793	0.9999	0.0002
7.8	6.0792	1.0000	0.0000

上图即为 Blasius 解的图像, 它表明了边界层不仅有平行板的速度分布 ($u(y)$), 还有沿着板的速度分布。下面讨论几个参数。

(1) 横向速度(Transverse velocity)

$$\psi = g(x)U(x)f(\eta) = \sqrt{U\nu x}f(\eta)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U\nu}{x}}f + \sqrt{U\nu x}f' \cdot \left(\frac{y}{2x}\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U\nu}{x}}(f'\eta - f)$$

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{2\text{Re}_x}(f'\eta - f)$$

我们需要求得 $\eta \rightarrow \infty$ 时 $\frac{v}{U}$ 的极限值。可以发现，当 $\eta \geq 5$ 后， $f' \rightarrow 1$ ，同时

$$\frac{\eta - f}{2} \sim 0.86, \text{ 所以有 } \frac{v}{U} \sim \frac{0.86}{\text{Re}_x} (\text{Re}_x \text{ 称为局地雷诺数}).$$

(2) 边界层的名义厚度 δ_{99}

$$\text{由图可知，在 } \eta = 4.9 \text{ 时， } f'(\eta) = \frac{u}{U} = 0.99。 \eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \Leftrightarrow \delta_{99} = 4.9\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

(3) 边界层的排挤厚度 δ^*

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} (\eta - f)|_0^\infty = 1.7208\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$(\eta - f)|_\infty$ 可以看作是边界层以外的一点处的值，也就是 $\frac{u}{U} = 1.0$ 之外的参数值，由表可知， $(\eta - f)|_\infty = 7.8 - 6.0792 = 1.7208$

(4) 边界层的动量损失厚度 δ^{**} / θ

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] f'(\eta) d\eta \text{ (分部积分)} \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty (1 - f') df = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \left[(1 - f') f \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f d(1 - f') \right] \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty f f'' d\eta \xrightarrow{2f''' + f'' = 0} -2\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^\infty f''' d\eta \\ &= -2\sqrt{\frac{\nu x}{U}} f'' \Big|_0^\infty = -2(0 - 0.3321)\sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 0.6642\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \end{aligned}$$

因此可以得到不同边界层厚度定义之间的大小关系：

$$\frac{\delta^*}{\delta_{99}} = \frac{1.7208}{4.9} \approx 0.35, \frac{\theta}{\delta_{99}} = \frac{0.6642}{4.9} \approx 0.14$$

(5) 壁面上($\eta = 0$)的切应力 τ_0

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial [Uf'(\eta)]}{\partial y} = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) = 0.3321 \frac{\rho U^2}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

(6) 表面摩擦系数(阻力系数) C_f $C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.6642}{\sqrt{\text{Re}_x}}$

(7) 总阻力(拖曳力, Drag Force)

$$D = \int_0^L \tau_0 dx = 0.3321 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{U}} \int_0^L x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{0.6642 \rho U^2 L}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (L \text{ 为特征长度})$$

(8) 拖曳系数 $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 L} = \frac{1.33}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (C_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx)$

[注] 关于 Blasius 相似性解的几点说明

- ① **正确性**。实际平板总是有限长度的, 采用无限长平板的相似性解来近似, 其准确性需实验验证。*J. Nikuradse* (1942 年) 在风洞实验中测量了离平板前缘距离不同的几处速度剖面, 并按相似性变量 $(\frac{u}{U}, y\sqrt{\frac{U}{\nu x}})$ 整理数据, 实验结果很好地证实了速度剖面地相似性, 也验证了 Blasius 解的正确性。
- ② **应用**。由于 Blasius 解的准确性, 它常用来校准边界层测速装置的探头; 另外, 它在边界层数值计算中颇为有用, 常被用来考核计算方法或程序的正确性。
- ③ **局限性**。Blasius 解也有其局限性, 它在平板前缘点附近不适用。这是因为在边界层简化时, 前缘点附近 $y < x$ 的假设已不成立, $N-S$ 方程中的 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 项不能忽略。此外, Blasius 解假定平板为无限长, 对于实际的有限长平板, 其后缘对边界层也有一定影响。

7. 边界层哥路别夫积分方程的导出

对边界层微分方程 $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 两边同时乘以 u^k , 并做积分

$$\underbrace{\int_0^{\delta(x)} u^{k+1} \frac{\partial u}{\partial x} dy}_{(1)} + \underbrace{\int_0^{\delta(x)} u^k v \frac{\partial u}{\partial y} dy}_{(2)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^k dy + \underbrace{\nu \int_0^{\delta(x)} u^k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy}_{(3)}$$

(1) 第一项

[含导数变限积分的运算公式]

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} \psi(x) dx = \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} \psi(x) dx + a'(x) \psi[a(x)] - b'(x) \psi[b(x)]$$

$$\int_0^{\delta(x)} u^{k+1} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{1}{k+2} \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u^{k+2}}{\partial x} dy$$

$$= \frac{1}{k+2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^{k+2} dy - \delta' u^{k+2} \Big|_{\delta} \right) = \frac{1}{k+2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^{k+2} dy - \delta' U^{k+2} \right)$$

(2) 第二项

$$\int_0^{\delta(x)} u^k v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{k+1} \int_0^{\delta(x)} v \frac{\partial u^{k+1}}{\partial y} dy$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k+1} (vu^{k+1}) \Big|_0^{\delta(x)}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{1}{k+1} \int_0^{\delta(x)} u^{k+1} \frac{\partial v}{\partial y} dy}_{\textcircled{2}}$$

利用连续方程,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v \Big|_0^{\delta(x)} = -\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u dy + \delta' U$$

所以第①项可写为

$$\frac{1}{k+1} (vu^{k+1}) \Big|_0^{\delta(x)} = \frac{1}{k+1} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u dy + \delta' U \right) U^{k+1}$$

同样将连续方程代入第②项中有

$$-\frac{1}{k+1} \int_0^{\delta(x)} u^{k+1} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{1}{k+1} \int_0^{\delta(x)} u^{k+1} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^{k+2} dy - \delta' U^{k+2} \right)$$

(3) 第三项

$$v \int_0^{\delta(x)} u^k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = v \int_0^{\delta(x)} u^k d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(vu^k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_0^{\delta(x)} - vk \int_0^{\delta(x)} u^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

$$= -vk \int_0^{\delta(x)} u^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

将各项的结果回代到方程中, 可以得到著名的哥路别夫方程

$$\frac{1}{k+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^{k+2} dy - U^{k+1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u dy \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^k dy - vk \int_0^{\delta(x)} u^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

8. 卡门—波尔豪森动量积分关系式

对于乘以的 u^k ，如果令 $k=0$ ，对应的方程称为卡门积分方程。所以是否可以直接令哥路别夫方程中的 $k=0$ 从而得到积分方程的化简形式呢？显然不能，因为如果令哥路别夫方程中的 $k=0$ ，意味着粘性力项不起作用，这与边界层的基本特征是相矛盾的。因此我们需要从原始的关系中推导得出粘性力项的表达式。

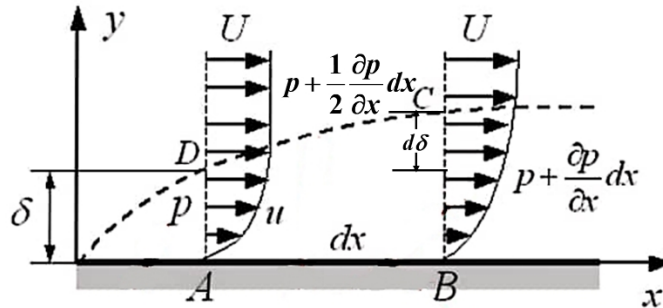
在原始的积分方程中令 $k=0$ ，则粘性力项为

$$\nu \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \nu \int_0^{\delta(x)} d \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^{\delta(x)} = -\nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 = -\frac{\tau_0}{\rho} \quad (\tau_0 \text{ 表示壁面切应力})$$

将该项替代 $-\nu k \int_0^{\delta(x)} u^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$ 项，可以得到的卡门-波尔豪森动量积分关系式

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u dy = -\frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\rho}$$

下面来理解一下动量积分方程的物理意义。



如上图所示，沿边界层的任一截面 x 处，取长度为 dx 的微元(单位宽度)为控制体，控制面为 S_{ABCD} ， $\widehat{CD}$ 为边界层外缘。下面我们对此控制体应用动量定理，即沿 x 方向单位时间流出控制体的动量 K_{BC} 减去流入的动量 K_{AD} 和 K_{CD} ，等于作用于控制面上的外力沿 x 方向的分量 $\sum F_x$ ，即

$$K_{BC} - K_{AD} - K_{CD} = \sum F_x$$

单位时间内经 S_{AD} 流入控制体的质量和动量分别为

$$m_{AD} = \int_0^{\delta(x)} \rho u dy, K_{AD} = \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy$$

单位时间内经 S_{BC} 流出控制体的质量和动量分别为

$$m_{BC} = \int_0^{\delta(x)} \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy = \int_0^{\delta(x)} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) dx \quad (u = u(y))$$

$$K_{BC} = \int_0^{\delta(x)} \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 dy = \int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta(x)} \rho u^2 dy \right) dx \quad (\text{忽略二阶小量})$$

对于不可压缩流体, 根据质量守恒, 必有 $m_{BC} = m_{AD} + m_{CD}$, 所以单位时间内从 S_{CD} 流入的质量即动量可表示为 $m_{CD} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) dx$, 又因为外边缘的流速为来流速度 U , 所以动量表示为 $K_{CD} = U \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{\delta(x)} \rho u dy \right) dx$ 。

而四个面的受力可以表示为

$$F_{AD} = p\delta, F_{AB} = -\tau_0 dx$$

$$F_{BC} = - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) (\delta + d\delta) = -p\delta - \delta \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$F_{CD} = \frac{1}{2} \left(p + p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) d\delta \sim 0$$

将有关表达式代入即可以得到动量积分关系。它的物理意义为: **在定常情形下, 流出所论区域边界的动量流率等于作用在区域内流体上一切力的合力**。需要说明的是, δ 本身为一个微量, 所以含有 $d\delta$ 的项可以忽略, 此外还要注意的, BC, AD 面上的压强是均匀的, 但是 CD 面上不是。通过 Prandtl 边界层微分方程可知, 在法向上压强是连续的, 从而 CD 面的力来源主要是水平压强梯度力所致, 因为 dx 很小, 所以可以用 BC 和 AD 面的平均压强来表示, 而 CD 面在水平方向的有效面积为 $d\delta$ 。

再来观察动量积分方程 $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u dy = -\frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\rho}$, 因为积分上

限 δ 仅是 x 的函数, 所以 $\frac{\partial}{\partial x}$ 可以写为 $\frac{d}{dx}$ 。在边界层以外, 有关系式 $U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$

(见前面推导微分方程精确解的过程), 所以动量积分方程可改写为

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} u dy = U \frac{dU}{dx} \delta - \frac{\tau_0}{\rho}$$

又 $U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} u dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} (Uu) dy - \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta(x)} u dy$, $\delta = \int_0^{\delta(x)} dy$, 将它们代入上式有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} u^2 dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} (Uu) dy &= U \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta(x)} dy - \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta(x)} u dy - \frac{\tau_0}{\rho} \\ \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} (u^2 - Uu) dy &= \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta(x)} (U - u) dy - \frac{\tau_0}{\rho} \\ \frac{d}{dx} \left[U^2 \int_0^{\delta(x)} \frac{u}{U} \left(\frac{u}{U} - 1 \right) dy \right] &= U \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy - \frac{\tau_0}{\rho}\end{aligned}$$

根据边界层排挤厚度 δ^* 和动量损失厚度 $\theta(\delta^{**})$ 的定义，动量积分方程的另一种简洁的方式可以写为：

$$\frac{d(U^2 \theta)}{dx} + U \frac{dU}{dx} \delta^* = \frac{\tau_0}{\rho}$$

实际应用时采用无因次形式更为方便，因此将上式两边同除以 U^2 ，并引进速度

剖面的形状因子 $H = \frac{\delta^*}{\theta}$ ，上式可以继续写为

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} (2 + H) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}$$

上述即为 Karman 动量积分方程的另一种形式，它是一个一阶常微分方程。由于在推导过程中对边界层的流动性质未加限制，因此它既适合于层流边界层也适合于湍流边界层。计算曲面边界层时，上式较为方便。

9. 列宾森能量积分关系式

令哥路别夫积分方程中的 $k=1$ ，可以得到列宾森能量积分方程

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u^2 dy - \frac{\rho U^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u dy = - \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\delta(x)} u dy - \mu \int_0^{\delta(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

其中 $\mu \int_0^{\delta(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \int_0^{\delta(x)} \tau_0 du$ ，其推导的思想与 Karman 动量积分方程的推导是一致的，这里不再做过多的赘述。

10. 附加边界条件

无论是哥式积分、卡式积分还是列式积分方程，都有两位未知量： $u(y), \delta(x)$

($U(x), p(x)$ 可以由边界层外部已知的势流情况计算得出), 如果给出 $u = u(y)$ 的表达式, 那么可以回代到积分方程中, 从而求出 $\delta(x)$ 的表达式。常用的方法为设边界层速度分布满足如下规律

$$\frac{u}{U} = f(\eta) = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

然后采用待定系数的方法求解边界层速度分布, 即 $\frac{u}{U} = \sum_{i=0}^n a_i \eta^i$, 不同的 n 对应不同的速度分布, 需要的边界条件也不一样。

壁面粘附条件为($u = v = 0$ 代入边界层微分方程)

$$y = 0, u = 0, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{U}{\nu} \frac{dU}{dx} \left(\text{对平板层流、均匀来流 } \frac{dp}{dx} = 0 \right)$$

边界层外缘渐进条件为(保证外缘处速度剖面与势流速度 U 的光滑衔接)

$$y = \delta, u = U(x), \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dots = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0$$

对方程 $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ 两边对 y 求偏导数有

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

结合连续方程与 $u = v = 0$ 还可以得到边界条件 $y = 0, u = 0, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$ 。有了这些边界

条件以后, 可以根据需要选择以解出 $\frac{u}{U} = \sum_{i=0}^n a_i \eta^i$ 中的系数, 下面给出几种常见的

的速度分布情况。

$$(1) \frac{u}{U} = a_0 + a_1 \eta$$

$$B.C. \begin{cases} y = 0, u = 0 \\ y = \delta, u = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{u}{U} = \eta$$

$$(2) \frac{u}{U} = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2$$

$$B.C. \begin{cases} y=0, u=0 \\ y=\delta, u=U, \frac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=2 \\ a_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{u}{U} = 2\eta - \eta^2$$

$$(3) \frac{u}{U} = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3$$

$$B.C. \begin{cases} y=0, u=0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ y=\delta, u=U, \frac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=0 \\ a_1=3/2 \\ a_2=0 \\ a_3=-1/2 \end{cases} \Rightarrow \frac{u}{U} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$$

$$(4) \frac{u}{U} = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4$$

$$B.C. \begin{cases} y=0, u=0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ y=\delta, u=U, \frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0=a_2=0 \\ a_1=2 \\ a_3=-2 \\ a_4=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{u}{U} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$$

$$(5) \frac{u}{U} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$$

在知道了速度分布以后，就可以求出边界层的厚度，以 $\frac{u}{U} = 2\eta - \eta^2$ 为例，回代动量积分方程有（在均匀来流的平板边界层有 $U = \text{const} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ）：

$$\frac{d}{dx} U^2 \int_0^{\delta(x)} (2\eta - \eta^2)^2 dy - U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} (2\eta - \eta^2) dy = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

因为 $\int_0^{\delta(x)} (2\eta - \eta^2)^2 dy = \frac{8}{15}\delta$, $\int_0^{\delta(x)} (2\eta - \eta^2) dy = \frac{2}{3}\delta$, $-\frac{\tau_0}{\rho} = -\nu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = -2\frac{U}{\delta}\nu$ ，代入

$$\frac{8}{15}U^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{2}{3}U^2 \frac{d\delta}{dx} = -2\nu \frac{U}{\delta} \Leftrightarrow \delta \frac{d\delta}{dx} = 15 \frac{\nu}{U}$$

解得 $\delta^2 = \frac{30\nu}{U}x + c$ ，因为 $x=0, \delta=0$ ，所以 $c=0$ ，从而 $\frac{\delta}{x}\sqrt{\text{Re}_x} = \sqrt{30} \approx 5.48$ ，根据

边界层位移厚度和动量损失厚度定义有

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^{\delta} \left[1 - \frac{2y}{\delta} + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] dy = \frac{\delta}{3}$$

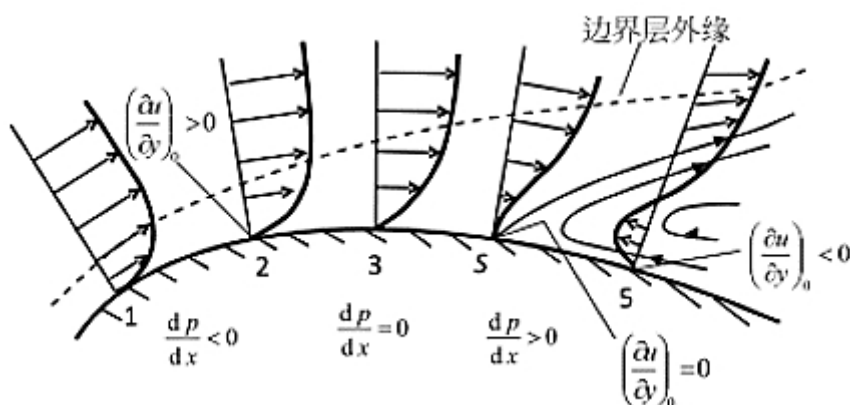
$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^{\delta} \left[\frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \left[1 - \frac{2y}{\delta} + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] dy = \frac{2\delta}{15}$$

平板层流边界层的结果比较 ($\eta = \frac{y}{\delta}$, $\text{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$, $\text{Re}_L = \frac{UL}{\nu}$)

$\frac{u}{U} = f(\eta)$	$\frac{\delta\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\theta}{\delta}$	$\frac{\delta^*}{\delta}$	$C_f\sqrt{\text{Re}_x}$	$C_{fL}\sqrt{\text{Re}_L}$
η	3.46	1/6	1/2	0.578	1.155
$2\eta - \eta^2$	5.48	2/15	1/3	0.730	1.460
$\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	4.64	39/280	3/8	0.646	1.292
$2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	5.83	37/315	3/10	0.686	1.372
$\sin(\frac{\pi}{2}\eta)$	4.79	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	0.654	1.310
Blasius 精确解	4.92	0.133	0.344	0.664	1.328
Nikuradse 实验	5.64				1.315, 1.319

▲ 平板层流边界层不同流速分布的结果比较

11. 边界层流动的分离、脱体以及控制



▲ 边界层内流动示意图

我们知道，边界层内的流动，其动力过程是由惯性力、压力梯度和粘性力之间的相对平衡所决定，其中粘性力总是对流动起阻滞作用，使流动减速。边界层内压力梯度的方向则决定于层外主流的情况。

当在顺压梯度($\frac{dp}{dx} < 0$, 上图中 1~2~3)作用下时,它可使边界层内流动加速,增加边界层内流体质点的动能,从而保证层内流体质点有足够的动能克服粘性摩擦,能顺利地到达压力最小($\frac{dp}{dx} = 0$) 点 3 流向下游。之后,当在逆压梯度($\frac{dp}{dx} > 0$) 作用下(图中 3~4~5),层内流体质点受到“逆压”和“粘性”两方面

的阻滞，使动能迅速损失，就会在某处耗尽所有动能而滞止下来，流体便堆积在那里。又由于愈靠近物面，流速愈小，剪应力愈大，所以这种情形总是在物面附近 S 点首先发生。一旦这种情形发生，下游流体便在“逆压”梯度作用下发生倒流。堆积和倒流的结果是回流流体把从上游来的流体“挤”出物面，使边界层内流体脱体。这种现象称为边界层分离， S 点称为分离点， S 点后称为分离区。

[总结]发生边界层分离的两个必要条件(缺一不可):

①存在逆压梯度区；②壁面及粘性对流动的阻滞。

边界层的分离常常给工程上带来很大危害。例如：若机翼的上表面分离区过大，将造成升力剧减(失速)，阻力剧增；螺旋桨桨叶随边的分离将导致谐鸣现象；船尾部的分离将使船尾流场更为混乱，使后部螺旋桨的工作条件变坏，从而导致桨的效率降低、发生空泡、振动等；叶轮机械或增压器发生分离，不仅带来大的机械能损失，更严重的会引起剧烈的喘振和旋转失速，甚至造成结构破坏。因此，控制边界层分离对于增升、减阻和减振等都很有实用价值。控制边界层分离的方法有很多，但不外乎下述两大类：**(1) 改变物面形状；(2) 增加边界层内流体的动量。**

参考资料

- [1] [流体力学第 9 章 边界层理论](#)
- [2] [流体力学第 11 章 边界层理论](#)
- [3] [流体力学-边界层理论](#)
- [4] [流体力学—第六讲 边界层理论](#)
- [6] [Skin-Friction Coefficient - an overview | ScienceDirect Topics](#)
- [7] [流体力学第六章](#)

第二部分 湍流

1. 什么是湍流？

到目前为止，湍流没有定义，只有一些描述。

- (1) **随机性**。湍流是非规则的、混乱的、不可预测的；
- (2) **非线性**。湍流是高度非线性的。当流动达到某一特定状态，例如雷诺数或理查森(Richardson)数超过某临界值，流动中的小扰动就会自发地增长，并很快达到一定的扰动幅度；
- (3) **扩散性**。湍流会引起动量、热量及流动中的其他物质快速扩散；
- (4) **涡旋性**。可以观察到湍流的涡旋结构；
- (5) **耗散性**。湍流的能量是由大湍涡向小湍涡传递，最后通过分子粘性耗散成为热能。

2. 雷诺平均法则

平均值的运算法则。设有两个物理量： $a = \bar{a} + a', b = \bar{b} + b'$

$$\overline{\bar{a}} = \bar{a}, \overline{a'} = 0;$$

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b};$$

$$\overline{ab} = \overline{(\bar{a} + a')(\bar{b} + b')} = \overline{\bar{a}\bar{b} + a'\bar{b} + \bar{a}b' + a'b'} = \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'}$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial l^2}$$

3. 雷诺应力的导出

对于一个流动，Boussinesq 近似下的张量形式的运动方程为

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2}$$

上式中 δ_{ij} 叫做**克罗内克(Kronecker)函数**，在线性代数中，又称为**克罗内克张量**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

每一个物理量可以看成是平均量与脉动量的和，所以

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i, \tilde{p} = P + p, \tilde{\rho} = \rho_0 + \rho'$$

将它们代入张量方程中并求平均，根据雷诺平均法则有化简得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - g \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \\ \overline{\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} &= \overline{(U_j + u_j) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j}} = \overline{U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} \\ [注] (1) \quad &= U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} \end{aligned}$$

，需要注意

的是两个脉动量乘积的平均不一定等于平均脉动量的乘积，上面推导过程中

$$u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \text{ 是应为用到了流体不可压缩的假设，因此 } \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(2) Boussinesq 近似是指在与重力相联系的项中保留扰动密度(ρ'), 而在其他项中略去扰动密度的影响。我们来推导一下与重力相联系的项是如何得出与扰动密度相联系的项的。因为 $\tilde{\rho} = \rho_0 + \rho'$, 所以对 $\frac{1}{\rho_0 + \rho'}$ 进行一阶 Taylor 级数展开有

$$\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} \right)$$

又假设在垂向上满足静力平衡: $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} = -g$, 那么对于垂向上有

$$-\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial (P + p)}{\partial z} - g \approx -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) - g \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\tilde{p} - P)}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) g$$

经过平均的动量方程比原来多了一项 $-\frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j}$, 这一项称为雷诺应力散度

项。方程中 $\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{dU_i}{dt}$, 在流体力学中有本构方程(矩阵形式)

$$\mathbf{P} = 2\mu \mathbf{A} + \left(-p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{I}$$

由于我们的动量方程是针对不可压缩流体，所以 $\mathbf{P} = 2\mu\mathbf{A} - p\mathbf{I}$ ，第一项为分子粘

性应力项，写成张量的形式即为 $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ ，它与 $\nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}$ 等价，所以

上述的方程可以简写为

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - g\delta_{i3}, \bar{\tau}_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho_0 \overline{u_i u_j} \text{ (平均应力)}$$

[注] 对本构方程的小注释

$\mathbf{P}$ 矩阵为粘性力应力矩阵， $\mathbf{A}$ 矩阵为应变率矩阵， $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

其中 $\mathbf{A}$ 矩阵的每一列代表 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 方向的分量。不妨验证一下，以 $\mathbf{i}$ 方向为例：

$$2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \Leftrightarrow \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right)$$

那么为什么 $\nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}$ 与 $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ 是等价的呢？对于均质不可压流体

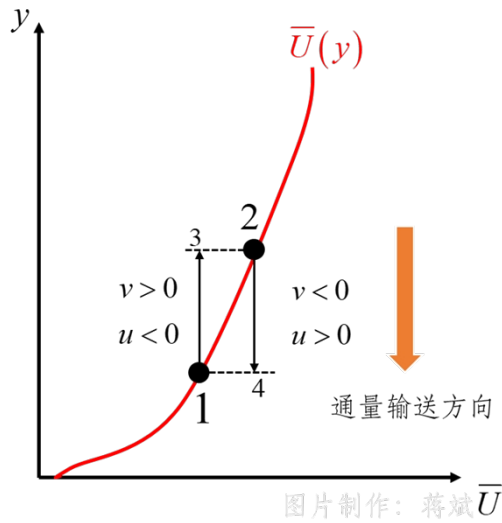
$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (2\mu\mathbf{A})}{\partial x_j} &= 2\nu \text{div} \mathbf{A} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \nu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

(每固定一个 i 值， j 的所有值都要取完)

$-\rho_0 \overline{u_i u_j}$ 表示沿 x_j 轴单位时间通过单位面积上的动量，其分量形式如下

$$-\rho_0 \begin{bmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{vu} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{wu} & \overline{wv} & \overline{w^2} \end{bmatrix}$$

它是一个为二阶对称张量，对角线上的三个分量称为正交张量，非对角线上的称为切变张量，它具有单位面积上力的量纲，又称为湍流切应力(雷诺应力)。如果端流是各向同性的，则切变张量皆为零。我们通过一个简单的物理图像来进一步了解雷诺应力的物理现实。



如左图所示为 $\bar{U}$ 在 y 方向上的廓线图，显然质点 1 的平均速度要比质点 2 小。此时如果在 y 方向上产生了一个 $v > 0$ 的湍流脉动，即把下层速度小的微团带到了 3 处，那么此时 3 相对于 2 而言相当于在水平方向上产生了一个 $u < 0$ 的湍流脉动；如果在 y 方向上产生了一个 $v < 0$ 的湍流脉动，即把上层速度大的微团带到了 4 处，

那么此时 4 相对于 1 而言相当于在水平方向上产生了一个 $u > 0$ 的湍流脉动。但是无论是上升还是下沉的湍流脉动，都将产生一个负的通量 $\overline{vu} < 0$ 。

4. 湍流动能(Turbulent Kinetic Energy, TKE)方程

已知动量方程的雷诺平均形式为

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - g \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial^2 x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \quad (①)$$

将雷诺平均关系代入原始动量方程有

$$\frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (P + p)}{\partial x_i} - g \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2}{\partial^2 x_j} (U_i + u_i) \quad (②)$$

②-①式(即总的减去平均的得到脉动部分)可以得到湍流的预报方程如下：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g \frac{\rho'}{\rho_0} \delta_{i3} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \quad (③)$$

③式两边同时乘以 u_i 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) + u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{2u_i}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i g \frac{\rho'}{\rho_0} \delta_{i3} + u_i \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \quad (④)$$

对④式求雷诺平均，下面对各项的雷诺平均写出具体推到过程。

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \overline{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_i^2}{2} \right)} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{u_i^2}}{2} \right), \quad \overline{U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i^2}{2} \right)} = U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{u_i^2}}{2} \right), \quad \overline{u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ \bullet \quad & \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} u_i^2 u_j \right)} - \frac{1}{2} \overline{u_i^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} \stackrel{\text{连续方程}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i^2 u_j} \right) \\ \bullet \quad & \overline{-\frac{u_i}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho_0} \overline{\frac{\partial (p u_i)}{\partial x_i}} - p \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \overline{p u_i}}{\partial x_i}, \quad \overline{-u_i g \frac{\rho'}{\rho_0} \delta_{i3}} = -\frac{g}{\rho_0} \delta_{i3} \overline{u_i \rho'} \\ \bullet \quad & \overline{u_i \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j}} = 2\nu \overline{u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

令 $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ，容易证明 e_{ij} 是一个对称的矩阵(其结构可以去查看前面提

到的应变率矩阵 $\mathbf{A}$)，且有 $e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ，所以可以得到

$$\begin{cases} e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + e_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 2e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + e_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = e_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij} e_{ij} \end{cases} \Rightarrow e_{ij} e_{ij} = 2e_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\text{于是 } \overline{u_i \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 x_j}} = 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial \overline{u_i e_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{\nu e_{ij} e_{ij}}$$

综上，湍流的平均动能方程可以表示如下：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{u_i^2}}{2} \right) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho_0} \overline{p u_i} + \frac{1}{2} \overline{u_i^2 u_j} - \nu \overline{u_i e_{ij}} \right)}_{(1)} \underbrace{- \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{(2)} \underbrace{- \frac{g}{\rho_0} \overline{u_i \rho'}}_{(3)} \underbrace{- \frac{1}{2} \overline{\nu e_{ij} e_{ij}}}_{(4)}$$

对方程各项的物理理解

(1) 第一项代表湍流的空间输运，前两个代表湍流本身的空间输运，第三个代表粘性的输运；

(2) 第二项表示平均剪切生成项(Shear Production)。表示平均动能的损失和湍流动能的获得，也代表雷诺应力与平均切变相互作用产生湍流动能的速率。

(3) 第三项代表浮力做功(Buoyant production)对湍流动能的作用。 $g \frac{\rho'}{\rho_0}$ 表示浮

力，乘以 w' 表示湍流微团单位时间内浮力做功对湍流动能的贡献， $\overline{w'\rho'}$ 为负值时则表示克服负浮力使湍流动能减弱。

(4) 第四项代表粘性耗散项(Viscous Dissipation)。通常用符号 ε 表示，

如果考虑稳态湍流，且对于选定的控制体，那么湍流的动能方程可以改写为

$$P + B - \varepsilon = 0 \quad (\text{与湍流动能方程后三项依次对应})$$

对于表层的海水，在一天之中温度变化比较大，因此对流比较旺盛，即浮力做功项其主要作用，所以对于表层海水有 $B - \varepsilon = 0$ ；对于深层海水，剪切比较旺盛，有 $P - \varepsilon = 0$ 。

5. 涡动扩散系数与湍流稳态判据

定义通量理查森(Richardson)数 $Rf = -\frac{\text{浮力做功}}{\text{切应力做功}} = -\frac{\frac{g}{\rho_0} \overline{w\rho'}}{\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}$ ，对浮力做功

项进行参数化处理： $-\frac{g}{\rho_0} \overline{w\rho'} = \frac{g}{\rho_0} K_\rho \frac{\partial \rho_0}{\partial z}$ ，那么根据 $-\frac{g}{\rho_0} \overline{w\rho'} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon = 0$ ，

有(Osborn, 1980)

$$-\frac{g}{\rho_0} \overline{w\rho'} + \frac{1}{Rf} \frac{g}{\rho_0} \overline{w\rho'} - \varepsilon = 0 \Leftrightarrow -K_\rho \left(\frac{1}{Rf} - 1 \right) \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \varepsilon \Leftrightarrow K_\rho = \frac{Rf}{1 - Rf} \frac{\varepsilon}{N^2}$$

称 $\Gamma = \frac{Rf}{1 - Rf}$ 为混合效率(Mixing Efficiency)(有的学者认为应该叫做耗散通量系

数, Dissipation Flux Coefficient)。 Rf 的临界值为 0.18-0.2，取 $Rf_c = 0.15$ ，有

$$K_\rho \leq \frac{0.15}{0.85} \frac{\varepsilon}{N^2} = 0.176 \frac{\varepsilon}{N^2} < 0.2 \frac{\varepsilon}{N^2}$$

6. 混合长理论(Mixing Length Theory)

雷诺平均方程组和基本方程组的基本形态相同,但雷诺平均方程组中多了一些湍流项。方程的数目没有增加,却增加了未知的变量,这就意味着雷诺平均方程组是不闭合的。为了求解,必须将湍流项用其他平均量表示出来,这称为湍流参数化方法,或称闭合问题。这是湍流理论和应用研究中的难题。

普朗特(Prandtl)和卡曼(Von Karman)发展了半经验的混合长理论。它的基本出发点就是假设湍流动量交换和分子粘性引起的动量交换在形式上是相似的。在分子运动论中,分子粘性切应力为

$$\frac{\tau'}{\rho} = \nu \frac{dU}{dz}$$

其中分子粘性系数 $\nu \sim \bar{u}l$, $\bar{u}$ 为分子运动的均方速率, l 为分子的平均自由程。以类似的考虑,在湍流运动中,取

$$\frac{\tau}{\rho} = K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$\tau = -\rho \overline{uw}$ 称为雷诺应力,代表因脉动速度引起的垂向动量输送; K_m 为湍流粘性系数,或湍流动量交换系数、涡动扩散系数,于是有 $-\overline{uw} = K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, 若 K_m 不

随高度变化,则湍流摩擦力项或湍流粘性力项为 $-\frac{\partial}{\partial z}(\overline{uw}) = K_m \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$ 。根据混合长

理论,有 $K_m \sim V l_m$, 其中 V 为湍流脉动速度的典型尺度, l_m 为混合长,即把 l_m 设想成一距离,在此距离内湍涡保持其原有特征,而一旦超过此距离,湍涡完全和周围流体混合.或者可以把 l_m 设想成代表湍涡的长度尺度。

[边界层对数定律]

靠近壁面的流动中，其脉动速度尺度可以用摩擦速度 u_* 来表示，于是

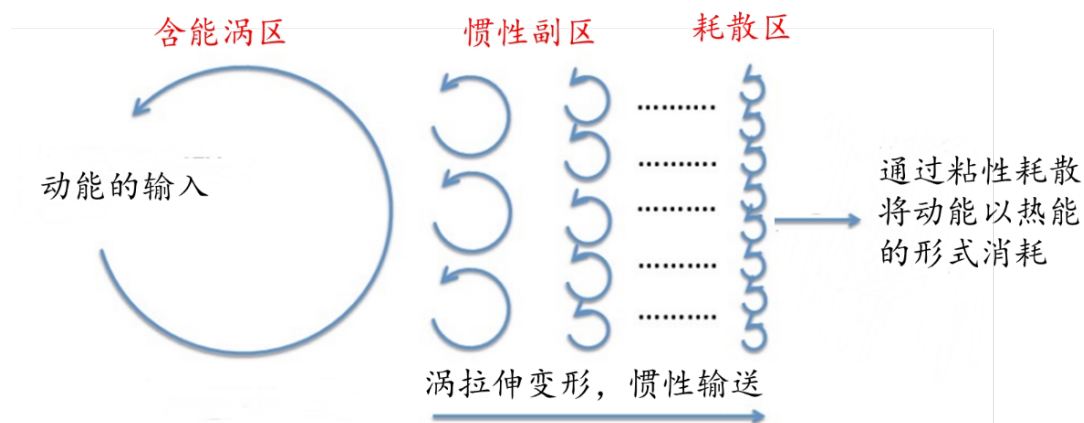
$\frac{\tau}{\rho} = -\overline{u'w'} = u_*^2$ ，显然 u_*^2 具有湍流应力的性质。一般随高度而变化。根据混合长

理论，有 $u_*^2 = K_m \frac{d\bar{u}}{dz}$, $K_m \sim u_* l_m$ ，考虑到流体微团越靠近壁面越受壁面制约，混合长应与离壁面高度 z 成正比，即 $l_m \sim \kappa z$ ，其中 κ 称为冯卡曼常数，一般取值为

0.41，代入上式，可以得到对数定律： $\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln z + \text{const}$

7. 湍流的能量串级

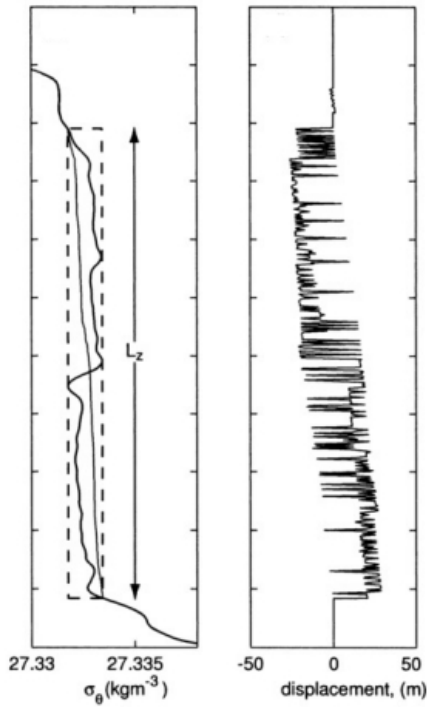
湍流是由相差很大的、各种不同尺度的湍涡所组成。最大尺度的湍涡区的能量直接来自于平均流场的雷诺应力做功以及边界层中的浮力做功。大湍涡从外界获取的能量逐级传递给次级的湍涡，最后在最小尺度的湍涡上被耗散掉，所谓湍流动能耗散，即指在分子粘性作用下湍流动能转化为内能的过程。



(1) 几个重要的尺度参数

① 奥兹米多夫尺度(Ozmidov scale)

含能最大的涡的尺度，定义为：



$$L_o = \left(\frac{\varepsilon}{N^3} \right)^{\frac{1}{2}}。 研究发现 Ozmidov 尺度被发$$

Thorpe 尺度 L_T 成正比 ($L_o = C_1 L_T$)，后者是指在分层海洋中湍流运动的作用下，密度更大、质量更重的水越过较轻的水的位移的均方根。

如左图，第一幅表示位势密度随深度的变化，每个密度对应一个深度，深度序列记为 z_0 ，现将密度按从小到大排序，对应的深度也进行排序(与原始深度序列不同)，得到新的深度序列 z_s ，于是可以得到 Thorpe 尺度的表达式为

$$L_T = \left[\overline{(z_0 - z_s)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

② 科尔莫戈罗夫尺度(Kolmogorov scale)

表示最小耗散涡的尺度，它受到耗散速率 ε 和黏度 ν 的限制，定义为

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}$$

其中 ν, η 是两个相互独立的参数，在海洋与大气中， η 的数量级在 mm

③ 莫宁-奥布霍夫尺度(Monin-Obukhov scale)

$$\text{定义式为 } L_{MO} = \frac{u_*^3}{\kappa \frac{g}{\rho_0} \overline{w' \rho'}}, \quad u_* \text{ 表示摩擦速度, } \kappa \text{ 为冯卡曼常数}(0.41) \text{ 它反映}$$

了雷诺应力做功和浮力做功的相对大小。在 L_{MO} 高度在这个高度上，湍流动能产生的浮力等于风的剪切作用产生的浮力。大于 L_{MO} ，动力过程起作用；小于 L_{MO} ，热力过程起作用。

(2) 科尔莫戈罗夫相似律

在串级传输的过程中, 小尺度的湍涡达到某种统计平衡状态, 并且不再依赖于产生湍流的外部条件, 此时从而形成所谓的局地均匀各向同性湍流。

① 第一相似律

在雷诺数足够大时, 存在一个高波数区(高频率区), 其中的湍流处于统计平衡状态, 其湍流特征仅由湍能耗散率 ε 和分子粘性系数 ν 决定。

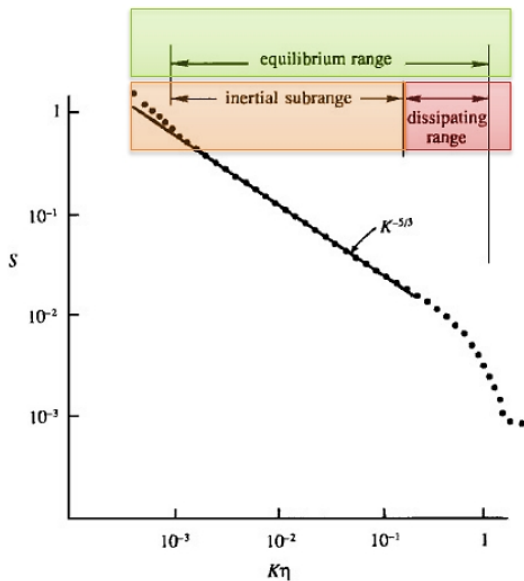
② 第二相似律

在雷诺数非常大时, 在上述局地均匀各向同性区域内还存在一个仅由参数 ε 确定的子区域, 其尺度 l 满足 $L_0 \leq l \leq \eta$, 称作惯性子区。

8. 湍流谱(Turbulent Spectrum)

(1) 湍流能谱(Energy/Velocity Spectrum)

$$E_k = \int_0^\infty S(K, \varepsilon, \nu) dK$$



① 平衡区(Equilibrium Range)

在能量谱上, 将波数满足 $K \gg l^{-1}$ 的区间称为平衡区, 在平衡区中, 通常又可以划分为两个子区间。

② 惯性子区(Inertial Subrange)

波数满足 $l^{-1} \ll K \ll \eta^{-1}$ 的区间称为惯性副区, 在惯性子区里面, 能量通过惯性力, 即涡管的拉伸作用来传递。

③ 耗散区(Dissipating Range)

$K > \eta^{-1}$ 的区域称为耗散区, 位于能谱的高波数段。在该区域, 能量密度 S 急剧下降。

我们着重来看一下惯性子区的一些性质。前面根据 Kolmogorov 第二相似律, 在惯性子区内, 湍流特征与湍流粘性系数无关, 从而

$$S = S(K, \varepsilon)$$

我们假设有关系 $S = A\varepsilon^\alpha K^\beta$, 其中 A 为一个常数。那么可以根据量纲分析来得出

α, β 的值。已知 S 的单位为 m^3/s^2 (这可以由 $\overline{u^2} = \int_0^\infty S(K, \varepsilon, \nu) dK$ 推导得出), 而波数的单位为 m^{-1} , 耗散率 ε 的单位为 m^2/s^3 (湍动能耗散率的单位为 单位时间内流体微元湍动能的变化)。于是

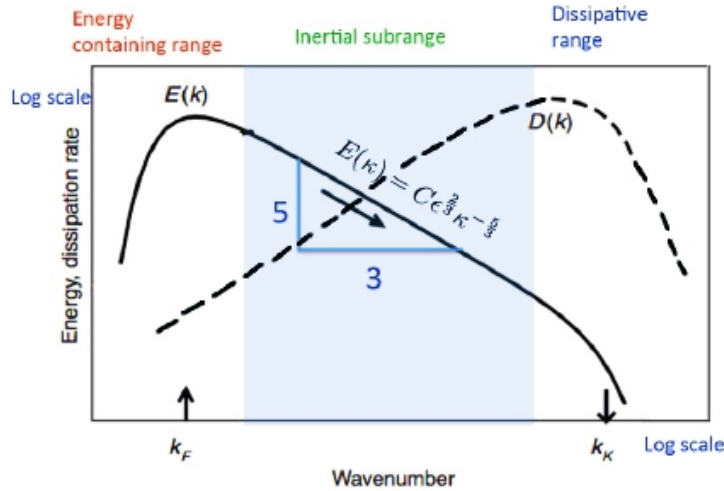
$$\begin{cases} [S] = L^3 T^{-2} \\ [K] = L^{-1}, [\varepsilon] = L^2 T^{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 3 \\ -3\alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

所以 $S = A \varepsilon^{\frac{2}{3}} K^{-\frac{5}{3}}$, 这就是著名的科尔莫戈罗夫 $-\frac{5}{3}$ 次幂定律。一般认为, $A \cong 1.5$

是一个普适常数, 几乎对所有的湍流都适用。

[注] 对于充分发展的湍流, 发生耗散的湍涡尺度会更小一些, 所以对应的惯性子区会更宽。

(2) 耗散谱(Dissipation Spectrum)(速度梯度谱、速度剪切谱)

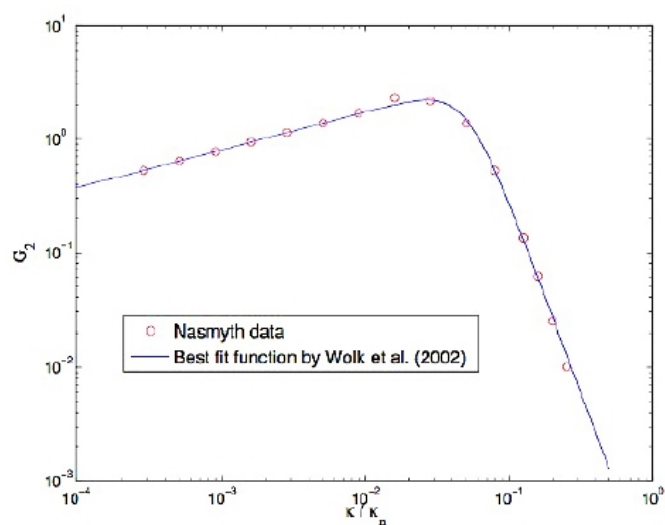


耗散谱与能量谱的关系为 $D(K) = K^2 E(K)$, 根据这一关系, 我们可以得到在惯性子区, 耗散谱的斜率为 $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ 。

(3) Nasmyth 谱

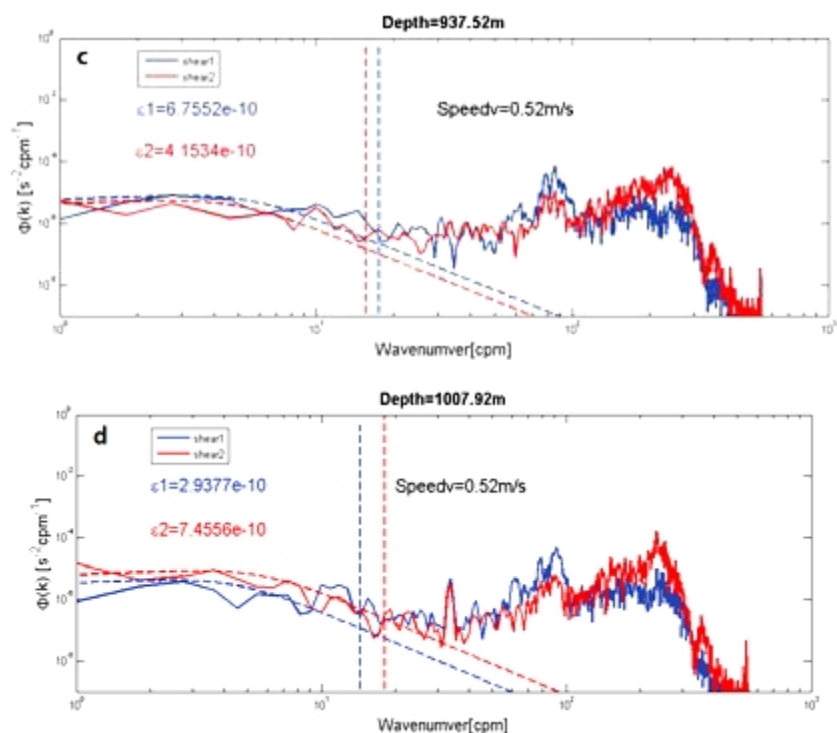
Nasmyth(1970)在温哥华岛西海岸进行了两组深度范围为 0-300 米的拖曳。他确定了在流速脉动较大而温度脉动非常小的近岸水域收集的三段数据。这些片段提供了可用的最干净的频谱, 并被用来构造无量纲速度谱, 现在通常被称为

“Nasmyth 谱”。需要指出的是，Nasmyth 谱并没有理论依据，这仅仅是一个被海洋学团体接受为代表海洋湍流谱形式的仔细测量的数据集。



[Nasmyth 谱的应用]

将实际测得的谱与 Nasmyth 剪切谱、速度谱进行对比



▲ Comparison of the observed shear spectra and the Nasmyth spectrum (dashed line) (Xu, Xiaoyang; Zhang, Shengzong et.al., 2018)

(4) 温度(热)方差谱(Temperature fluctuations spectrum)

温度控制方程为

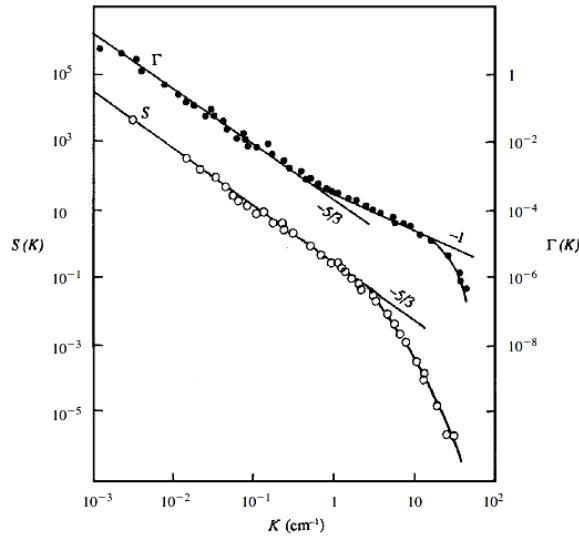
$$\frac{1}{2} \frac{d\overline{T'^2}}{dt} = -\overline{wT'} \frac{d\overline{T}}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \overline{T'^2 w} - D_T \frac{d\overline{T'^2}}{dz} \right) - \varepsilon_T$$

上式中 $\varepsilon_T = D_T \overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)^2}$ 称为热方差耗散率，类似于湍动能耗散率

温度谱可以定义为

$$\overline{T'^2} = \int_0^\infty \Gamma(K, \varepsilon, \varepsilon_T) dK \quad (l^{-1} \ll K \ll \eta^{-1})$$

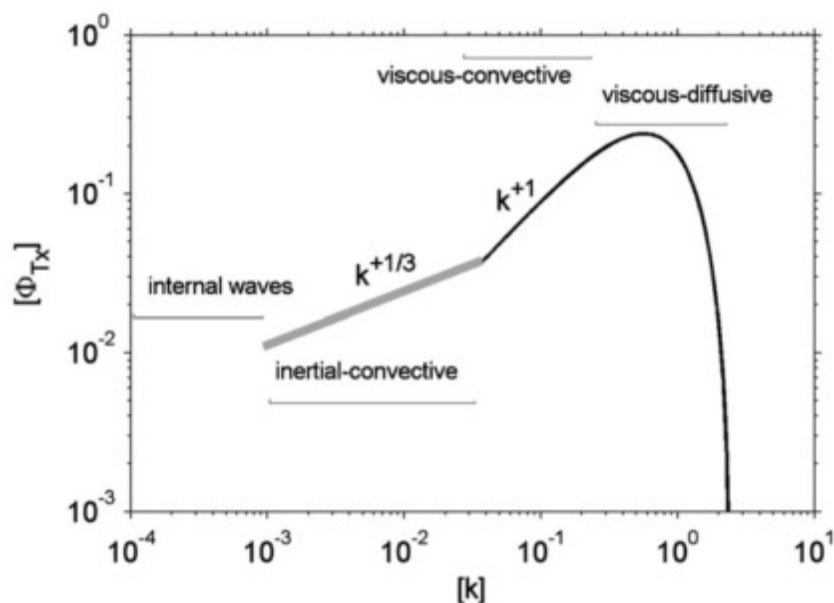
通过量纲分析同样有 $\Gamma \propto \varepsilon_T \varepsilon^{-\frac{1}{3}} K^{-\frac{5}{3}} (l^{-1} \ll K \ll \eta^{-1})$ ，即温度谱也满足科尔莫戈罗夫 $-\frac{5}{3}$ 次幂定律。温度谱也有与能量谱不一样的地方。温度谱中，在波数满足 $\eta^{-1} \ll K \ll \eta_r^{-1}$ 的区间内，由于湍流的尺度不是足够的小，所以热盐扩散作用不能完全抵消温度的脉动作用，这一区间称为**粘性对流子区(Viscous Convective Subrange)**(即粘性力起支配作用)，在这个区间内，斜率满为-1 次幂。



[注]温度谱的内容可以参考 Obukhov 在 1949 年发表的文章 *Temperature field structure in a turbulent flow*(笔者利用互联网没有搞到，感兴趣可以询问老师要)

(5) 温度梯度谱(Batchelor Spectrum, Temperature Gradient Spectrum)

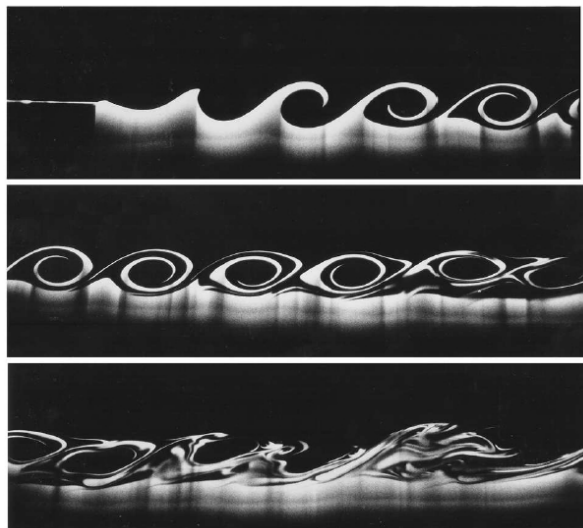
温度梯度谱具有解析解，表达式可以写出来



9. 湍流不稳定产生的两种机制

(1) 剪切不稳定(Shear Instability)

对于一个稳定的剪切流动，在它们交界面处的某一位置产生波动，这一波动继续发展，就会产生上下翻转，这种翻转不会稳定存在，它们会迅速破碎，产生湍流，促进两层流体的混合，以减小上下层流体的差异。这种剪切不稳定又叫开尔文-亥姆霍兹(Kelvin-Helmholtz, K-H)不稳定。

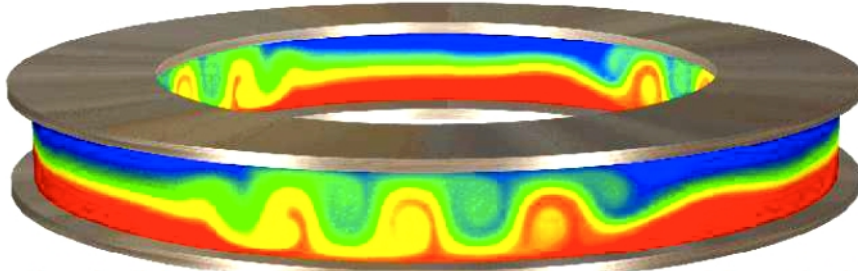


K-H 不稳定的判据为梯度理查森数，即 $Ri = \frac{N^2}{u_z^2}$ 。Taylor-Goldstein 公式表

明，在某一流动任何 $Ri > \frac{1}{4}$ 的地方，层状剪切流是稳定的，但是这并不意味着

$Ri < \frac{1}{4}$ 的地方就代表流动不稳定。但是海洋与大气的实验数据表明, $Ri < \frac{1}{4}$ 可以较好预报不稳定的发生。

(2) 瑞利-贝纳尔不稳定(Rayleigh Benard Instability)



1906 年法国学者 Benard 进行的较详细的基础实验证明, 只有当温度增加到一定程度时, 受热部分才会从各处上升, 而它们的周围则会下降。继之, 就会出现无数规则的正六边形, 温度增高的部分会在六角形中心上升, 而冷却部分沿六角形边缘下降。这就是所谓的 Benard 蜂巢。

1916 年瑞利发表了新的研究成果表明: 只有下部加热速度大到不能被热传导向外充分排出时, 才能形成对流。决定一个静力不稳定系统能否发生对流的判据为瑞利数 $Ra = \frac{g\alpha\Delta Td^3}{\nu\kappa_T}$ 。 d 为流质层的厚度, α 为热膨胀系数, ν 为粘性系数,

κ_T 为热扩散率。当 $Ra > critical\ number$ 时, 对流才能发生, 这与边界条件有关。

对于无滑移边界条件, $Ra_c \approx 1700$ 。

[1] [边界层气象学课件: CH03_3 方程简化及雷诺平均方程组](#)

[2] [chapter7.3-湍流能量方程](#)

[3] [粘性流体力学: 场论与张量基本运算知识](#)

[4] [雷诺方程和雷诺应力详解](#)

[5] [第 6 章 湍流与湍流理论](#)

[6] [考虑真实能量来源的大洋垂直湍流混合系数气候数据集](#)

[7] [Osborn T R.1980. Estimates of the local rate of vertical diffusion from dissipation measurements. J Phys Oceanogr](#)

[8] [Relevance of the Thorpe length scale in stably stratified turbulence \(scitation.org\)](#)

[9] [湍流力学课件二](#)

[10] [【力学课件】第八章 湍流](#)

[11] [An untethered free-fall vertical profiler for deep ocean mixing measurements](#)