



物理海洋学

PHYSICAL OCEANOGRAPHY

中国海洋大学 海洋气象学系

蒋斌 编著

(2022 年 7 月)

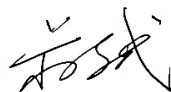
编者的话

期末考试后，我对《物理海洋学》资料进行了完善，还是那句话——我虽然不能编出一本权威的教材，但是我得保证我整理的资料有头有尾、逻辑完整，不然传给后面的学弟学妹们看了也是一头雾水——这恐怕不是我的初衷。在这之前，我也答应了杨庆轩老师，要给他看看我整理的这份资料，所以，对《物理海洋学》资料的完善，一方面是自我的要求，另一方面，也是在兑现承诺。

为我们大气上课的两位年轻老师是荆钊和张正光老师。整个学期下来，两位老师的讲课风格截然不同。荆钊老师的 PPT 上满满的都是公式，多于的文字说明不见“半点踪影”，可谓相当“精简”。不过荆老师会在课上给时间推导 PPT 上的公式和方程，并且还会讲一下推导思路。所以在听荆老师的课时，要跟着一一起推导公式，记好老师的思路，保留好上课的演算笔记，课后再对着 PPT 整理一下。不要妄想着“上课划水，课后再看 PPT 复习”，没有跟着老师的脚步走，看着 PPT 简略的公式只会令人头大。简而言之，荆钊老师的部分公式推导会很多，他布置的作业也是公式推导。

张正光老师的讲课风格与荆钊老师截然不同，他俨然把每一堂课当成了讲座，并且他讲台上讲话犹如相声演员在说相声，我们在听他的课时会觉得比较放松。张老师的课有一个特点：淡化公式的推导，用大家都能接受的一些事实解释一些物理现象(他一直在强调“自己最不擅长公式推导了”，然而他当年在动力气象课堂上的故事人尽皆知)。这就给我整理张老师部分的资料带来了极大的困难。因为我本人比较喜欢通过公式去得出一些结论，像张老师是直接给出结论，这种时候总是想去探究这些结论到底怎么得出来的。当然，并不是所有的结论我深究到底，到底我还是个学大气的，一些海洋方面的专业问题，我也只能点到为止。但是张老师在作业中涉及的知识点，我是竭尽全力要“搞出个完整逻辑来”。

虽然《物理海洋学》对我们大气专业来说只是非必修课，但是，对于知识，多学无害。认真学习一门课程，对自己来说是一种提升。至于究竟学多深，就看个人的“道行”以及学习态度如何了。



2022 年 7 月 6 日

于中国海洋大学 东区宿舍

目录

第一章 海水运动基本方程	3
§1.1 描述海水运动的参考系(坐标系)	3
§1.2 海水的热力学性质	12
§1.3 Boussinesq 近似	16
§*1.4 时间平均的基本方程(非考试重点)	22
§1.5 边界条件	25
§1.6 基本方程的尺度分析和简化	27
§1.7 浅水方程	35
第二章 海流	45
§1.1 地转流	45
§1.2 考虑摩擦的定常流动	47
§1.3 惯性流	53
§1.4 风生大洋环流	54
第三章 表面重力波——海浪	63
第四章 层结与海洋内波	81
第五章 考虑地球旋转的海洋现象	88

《物理海洋学》

整理/19级大气科学 蒋斌

第一章 海水运动基本方程

§ 1.1 描述海水运动的参考系(坐标系)

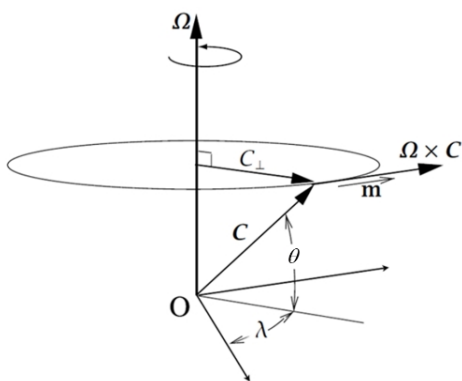
1. 描述海水运动的参考系/坐标系

惯性参考系：满足惯性定律(即牛顿第一定律：任何物体均有保持匀速直线运动或静止状态的性质，直至外力迫使它改变运动状态)的参考系称为**惯性参考系**，将坐标系固定在惯性参考系上，这个坐标系称为**惯性坐标系**。反之，分别称为非惯性参考系、非惯性坐标系。

问：固定在地面上的坐标系称为____，属于____参考系。(旋转坐标系，非惯性)

2. 旋转坐标系下的物理量表示——重点理解推导的思路

(1) 绝对坐标系下的向量旋转变化

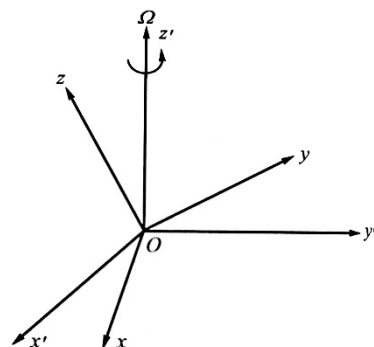


在绝对坐标系下看向量旋转产生的变化率。如左图所示，经过 δt 时间后转过了角度 λ ，有 $\lambda = |\Omega| \delta t$ 。向量终点走过的弧长可以表示为 $|\delta C| = \lambda |C| \cos \theta$ ，于是得到在绝对空间中向量旋转的变化率为：

$$\frac{d_a C}{dt} = \Omega \times C$$

(2) 微分算子 $\frac{d_a}{dt} = \frac{d_r}{dt} + \Omega \times$ 的推导

如左图所示，建立两个坐标系，分别是惯性坐标系 $O' - x'y'z'$ (其中 z' 轴与地轴重合) 和旋转坐标系 $O - xyz$ ，两个坐标系中的三个方向的单位矢量分别为 i', j', k' 和 i, j, k ，那么对于任意矢量 A ，有



$$\mathbf{A} = A'_x \mathbf{i}' + A'_y \mathbf{j}' + A'_z \mathbf{k}' = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

在各自的坐标系下， $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 均与时间无关，有

$$\begin{aligned}\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA'_x}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dA'_y}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dA'_z}{dt} \mathbf{k}' \\ \frac{d_r \mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k}\end{aligned}$$

我们的目标是得到两个坐标系之间的联系。若将向量 $\mathbf{A}$ 在旋转坐标系中的坐标在惯性坐标系下对时间求导，由于 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 在惯性系中观察是在发生旋转的，此时的导数可以写成：

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} \right) + \left(\frac{d_a \mathbf{i}}{dt} A_x + \frac{d_a \mathbf{j}}{dt} A_y + \frac{d_a \mathbf{k}}{dt} A_z \right)$$

第二部分的结果在(1)中已经进行了阐述，直接套用公式即可，从而

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$$

(3) 速度

将位置矢量 $\mathbf{r}$ 代入(2)中的微分算子中，有

$$\frac{d_a \mathbf{r}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

(绝对速度=相对速度+牵连速度)

(4) 加速度

对(3)中的速度关系表达式继续对时间求导，有

$$\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d_a (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d_a \mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d_a \mathbf{r}}{dt} \left(\frac{d_a \boldsymbol{\Omega}}{dt} = 0 \right)$$

$\frac{d_a \mathbf{v}_r}{dt}$ 继续套用(2)中的微分算子化简， $\frac{d_a \mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_a$ ，上式可继续化为：

$$\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d_r \mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d_r \mathbf{v}_r}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ 的化简可以利用矢量三重积公式 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ 进行化简，

也可直接利用右手螺旋法则结合实际进行两次叉乘运算，得到结果为

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\Omega^2 r \cos \varphi \mathbf{e}_r = -\Omega^2 \mathbf{R} (\varphi \text{ 为纬度, } \mathbf{e}_r \text{ 为纬度圈径向的单位矢})$$

而在惯性系中，根据牛顿第二定律，有 $\frac{d_a \mathbf{v}_a}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i$

所以在旋转坐标系中加速度的表达式就可以写为

$$\frac{d_r \mathbf{v}_r}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r + \Omega^2 \mathbf{R}$$

• $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r$ —— 科氏力

- 当质点以一定速度相对于旋转参照系运动时才产生；
- 科氏力的方向始终垂直于角速度和质点的运动方向；
- 科氏力不做功。

• $\Omega^2 \mathbf{R}$ —— 惯性离心力

- 方向垂直地轴，由地轴指向海水微团
- 没有旋度，是有势力，其势函数为： $-\frac{(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})^2}{2}$

科氏力和惯性离心力又称为视示力，他们都是虚拟的力，是由于地球的旋转效应所产生，并不是物体相互之间所产生的力

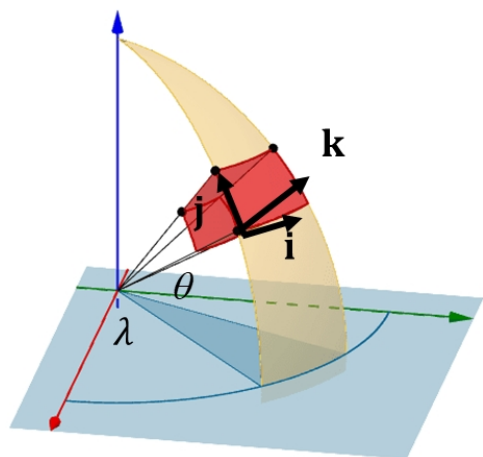
(5) 标量的变化

水体微团的密度、温度、盐度等标量性质是客观存在特征，不随参照系的变化而变化。因此 它们在不同参考系下对时间的微商是不变的： $\frac{d_a f}{dt} = \frac{df}{dt}$

考察 $\nabla \cdot \mathbf{v}_a = \nabla \cdot (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r) = \nabla \cdot \mathbf{v}_r$ ，因此有

$$\frac{d_a f}{dt} + f \nabla \cdot \mathbf{v}_a = \frac{df}{dt} + f \nabla \cdot \mathbf{v}_r \Rightarrow \frac{df}{dt} + f \nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0 \text{ (标量守恒律)}$$

3. 球面坐标系下的向量分析



将在球坐标系下的三个分量表示为 λ, θ, r ，在球面建立旋转坐标系，其上的三个方向的单位矢量为 i, j, k

(1) 梯度的表达式

梯度表示某一标量函数在该点处的方向导数沿着该方向取得最大值。我们在旋转坐标系中在其三个方向上进行推导。假设某一标量函数 $\Phi(\theta, \lambda, r)$

$$i \text{ 方向上: } \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(\theta, \lambda + \delta\lambda, r) - \Phi(\theta, \lambda, r)}{r \cos \theta \delta\lambda} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$$

$$j \text{ 方向上: } \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Phi(\theta + \delta\theta, \lambda, r) - \Phi(\theta, \lambda, r)}{r \delta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

$$k \text{ 方向上: } \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\Phi(\theta, \lambda, r + \delta r) - \Phi(\theta, \lambda, r)}{\delta r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

因此梯度的表达式为:

$$\nabla \Phi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \mathbf{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{k}$$

(2) 散度的表达式

我们利用高斯散度定理: $\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$

推导。仍然在三个分量上进行推导。设 $\mathbf{B} = B_\lambda \mathbf{i} + B_\theta \mathbf{j} + B_r \mathbf{k}$ ，上图中的体积微元的体积为 $\delta V = r \cos \theta \delta\lambda \cdot \delta r \cdot r \delta\theta = r^2 \cos \theta \delta\lambda \delta\theta \delta r$ 。

$$i \text{ 方向上, } \delta S_{\perp i} = r \delta\theta \delta r: \frac{\delta B_\lambda \delta S_{\perp i}}{\delta V} = \frac{\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} \delta\lambda \delta S_{\perp i}}{\delta V} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda}$$

$$j \text{ 方向上, } \delta S_{\perp j} = r \cos \theta \delta\lambda \delta r: \frac{\delta B_\theta \delta S_{\perp j}}{\delta V} = \frac{\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \delta\theta \delta S_{\perp j}}{\delta V} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial (B_\theta \cos \theta)}{\partial \theta}$$

$$k \text{ 方向上, } \delta S_{\perp k} = r^2 \cos \theta \delta \theta \delta \lambda: \frac{\delta B_r \delta S_{\perp k}}{\delta V} = \frac{\frac{\partial B_r}{\partial r} \delta r \delta S_{\perp k}}{\delta V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (B_r r^2)}{\partial r}$$

[注] $\delta B_\lambda = \frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} \delta \lambda$ 可以理解为 B_λ 在 λ 到 $\lambda + \delta \lambda$ 之间的净通量变化。

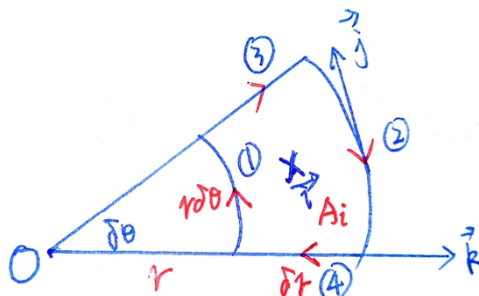
综上, 散度的表达式为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial (B_\theta \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (B_r r^2)}{\partial r}$$

(3) 旋度的表达式

斯托克斯定理: $\int_V \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$

如下图所示, 我们以 i 方向为例, 上述的定理可以写为



$$B_\lambda \delta A_i = \oint_{\textcircled{1}+\textcircled{2}+\textcircled{3}+\textcircled{4}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \quad (\delta A_i = r \delta \theta \delta r)$$

进一步写开为

$$B_\lambda r \delta \theta \delta r = B_\theta r \delta \theta - \left[B_\theta r \delta \theta + \frac{\partial (B_\theta r \delta \theta)}{\partial r} \delta r \right] - B_r \delta r + \left[B_r \delta r + \frac{\partial (B_r \delta r)}{\partial \theta} \delta \theta \right]$$

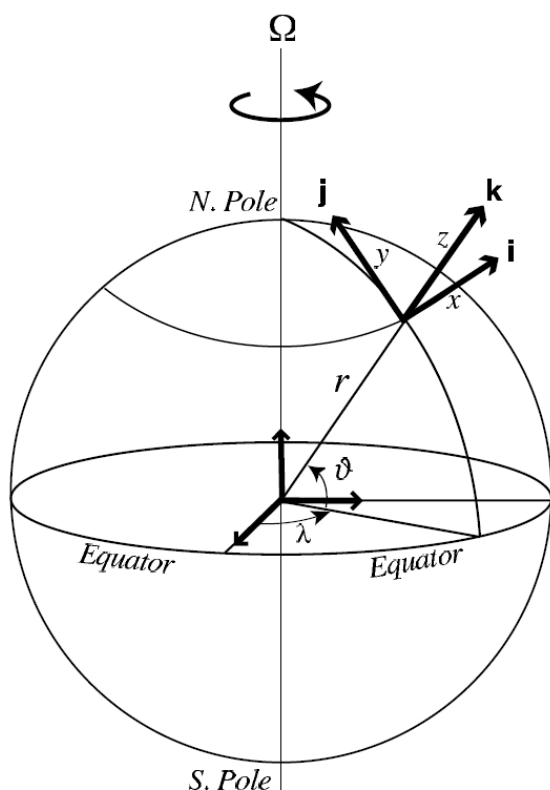
$$\downarrow$$

$$B_\lambda = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (B_\theta r)}{\partial r} + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right]$$

采用同样的方法可以得到其他两个方向的旋度表达式依次为

$$B_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (B_\lambda r)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \lambda} \right], B_r = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial (B_\theta r)}{\partial \lambda} - \frac{\partial (B_\lambda r)}{\partial \theta} \right]$$

(4) 球面坐标系下单位矢量的随体导数



如左图所示,我们将旋转坐标系中的单位矢量 i, j, k 在绝对坐标系下进行投影 (i 方向与地球某一经圈构成的面垂直, 即与地轴垂直, 所以在地轴上没有分量):

$$\begin{cases} i = -\sin \lambda e_1 + \cos \lambda e_2 \\ j = -(\cos \lambda e_1 + \sin \lambda e_2) \sin \theta + \cos \theta e_3 \\ k = (\cos \lambda e_1 + \sin \lambda e_2) \cos \theta + \sin \theta e_3 \end{cases}$$

(此处的分解有点考验读者的空间想象力, 可以自行画成二维图理解一下)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} (-\sin \lambda e_1 + \cos \lambda e_2) \\ &= -\frac{d\lambda}{dt} (\cos \lambda e_1 + \sin \lambda e_2) \end{aligned}$$

考察某一物体沿纬圈运动, 有 $\delta s = u \delta t$, 而 $\delta s = r \cos \theta \delta \lambda$, 所以 $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{u}{r \cos \theta}$ 。

而 $j \sin \theta - k \cos \theta = -(\cos \lambda e_1 + \sin \lambda e_2)$, 所以 $\frac{di}{dt} = \frac{u}{r \cos \theta} (j \sin \theta - k \cos \theta)$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{dj}{dt} &= \frac{d}{dt} [-(\cos \lambda e_1 + \sin \lambda e_2) \sin \theta + \cos \theta e_3] \\ &= \left(\sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} \sin \theta - \cos \lambda \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) e_1 - \left(\cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} \sin \theta + \sin \lambda \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) e_2 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} e_3 \\ &= -\frac{d\lambda}{dt} \sin \theta (-\sin \lambda e_1 + \cos \lambda e_2) - \frac{d\theta}{dt} [\cos \theta (\cos \lambda e_1 + \sin \lambda e_2) + \sin \theta e_3] \end{aligned}$$

考察沿某一经圈运动, 有 $\delta s = v \delta t$, 而 $\delta s = r \delta \theta$, 所以 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$, 故

$$\frac{dj}{dt} = -\frac{u \tan \theta}{r} i - \frac{v}{r} k$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \frac{dk}{dt} &= \frac{d}{dt} [(\cos \lambda e_1 + \sin \lambda e_2) \cos \theta + \sin \theta e_3] \\ &= \left(-\sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} \cos \theta - \cos \lambda \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) e_1 + \left(\cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} \cos \theta - \sin \lambda \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) e_2 + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} e_3 \\ &= \frac{d\lambda}{dt} \cos \theta (-\sin \lambda e_1 + \cos \lambda e_2) + \frac{d\theta}{dt} [-\sin \theta (\cos \lambda e_1 + \sin \lambda e_2) + \cos \theta e_3] \end{aligned}$$

讲各项代入后得到 $\frac{dk}{dt} = \frac{u}{r} i + \frac{v}{r} j$

为了方便记忆, 引入 $\Omega_{flow} = -\frac{v}{r}\mathbf{i} + \frac{u}{r}\mathbf{j} + \frac{u \tan \theta}{r}\mathbf{k}$, 于是单位矢量的随体导数可以

记为: $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega_{flow} \times \mathbf{i}, \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \Omega_{flow} \times \mathbf{j}, \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \Omega_{flow} \times \mathbf{k}$

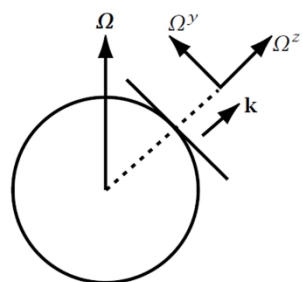
(5) 球坐标系下的动量方程

不考虑摩擦, 直角坐标系下动量方程为 $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} - \nabla \Phi$ 。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{du}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv}{dt}\mathbf{j} + \frac{dw}{dt}\mathbf{k} + u\frac{d\mathbf{i}}{dt} + v\frac{d\mathbf{j}}{dt} + w\frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \theta}{r} + \frac{wu}{r} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \theta}{r} + \frac{wv}{r} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

上式中含有 r 的项叫做**曲率项**, 它主要是由地球球面曲率引起的。请读者证明, 曲率项不做功(根据做功的定义, 利用向量点乘去做)

✧ 如下图为科氏力的分解(由于地轴总是和 yOz 平面重合, 所以 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 i 方向上并



没有分量): $\Omega_z = \Omega \sin \theta, \Omega_y = \Omega \cos \theta$, 根据矢量叉乘运算:

$$\begin{aligned} -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} &= -2(\Omega \cos \theta \mathbf{j} + \Omega \sin \theta \mathbf{k}) \times (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \\ &= (2\Omega v \sin \theta - 2\Omega w \cos \theta) \mathbf{i} - 2\Omega u \sin \theta \mathbf{j} + 2\Omega u \cos \theta \mathbf{k} \end{aligned}$$

定义科氏参数: $f = 2\Omega \sin \theta$ 。记 $\tilde{f} = 2\Omega \cos \theta$

于是科氏力又可以简记为: $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (fv - \tilde{f}w)\mathbf{i} - fu\mathbf{j} + \tilde{f}u\mathbf{k}$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \mathbf{i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{k}$$

于是原始的动量方程组可以表示为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \theta}{r} + \frac{wu}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + fv - \tilde{f}w \\ \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \theta}{r} + \frac{wv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - fu \\ \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \tilde{f}u \end{cases}$$

结合实际的运动, 对动量方程进行简化:

➤ **薄层近似**, 海水的平均深度为 4km , 远小于地球的平均半径 $a=6371\text{km}$, 因

此，当 $r = a + z$ 出现在微分号以外时可以近似看成常数 a ，且 $\partial(z+a) = \partial z$ ；

➤ 传统近似，海水的垂向流速的量级在 $10^{-5} - 10^{-4} \text{ m/s}$ ，水平流速的量级在 $0.1 - 1 \text{ m/s}$ ，可以认为 $w \ll u, v$ 。

在上述的近似条件下，近似简化后的方程为：

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \cos \theta \partial \lambda} + f_v \\ \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \partial \theta} - f_u \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases}$$

[注]在 $\mathbf{k}$ 方向上略去 $-\frac{u^2+v^2}{r}$, $\tilde{f}_u$ 的原因：根据传统近似略去了含 w 的项后，为了满足科氏力及曲率项力不做功。

(6) 球坐标系下的连续方程

连续方程 $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ，根据散度的物理意义： $\nabla \cdot \mathbf{V} = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\delta\tau} \frac{d(\delta\tau)}{dt}$ 在球坐标系中， $\delta\tau = r^2 \cos \theta \delta\lambda \delta\theta \delta r$ ，从而

$$\frac{1}{r^2 \cos \theta \delta\lambda \delta\theta \delta r} \frac{d(r^2 \cos \theta \delta\lambda \delta\theta \delta r)}{dt} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\delta u}{\delta \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\delta v}{\delta \theta} + \frac{\delta w}{\delta r} + \frac{2w}{r} - \frac{v \tan \theta}{r}$$

取极限可以得到 $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} - \frac{v \tan \theta}{r}$ ，或者也可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(v \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(w r^2)}{\partial r}$$
，这与前面推导的散度表达式的

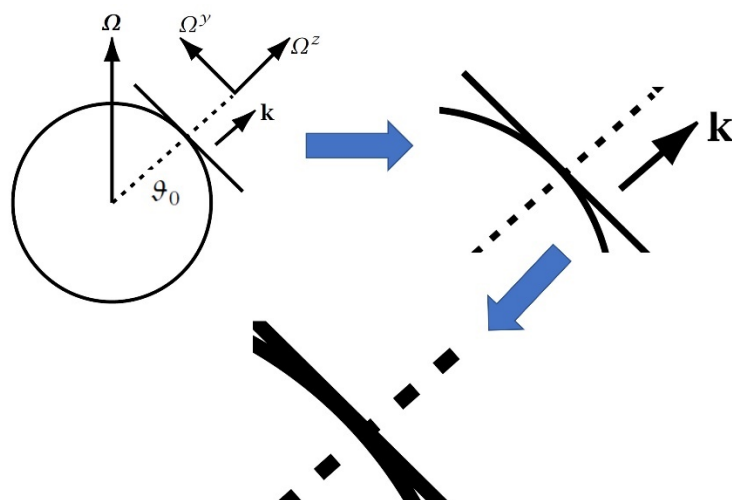
形式是一样的。进而可以写出连续方程的表达式为：

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(v \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(w r^2)}{\partial r} \right] = 0$$

读者可以尝试将上述方程改写成 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 的形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(u\rho)}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(v\rho \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 w \rho)}{\partial r} = 0$$

4. 局地直角坐标系



当物体的运动范围远小于地球(曲率)半径时, 可认为物体所在的区域视为平面, 此时的坐标系称为局地直角坐标系。此时, $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$, 从而动量方程中的曲率项可以忽略。我们再做一个**静力近似**假设, 即认为在垂直方向上压强梯度力和重力平衡, 因此, 在局地直角坐标系下的简化动量方程为:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases}$$

✧ f 平面近似与 β 平面近似

将 $f = 2\Omega \sin \theta$ 在纬度 θ_0 处进行一阶 Taylor 展开, 有:

$$f \approx 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega (\theta - \theta_0) \cos \theta_0$$

而 $a(\theta - \theta_0) = y$, 记 $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = \frac{2\Omega \cos \theta_0}{a}$, 则 $f = f_0 + \beta y$ 。若令 L 代表运动的经向水平尺度, 则 $\frac{\beta y}{f_0} \sim \frac{\cos \theta_0 L}{\sin \theta_0 a}$, 因此在中纬度地区, 若物体的经向水平尺度远小于地球半径($L/a \ll 1$)时, 可取 $f \approx f_0$, 即把 f 作为常数处理, 这种近似称为 **f 平面近似**。

f 平面近似相当于完全没有考虑地球球面性所引起的 f 随纬度的变化。高一

级的近似是所谓的 β 平面近似，其主要内容为：

- ① 当 f 处于系数地位不被微商时，取 $f \approx f_0$ ；
- ② 当 f 处于对 y 求微商地位时，取 $\frac{df}{dy} = \beta = \text{const}$ 。

显然， β 平面近似考虑了大尺度运动中 f 随纬度的变化。在低纬赤道地区， $f_0 \approx 0$ ，因而有 $f \approx \beta y = \frac{2\Omega}{a} y$ ，这称为赤道 β 平面近似。

§ 1.2 海水的热力学性质

1. 与海水有关的几个控制方程

(1) 海水状态方程

$\alpha = \alpha(T, p, S)$ (S 表示盐度， $\alpha = \frac{1}{\rho}$ 称为比容，表示单位质量海水所占的体积)。

对 α 进行全微分展开得到：

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{p,S} dT + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p} \right)_{T,S} dp + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial S} \right)_{T,p} dS = \alpha (\beta_T dT - \beta_p dp - \beta_S dS)$$

✧ $\beta_T = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{p,S}$ —— 热膨胀系数，表示每升高 1°C 时，单位体积海水的增量，

$(2 \pm 1.5) \times 10^{-4} \text{K}^{-1}$ 。

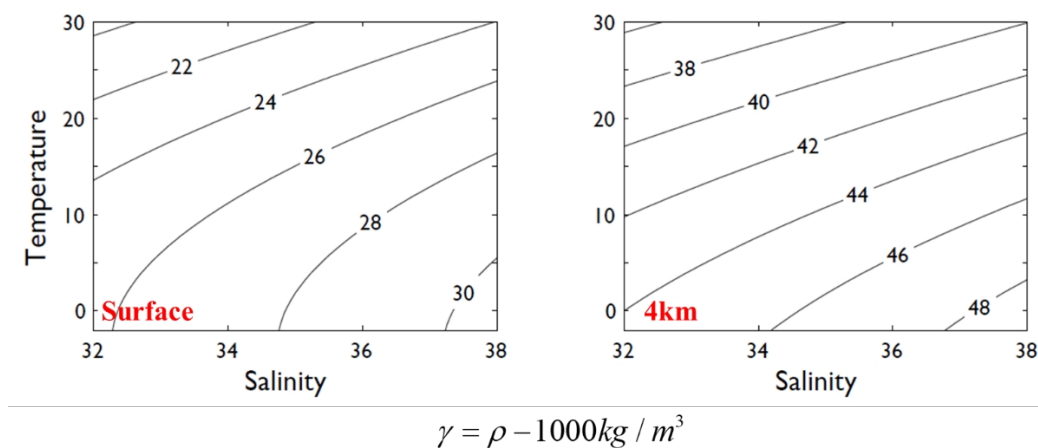
✧ $\beta_p = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p} \right)_{T,S}$ —— 压缩系数，表示单位体积的海水，当压力增加 1Pa 时，

其体积的负增量， $(4.1 \pm 0.5) \times 10^{-10} \text{Pa}^{-1}$ 。

✧ $\beta_S = -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial S} \right)_{T,p}$ —— 盐度收缩系数，表示单位体积的海水，当盐度增加

1ppt (parts per thousand, 千分之一) 时，其体积的负增量， $(7.6 \pm 0.2) \times 10^{-4} \text{ppt}^{-1}$

➤ 密度超量： $\gamma = \rho - 1000 \text{kg/m}^3$



可见海水的密度变化范围不太大，且变化可认为是一种线性的。因此对海水的密度(比容)进行线性近似：

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 [1 + \beta_T (T - T_0) - \beta_p (p - p_0) - \beta_s (S - S_0)] \\ \rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) + \beta_p (p - p_0) + \beta_s (S - S_0)] \end{cases}$$

对海水密度的影响：压强 > 温度 > 盐度

(2) 盐度控制方程

$\frac{dS}{dt} = \dot{S}$ ，盐度的变化可由扩散过程($\dot{S} = \nabla(k_s \nabla S)$, $k_s = 1.1 \times 10^{-9} \text{ m}^2 / \text{s}$)或者源

汇过程($\dot{S} = F(x, y, z, t)$)引起。

(3) 温度控制方程

$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{T} \dot{Q}$ ， $\eta = \eta(T, p, S)$ 表示熵。温度的变化可由热传导或者源汇过程引

起。

(4) 海水热力学方程

热力学第一定律: $dI = dQ + dW + dC$ ，其中 dI 表示内能的变化， $dQ = Td\eta$ 表示热量的变化， $dW = -pd\alpha$ 表示做功变化， $dC = \mu dS$ 表示化势的变化。

$$dI = Td\eta - pd\alpha + \mu dS$$

焓的表达式为 $h = I + p\alpha$ ，对其求全微分，并将热力学第一定律代入(这里先假设 S 恒定的情况)，有 $dh = Td\eta + \alpha dp$ ，从而 $T = \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_p$ ， $\alpha = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_\eta$ 。

根据假设, 有 $\eta = \eta(T, p)$, $h = h(T, p)$, 将二者展开为全微分:

$$\begin{cases} d\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_T dp \\ dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp \end{cases}$$

由 $dh = Td\eta + \alpha dp$, 得 $Td\eta = dh - \alpha dp = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - \alpha\right] dp$ 。由上面的第

一个式子, 得 $Td\eta = T\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_p dT + T\left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_T dp$, 对比可以得到

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_p$$

$c_p \approx 4000 J / (kg \cdot K)$, 称为海水的定压比热容。

2. 位势温度

在绝热条件下, $Td\eta = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - \alpha\right] dp = 0$, 但是海水的温度并不

守恒, 压强的变化也会引起温度改变。引入位势温度的概念: 海水微团在绝热、盐度不变的情况下, 移动到某一参考压强 p_r 处所对应的温度。

$\eta = \eta(T, p) = \eta(\theta, p_r)$, 也可以改写成 $\theta = \theta(\eta, p_r)$ 。由 $c_p = T\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_p$, 得

$$d\eta = c_p d \ln \theta, \text{ 又 } \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{T} \dot{Q}, \text{ 得到 } c_p \frac{d\theta}{dt} - \frac{\theta}{T} \dot{Q} = 0。$$

吉布斯自由能表达式为 $G = I - T\eta + p\alpha$, 有 $dG = -\eta dT + \alpha dp$, 利用二阶混

合偏导数相等 ($\frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T} = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p}$), 可以得到著名的麦克斯韦关系 $\left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p$

又 $Td\eta = T\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_T dp\right] = c_p dT + T\left(\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)_T dp$, 在绝热情形下, 将

上述的麦克斯韦关系代入可得:

$$dT - \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_p dp = 0$$

而 $\beta_T = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_p$ ，同根据静力平衡假设有 $dp = -\rho g dz$ 。一般假设微分号外面的

温度 T 为一常数， $T \approx T_0 = 298K$ ，因此上述方程最可化简为 $d \left(T + \frac{\beta_T g T_0}{c_p} z \right) = 0$ ，

即 $T + \frac{\beta_T g T_0}{c_p} z = C$ ，考虑初始条件为 (z_r, θ) ，则有 $\theta = T + \frac{\beta_T g T_0}{c_p} (z - z_r)$ 。 z_r 为人

为选取的一个参考平面，一般选海平面 $z_r = 0$ ，其中称 $\frac{\beta_T g T_0}{c_p} = 0.15K/km$ 为温度

绝热变化率。

3. 位势密度(剔除压强的影响，与温、盐有关)

海水微团在绝热、盐度不变的情况下，移动到某一参考压强 p_r 处所对应的密度。类比位势温度有 $\rho_\theta = \rho(\eta, p_r)$ ，同样可以改写成 $\eta = \eta(\rho_\theta, p_r)$ ，对其求全

微分有 $d\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_\rho dp + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p d\rho$ ，考虑绝热条件，有

$$d\rho - \frac{1}{c_s^2} dp = 0, \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p / \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_\rho = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\eta = -c_s^2$$

$c_s \approx 1500m/s$ 称为绝热声速。(介质越不可压缩，声速的传播速度快)

[注] 关于 $\left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p / \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_\rho = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\eta$ 的推导过程过如下：

因为 $\eta = \eta(\rho, p) = \eta(\rho, p(\rho, \eta))$ ，在绝热过程中 $\frac{\partial \eta}{\partial \eta} = 0$ ，两边对 ρ 求偏导有：

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right)_p + \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_\rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_p = 0$$

同样的根据静力近似，代入上述方程有： $d\rho + \frac{\rho g}{c_s^2} dz = 0$ ，将微分号外的密度 ρ

用海水平均密度 ρ_0 代替, 有 $d\left(\rho + \frac{\rho_0 g}{c_s^2} z\right) = 0 \Rightarrow \rho + \frac{\rho_0 g}{c_s^2} z = C$, 同样的我们有初

始条件 (z_r, ρ_θ) , 则 $\rho_\theta = \rho + \frac{\rho_0 g}{c_s^2} (z - z_r) \left(\frac{\rho_0 g}{c_s^2} \approx 5 \text{ kg} / \text{m}^3 / \text{km} \right)$

✧ 考虑盐度的情况

$$\theta = T(\eta, S, p_r) \quad \eta(T, S, p) = \eta(\theta, S, p_r)$$

$$\rho_\theta = \rho(\eta, S, p_r) \quad \eta(\rho, S, p) = \eta(\rho_\theta, S, p_r)$$

$$d\eta = c_p d \ln \theta + \left(\frac{\partial \eta}{\partial S} \right)_{T,p} dS \Rightarrow c_p \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \dot{Q} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial S} \dot{S}$$

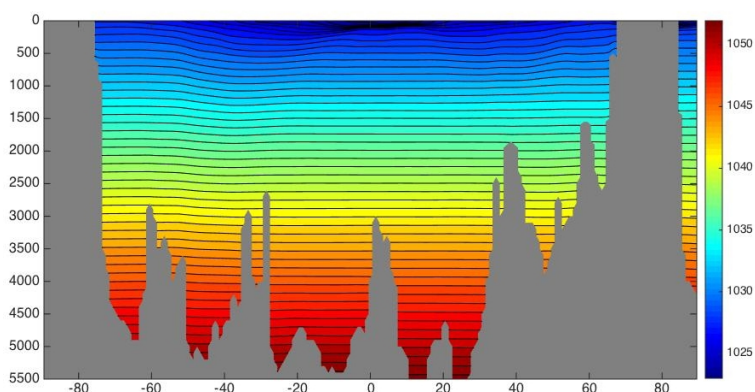
盐度变化项通常很小可以忽略, 而海洋中温度与位势温度相差不大(但密度与位势密度相去甚远), 所以上式又可以继续化简为 $c_p \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T} \dot{Q}$

4. 局地直角坐标系下描述海水运动的闭合方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{dS}{dt} = \dot{S}, c_p \frac{d\theta}{dt} = \dot{Q}, \rho = \rho(\theta, S, p) \end{cases}$$

§ 1.3 Boussinesq 近似

1. 动量方程的近似



上图海水密度分布的剖面图，可以看到，在整个铅直方向上，海水密度的差值在 25kg/m^3 左右，因此可以有

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho(x, y, z, t) \quad (|\delta\rho| \ll \rho_0)$$

ρ_0 为海水的平均密度， $\delta\rho(x, y, z, t)$ 为偏离平均密度的一个扰动量。同理压强也可以写为 $p = p_0(z) + \delta p(x, y, z, t)$ ，并对于 ρ_0, p_0 ，我们假设恒满足 $\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g$ ，于是动量方程可以写为

$$(\rho_0 + \delta\rho) \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} \right) = -\nabla(p_0 + \delta p) - g(\rho_0 + \delta\rho)\mathbf{k}$$

方程左边的 $\delta\rho\mathbf{V}$ 的数量级与 $\rho_0\mathbf{V}$ 的数量级相比较小可以忽略，右边的 $g\delta\rho$ 的数量级在铅直方向来说是比较大的，不能忽略，而

$$\nabla(p_0 + \delta p) = \nabla p_0 + \nabla \delta p = -\rho_0 g + \nabla \delta p$$

故动量方程可以化简为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\nabla\phi + b\mathbf{k}$$

其中 $\phi = \frac{\delta p_0}{\rho_0}$ ， $b = -\frac{g\delta\rho}{\rho_0}$ (浮力)。

2. 连续方程的近似

(1) 狭义不可压缩流体

若流体微团在运动过程中密度保持不变，则称为不可压缩流体。即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \& \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

按照狭义定义，所有流体均不是不可压缩流体。

(2) 广义不可压缩流体

若流体微团在运动过程中满足以下关系

$$\left| \frac{d\rho}{dt} \right| \ll \rho \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \right)$$

则称为不可压缩流体。上述关系表明： $\frac{d\rho}{dt} \neq 0, \nabla \cdot \mathbf{V} \approx 0$

(3) 广义不可压缩的充分条件

假定运动的时间尺度是平流时间尺度(局地变化项与平流项的量级相当)，那么由 $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$ ，有 $\frac{\Delta \rho}{T} = U \frac{\Delta \rho}{L}$ (这里及后面的大写字母均为对应物理量的特征尺度值)。根据广义不可压缩流体的定义，有 $\frac{\Delta \rho}{T} \ll \rho_0 \frac{U}{L}$ ，得到

关系式 $\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \ll 1$ 。在推导位势密度时，有关系式 $\Delta p = c_s^2 \Delta \rho$ ，从而有 $\frac{\Delta p}{\rho_0 c_s^2} \ll 1$ 。

根据动量方程 $\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k}$ ，可知压强梯度力可与方程中剩余的

的三项平衡，有 $\Delta p \sim \max(\rho_0 gH, \rho_0 fUL, \rho_0 U^2)$ 。

如果和重力平衡，有 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho_0 H} \sim g \Rightarrow \Delta p \sim \rho_0 gH$

如果和科氏力平衡，有 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv = 0 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho_0 L} \sim fU \Rightarrow \Delta p \sim \rho_0 fUL$

如果和加速度项平衡，有 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho_0 L} \sim U \frac{U}{L} \Rightarrow \Delta p \sim \rho_0 U^2$

从而海水冠以不可压的充分条件为：

$$gH \ll c_s^2 \& U \ll c_s \& fUL \ll c_s^2$$

3. 热力学方程和状态方程

对 $\rho = \rho(\theta, S, p)$ 求全导数，有

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{dp_0}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{dS}{dt}$$

(1) 等式右边第一项

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = -\frac{1}{c_s^2}, \frac{dp}{dt} = -\rho g \frac{dz}{dt}$$

(2) 等式右边第二项

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\alpha} \right) = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = -\rho \beta_T, \frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{Q}}{c_p}$$

(3) 等式右边第三项

$$\frac{\partial \rho}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{\alpha} \right) = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial S} = \rho \beta_S, \frac{dS}{dt} = \dot{S}$$

方程两边同时乘以 $-\frac{g}{\rho}$ ，考虑到 $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ ，可以将处在分母上的 ρ 用 ρ_0 来

代替，于是上述方程可以写为

$$\frac{db}{dt} = \frac{g^2}{c_s^2} \frac{dz}{dt} + g\beta_T \frac{\dot{Q}}{c_p} - g\beta_S \dot{S}$$

引入位势浮力 $b_\theta = b - \frac{g^2}{c_s^2} z$ ，上述方程又可以改写成 $\frac{db_\theta}{dt} = g\beta_T \frac{\dot{Q}}{c_p} - g\beta_S \dot{S}$ ，它可

以代替原来方程组中 $\frac{dS}{dt} = \dot{S}, c_p \frac{d\theta}{dt} = \dot{Q}, \rho = \rho(\theta, S, p)$ 三个方程。

4. 动量方程近似的另一种形式

海水的密度主要在铅直方向上有差异，所以 1 中密度的表达式可以进一步改写为

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \hat{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t) \\ &= \tilde{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (|\delta\rho|, |\hat{\rho}|, |\rho'| \ll \rho_0) \end{aligned}$$

同样压强也可以写成 $p = \tilde{p}(z) + p'(x, y, z, t)$ ，满足 $\frac{d\tilde{p}}{dz} = -\tilde{\rho}g$ ，动量方程改写为

$$(\rho_0 + \delta\rho) \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} \right) = -\nabla(\tilde{p} + p') - g(\tilde{\rho} + \rho')\mathbf{k}$$

同样可以得到

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\nabla\phi' + b'\mathbf{k} \left(\phi' = \frac{p'}{\rho_0}, b' = -\frac{g\rho'}{\rho_0} \right)$$

[总结] **Boussinesq** 近似指在与重力相联系的项中保留扰动密度，而在其他项中略去扰动密度的影响

5. 海水层结和静力稳定度 ★

已知 $b = -\frac{g\delta\rho}{\rho_0}$, $\delta\rho = \hat{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$, 所以有 $b = \hat{b}(z) + b'$, 考虑绝热、盐

度守恒的情况下, $\frac{db}{dt} = \frac{g^2}{c_s^2} \frac{dz}{dt} + g\beta_r \frac{\dot{Q}}{c_p} - g\beta_s \dot{S}$ 可以简化成

$$\frac{d}{dt} \left(b - \frac{g^2}{c_s^2} z \right) = 0$$

将 $b = \hat{b}(z) + b'$ 代入展开有 $\frac{d}{dt} \left(\hat{b}(z) + b' - \frac{g^2}{c_s^2} z \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\hat{b}}{dz} \frac{dz}{dt} + \frac{db'}{dt} - \frac{g^2}{c_s^2} \frac{dz}{dt} = 0$, 即

$$\frac{db'}{dt} + \left(\frac{d\hat{b}}{dz} - \frac{g^2}{c_s^2} \right) w = 0 \Leftrightarrow \frac{db'}{dt} + N^2 w = 0$$

$N^2 = \frac{d\hat{b}}{dz} - \frac{g^2}{c_s^2}$ 称为浮力频率(Brunt-Väisälä, 布伦特-维萨拉频率), 是对海水稳定

度的一个重要度量。位势密度的表达式为 $\hat{\rho}_\theta = \hat{\rho} + \frac{\rho_0 g}{c_s^2} z$, 两边同时乘以 $-\frac{g}{\rho_0}$,

$$有 -\frac{g}{\rho_0} \hat{\rho}_\theta = -\frac{g\hat{\rho}}{\rho_0} - \frac{g^2}{c_s^2} z \Leftrightarrow -\frac{g}{\rho_0} \hat{\rho}_\theta = \hat{b} - \frac{g^2}{c_s^2} z \Leftrightarrow N^2 = \frac{d\hat{b}}{dz} - \frac{g^2}{c_s^2} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\hat{\rho}_\theta}{dz}$$

设海水的密度分布为 $\tilde{\rho}(z) = \rho_0 + \hat{\rho}(z)$ 。首先来假设单位体积的海水微团从 z 移动至 $z + \delta z$ 过程中密度守恒, 即 $\rho(z + \delta z) = \tilde{\rho}(z)$, 那么此过程密度变化

$$\delta\rho = \rho(z + \delta z) - \tilde{\rho}(z + \delta z) = \tilde{\rho}(z) - \tilde{\rho}(z + \delta z) = -\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \delta z$$

产生的浮力为 $F = -g\delta\rho = g \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \delta z$ ，由此加速度(动力学角度)可以表示为

$$a = \frac{F}{\tilde{\rho}} = \frac{g}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \delta z = -N^2 \delta z, \text{ 另外, 从运动学的角度, 加速度还可以表示为 } a = \frac{\partial^2 \delta z}{\partial t^2},$$

于是我们得到一个关于浮力频率的二阶齐次微分方程

$$\frac{\partial^2 \delta z}{\partial t^2} + N^2 \delta z = 0$$

但是流体在运动过程中, 密度不守恒。更合理的假定是流体从 z 移动至 $z + \delta z$ 过程中位势密度守恒, 取 $z + \delta z$ 为参考压强面, 同上面的推到过程一样, 有

$$\delta\rho = \rho_\theta(z + \delta z) - \tilde{\rho}_\theta(z + \delta z) = \tilde{\rho}_\theta(z) - \tilde{\rho}_\theta(z + \delta z) = -\frac{\partial \tilde{\rho}_\theta}{\partial z} \delta z$$

同样可以得到一个二齐次微分方程: $\frac{\partial^2 \delta z}{\partial t^2} + N^2 \delta z = 0$, 但此时 $N^2 = -\frac{g}{\tilde{\rho}_\theta} \frac{\partial \rho_\theta}{\partial z}$

[注] 位势密度守恒下密度变化的另一种推导方式

(t, z) 处, 海水的密度为 $\tilde{\rho}(z)$, 则位势密度可以表示为 $\tilde{\rho}_\theta(z) = \tilde{\rho}(z) + \frac{g\rho_0}{c_s^2} z$,

在 $(t + \delta t, z + \delta z)$ 处, 根据位势密度守恒, 有

$$\rho(z + \delta z) + \frac{g\rho_0}{c_s^2}(z + \delta z) = \tilde{\rho}_\theta(z) = \tilde{\rho}(z) + \frac{g\rho_0}{c_s^2} z$$

于是得到 $\rho(z + \delta z) = \tilde{\rho}(z) - \frac{g\rho_0}{c_s^2} \delta z$, 故密度变化为

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \rho(z + \delta z) - \tilde{\rho}(z + \delta z) = \tilde{\rho}(z) - \tilde{\rho}(z + \delta z) - \frac{g\rho_0}{c_s^2} \delta z \\ &= -\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \delta z - \frac{g\rho_0}{c_s^2} \delta z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{\rho} + \frac{g\rho_0}{c_s^2} z \right) \delta z = -\frac{\partial \tilde{\rho}_\theta}{\partial z} \delta z \end{aligned}$$

$N^2 > 0$ 时表示海水是稳定的; 反之则是不稳定。我们可以这么去理解, 根据其表达式 $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_\theta}{dz}$, 当 $N^2 > 0$ 时, 等价于 $\frac{d\rho_\theta}{dz} < 0$, 而在海中有 $z < 0$,

也就是说随着深度的增大，海水密度增大，这种“上轻下重”的分布显然是一种稳定层结。

[总结] Boussinesq 近似下的无粘海水运动方程组

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\nabla\phi' + b'\mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{db'}{dt} + N^2 w = 0 \end{cases}$$

§*1.4 时间平均的基本方程(非考试重点)

1. 湍流运动的特点

- (1) 不规则、无秩序的运动；
- (2) 流体质点的运动轨道不是平滑的曲线；
- (3) 流体质点的运动存在脉动及漩涡；
- (4) 没有相对稳定的分层；
- (5) 流体质点的热力学性质（温度、盐度和密度）也表现出不规则的随机变动。

2. 基本方程的平均化

◆ 基本思想：将物理量的观测值可以看成由平均值和脉动值组成。

◆ 平均值的运算法则。设有两个物理量： $a = \bar{a} + a'$, $b = \bar{b} + b'$

$$\overline{\bar{a}} = \bar{a}, \overline{a'} = 0; \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b};$$

$$\overline{ab} = \overline{(\bar{a} + a')(\bar{b} + b')} = \overline{\bar{a}\bar{b} + a'\bar{b} + \bar{a}b' + a'b'} = \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'}$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial t^2}$$

(1) 连续方程的时间平均

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ 利用法则 4, 得到 } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

(2) 运动方程

以 x 方向为例，方程左端加上 $u\nabla \cdot \mathbf{V}$ ，有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{V \cdot \nabla u + u \nabla \cdot V}_{\nabla \cdot (uV)} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + f_v + \nu \nabla^2 u$$

我们利用法则 3 和 4，则可以得到平均后的方程为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = f\bar{v} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} \quad (*)$$

上述方程显然引入了未知量，这显然是我们不想要的。我们假设湍流动量交换和分子粘性力引起的动量交换在形式上是一致的。分子粘性切应力表达式为

$$\tau_x = \nu \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ 类比可得湍流应力 } -\overline{u'u'} = A_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, -\overline{u'v'} = A_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, -\overline{u'w'} = A_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (A_{ij} \text{ 称为}$$

湍流粘性系数)，从而将湍流应力与平均速度联系了起来。

将(*)式减去 $\bar{u}(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z})(=0)$ ，得到

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} (A_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z})$$

同理可得其他两个方向的表达式为

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + f\bar{u} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v} + \frac{\partial}{\partial x} (A_{yx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_{yz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z})$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} + b + \nu \nabla^2 \bar{w} + \frac{\partial}{\partial x} (A_{zx} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_{zy} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_{zz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z})$$

(3) 盐度扩散方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = k_s \nabla^2 S$$

方法同上，加 $S(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) = 0$ ，减 $\bar{S}(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}) = 0$ ，结果为

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} = k_s \nabla^2 \bar{S} + \frac{\partial}{\partial x} (K_{sx} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_{sy} \frac{\partial \bar{S}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_{sz} \frac{\partial \bar{S}}{\partial z})$$

(K_{si} 为湍流盐度扩散系数)

(4) 热传导方程

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = k_{\theta} \nabla^2 \theta \quad (k_{\theta} = k_Q / c_p = 1.4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s})$$

方法同上，加 $\theta(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) = 0$ ，减 $\bar{\theta}(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}) = 0$ ，结果为

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = k_{\theta} \nabla^2 \bar{\theta} + \frac{\partial}{\partial x} (K_{\theta x} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_{\theta y} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_{\theta z} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z})$$

($K_{\theta i}$ 为湍流温度扩散系数)

▲ 湍流方程组与层流方程组的异同

- ① 物理量都由瞬时值变为平均值；
- ② 比层流的运动、盐量扩散、热传导方程多了三项由平流项时间平均产生的脉动量乘积项，分别参数化为与时间平均变量的梯度成正比的形式，将微观量用宏观量表示；
- ③ 湍流粘性/扩散作用与分子粘性/扩散作用形式类似，但大小高 2—3 个数量级。因此，分子粘性和扩散作用通常可以忽略

3. 混合长理论(详细内容查看链接[6])

- (1) 湍流运动在距离 l' 的运动范围内保持流体的属性近似不变；
- (2) 流体微团能够与周围的流体混合；
- (3) 平均运动的变化尺度远大于 l' 。

▲ 湍流混合的特征

- (1) 水平方向上一般是各向同性的；

$$\begin{aligned} A_{xx} = A_{xy} = A_{yx} = A_{yy} = A_H & \quad K_{\theta x} = K_{\theta y} = K_{\theta H} \\ A_{xz} = A_{yz} = A_z & \quad K_{Sx} = K_{Sy} = K_{SH} \\ A_{zx} = A_{zy} = A_{zH} & \end{aligned}$$

- (2) 湍流粘性系数不是对称张量。

§ 1.5 边界条件

1. 海面边界条件

(1) 运动学边界条件——无质量交换

对于任一物质面满足 $F(x, y, z, t) = 0$ ，若从质点的运动规律为从 $(x, y, z, t) \rightarrow (x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ ，同样有 $F(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0$ ，对齐进行 Taylor 一阶展开

$$F(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = F(x, y, z, t) + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

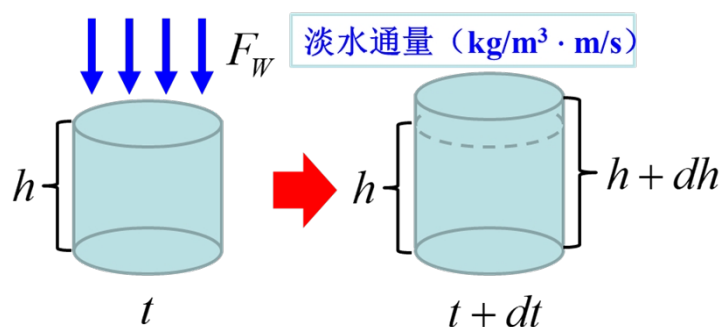
易得 $\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ 。我们假设海面是物质面，其方程为 $z = \eta(x, y, t)$ ，

于是有 $F = \eta(x, y, t) - z$ ，代入上式得到

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0$$

(2) 运动学边界条件——有质量交换

降水、蒸发等会影响海面，此时不能将海面看作物质面，引入淡水通量 F_w 。



由上图可以得到关系式 $d\eta = dh = \frac{F_w}{\rho} dt$ ，将 $\eta = \eta(x, y, t) - z$ 代入，得到方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = \frac{F_w}{\rho}$$

(3) 动力学边界条件

海面处的法向应力与切向应力连续。

法应力连续 $\Rightarrow p_z(x, y, \eta, t) = p_0$ 海表面大气压

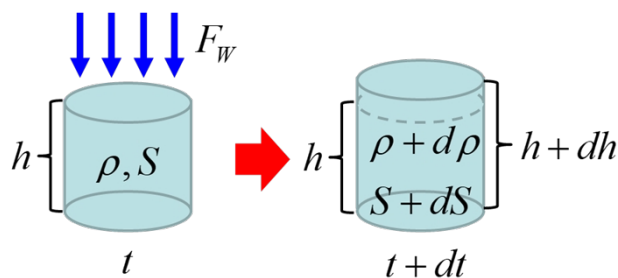
切应力连续 $\Rightarrow$ $A_z \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x$
 $A_z \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y$ 海表面风应力

(4) 热力学边界条件

海面处的热通量应当连续。 $\rho_0 c_p K_{\theta z} \frac{\partial \theta}{\partial z} = Q_{air}$

▲ 虚拟盐通量 F_s (PSU kg/m³·m/s)

海洋和大气并不直接交换盐分，但可以通过交换淡水间接引起海水盐度的变化。海洋与大气间的淡水通量可以部分等价的转化为盐通量，称为虚拟盐通量



我们对单位面积上的海水柱考虑，根据盐量守恒有

$$\rho h S = (\rho h + F_w dt)(S + dS) \Rightarrow \frac{dS}{dt} = -\frac{F_w}{\rho h} S$$

另一方面，盐量守恒还可以表示为 $d(\rho h S) = F_s dt \Leftrightarrow S \frac{d\rho h}{dt} + \rho h \frac{dS}{dt} = F_s$ ，在海洋中， ρh 的变化远比 S 小，所以 $\frac{d\rho h}{dt}$ 项可以忽略，从而有 $\rho h \frac{dS}{dt} \approx F_s$ ，故虚拟盐

通量的表达式为： $K_{sz} \frac{\partial S}{\partial z} = F_s / \rho = -F_w S / \rho$

2. 海底边界条件

(1) 运动学边界条件：海底是物质面，其方程可设为 $z = -h(x, y)$ ，故有

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0。垂直于海底的流速分量 $v_{\perp} = 0$$$

(2) 动力学边界条件：无滑动边界条件(海水有粘性)，平行于海底面的流速分量

$$v_{\parallel} = 0$$

- (3) **热力学边界条件**: 近似认为海水和海底固体之间没有热量和淡水交换(实际上由于地质活动也会有海底的能量向海洋传输)

3. 侧向边界条件(同海底边界条件)

§ 1.6 基本方程的尺度分析和简化

在进行尺度分析时, 做以下的假设:

- 满足 **Boussinesq** 近似
- f 平面近似
- 水平各向同性运动
- 湍流运动粘滞系数和扩散系数为常量, 且有

$$A_z = \begin{cases} A_{xz} \\ A_{yz}, A_H \\ A_{zz} \end{cases}, A_H = \begin{cases} A_{xx}, A_{xy} \\ A_{yx}, A_{yy} \\ A_{zx}, A_{zy} \end{cases}; \mathbf{K}_\theta = \mathbf{K}_S$$

1. 常用的尺度分析的符号表示

物理量的无因次表达

运动特征尺度	L 海水运动的水平尺度	$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) / L$
	D 海水运动的铅直尺度	$\bar{z} = z / D$
	T 运动时间尺度	$\bar{t} = t / T$
	U 海水运动的水平流速尺度	$(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) / U$
	W 海水运动的铅直流速尺度	$\bar{w} = w / W$
	浮力尺度	$\bar{b}' = b' / B$
	压强尺度	$\bar{\phi}' = \phi' / \Phi$
	层结尺度	$\bar{N}^2 = N^2 / N_0^2$

2. 连续方程的尺度分析

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{U}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{U}{L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{W}{D} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0$$

定义无量纲参数：纵横比 $\delta = \frac{D}{L}$ ，假定连续方程的三项同量级，则有

$$\frac{U}{L} = \frac{W}{D} \Rightarrow W = \frac{D}{L} U = \delta U$$

显然对于大尺度运动， $\delta \ll 1$ ，从而 $W \ll U$

3. 水平运动方程的尺度分析(以 x 方向为例)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f_0 v &= -\frac{\partial \phi'}{\partial x} + A_H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \downarrow \\ \frac{U}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{U^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{U^2}{L} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{WU}{D} \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - f_0 U \bar{v} &= -\frac{\Phi}{L} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{x}} + \frac{A_H U}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{A_z U}{D^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ \downarrow \text{两边同时除以 } f_0 U \\ \frac{U}{f_0 L} \left[\frac{L}{UT} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right] - \bar{v} &= -\frac{\Phi}{f_0 UL} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{x}} + \frac{A_H}{f_0 L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{A_z}{f_0 D^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) \end{aligned}$$

上述方程中包含的几个无量纲参数为：

(1) Rossby 数

表示平流非线性项与科氏力的比值，即 $u \frac{\partial u}{\partial x} / f_0 v \sim \frac{U^2}{L} / f_0 U = \frac{U}{f_0 L} = Ro$ ，因此

可以根据 Rossby 数的大小判断一些尺度的运动。在实际大洋中， $U \sim (10^{-1} \sim 10^0) m/s$, $f_0 \sim 10^{-4} s^{-1}$ ，若 $L > 10^5 m$ ，有 $Ro \ll 1$ ，为大尺度运动；若 $L < 10^2 m$ ，有 $Ro \gg 1$ ，为小尺度运动。

(2) Ekman 层厚度

水平： $\delta_{E,H} = \sqrt{A_H / f_0}$ ；垂直： $\delta_{E,V} = \sqrt{A_z / f_0}$ ，表示平均湍流粘性力同科里奥利力的比值，实际大洋中， $A_H \sim 10^2 - 10^4 m^2/s$, $A_z \sim 10^{-4} - 10^{-2} m^2/s$ ，所以

$$\delta_{E,H} \sim (10^3 \sim 10^4) m, \delta_{E,V} \sim (10^0 \sim 10^1) m$$

(3) Ekman 数

水平: $E_{k,H} = \frac{\delta_{E,H}^2}{L^2}$; 垂直: $E_{k,V} = \frac{\delta_{E,V}^2}{D^2}$, 表示湍流粘性力与科氏力的比值,

即 $A_H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} / f v \sim \frac{A_H U}{L^2} / f_0 U = \frac{A_H}{f_0 L^2} = \frac{\delta_{E,H}^2}{L^2} = E_{k,H}$ (铅直方向类比可以写出)。当运动的

的水平尺度 L 和铅直尺度 D 都很大, 则 $E_{k,H} \ll 1$, $E_{k,V} \ll 1$, 即水平湍流摩擦项和铅直湍流摩擦项相对于科氏力项都可以忽略。

对于大尺度运动, 有 $L \sim 1000 \text{ km}$, $D \sim 1 \text{ km}$, $T \sim 1 \text{ yr}$, $U \sim 0.1 - 1 \text{ m/s}$, 从而有

$Ro \ll 1, E_{k,V} \ll 1, E_{k,H} \ll 1$, 于是水平运动方程可以简化为

$$\begin{cases} \bar{v} = \frac{\Phi}{f_0 UL} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{x}} \\ \bar{u} = -\frac{\Phi}{f_0 UL} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{y}} \end{cases} \text{(地转平衡)}$$

根据量纲分析的法则, 此时 $\frac{\Phi}{f_0 UL}$ 的量级应该为 1, 所以可以得到大尺度运动下

压强梯度力的特征尺度值为 $\Phi = f_0 UL$

4. 垂直运动方程的尺度分析

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + b' + A_H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$



$$\frac{W}{T} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{UW}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{W^2}{L} \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\Phi}{D} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{z}} + B \bar{b}' + \frac{WA_H}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{WA_z}{D^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}$$

讨论大尺度 $\Phi = f_0 UL$ 两边同时除以 $\frac{\Phi}{D}$



$$Ro \cdot \delta^2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{z}} + \frac{B\delta}{f_0 U} \bar{b}' + \delta^2 E_{k,H} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \delta^2 E_{k,V} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}$$

在大尺度运动中 $\delta, \delta^2, Ro \ll 1$, 从而得到表达式

$$0 = -\frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{z}} + \frac{DB}{f_0 UL} \bar{b}' \text{(静力平衡)}$$

由此可以得到大尺度运动下浮力的特征值为 $B = \frac{f_0 UL}{D}$

5. 浮力方程的尺度分析

$$\frac{\partial b'}{\partial t} + u \frac{\partial b'}{\partial x} + v \frac{\partial b'}{\partial y} + w \frac{\partial b'}{\partial z} + w N^2 = K_H \left(\frac{\partial^2 b'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b'}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 b'}{\partial z^2}$$



$$\frac{B}{T} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{t}} + \frac{UB}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{WB}{D} \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{z}} + W N_0^2 \bar{w} \bar{N}^2 = \frac{K_H B}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{K_z B}{D^2} \frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{z}^2}$$

讨论大尺度 $B = \frac{f_0 UL}{D}$ 两边同时除以 $W N_0^2$



$$\frac{f_0 L^2}{D^2 N_0^2 T} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{t}} + \frac{f_0 UL}{D^2 N_0^2} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{w} \bar{N}^2 = \frac{K_H f_0}{D^2 N_0^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{K_z f_0}{D^2 L^2 N_0^2} \frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{z}^2}$$



$$R_o B_u^{-1} \left(\frac{L}{UT} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{w} \bar{N}^2 = R_o B_u^{-1} P_H^{-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{y}^2} \right) + R_o B_u^{-1} P_z^{-1} \frac{\partial^2 \bar{b}'}{\partial \bar{z}^2}$$

上述方程中涉及的无量纲参数有：

(1) 伯格(Burger)数

$B_u = \frac{N_0^2 D^2}{f_0^2 L^2}$ ，衡量垂直方向的密度层结和旋转约束效应的相对重要性

(2) 佩克莱(Peclet)数

水平： $P_H = \frac{UL}{K_H}$ ，垂直： $P_z = \frac{WD}{K_z}$ ， $P \ll 1$ ，表示平流项相对于湍流混合项可以

忽略。

6. 尺度分析实际应用

在上面的推导中，我们都是针对大尺度运动，因此有 $\Phi = f_0 UL$ ， $B = \frac{f_0 UL}{D}$ ，并且我们事先假设 $\frac{W}{D} = \frac{U}{L}$ 。其他的尺度分析显然不会和大尺度的分析完全一致，而且我们的事先假设是否站得住脚，也需要返回去验证。

(1) 在不可压缩的连续方程中我们假定 $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\partial w}{\partial z}$ ，并据此得出 $W = UD/L = \delta U$ 。

现在假定 $w N^2$ 在浮力方程中不可忽略，并忽略湍流粘性和扩散项，试证明当

$$R_o \ll 1, B_u = 1, \delta \ll 1, \frac{L}{TU} = 1 \text{ 时, } W = R_o \delta U \ll \delta U$$

[分析] 根据题意写出浮力方程的表达式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b'}{\partial t} + u \frac{\partial b'}{\partial x} + v \frac{\partial b'}{\partial y} + w \frac{\partial b'}{\partial z} + w N^2 &= 0 \\ \downarrow \\ \frac{B}{TWN_0^2} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{t}} + \frac{UB}{WN_0^2 L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{B}{N_0^2 D} \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{z}} + \bar{w} \bar{N}^2 &= 0 \end{aligned}$$

因为 $R_o \ll 1$, 所以可以认为是大尺度运动, 从而 $B = \frac{f_0 UL}{D}$, 故

$$\frac{f_0 U^2}{WN_0^2 D} \left(\frac{L}{TU} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{f_0 UL}{N_0^2 D^2} \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{z}} + \bar{w} \bar{N}^2 = 0$$

对于 z 方向, 有 $\frac{f_0 UL}{N_0^2 D^2} = \frac{f_0^2 L^2}{N_0^2 D^2} \cdot \frac{U}{f_0 L} = Bu^{-1} Ro \ll 1$, 所以该项可以忽略。

又因为 $\frac{L}{TU} = 1$, 为使方程平衡, 须有 $\frac{f_0 U^2}{WN_0^2 D} = 1$, 即

$$W = \frac{f_0 U^2}{N_0^2 D} = \frac{f_0^2 L^2}{N_0^2 D^2} \cdot \frac{DU^2}{f_0 L^2} = Bu^{-1} \cdot \frac{U}{f_0 L} \cdot \frac{D}{L} U = Ro \delta U \ll \delta U$$

(2) [海浪] 在深海大洋, 海浪的周期 T 通常在零点几秒到几十秒, 水平尺度 L 在几十厘米到百米之间, 垂向尺度 $D=L$ 。假定海浪的水平流速尺度 $U=1\text{m/s}$, $T=1\text{s}$, $L=10\text{m}$, 海洋表层 $N=10^{-3}\text{s}^{-1}$, 并忽略湍流粘性和扩散项。

- ✓ 解释为何在海浪研究中通常不需要考虑科氏力。
- ✓ 证明非线性平流作用相对于局地时间导数项可以忽略。
- ✓ 推导无量纲的垂向动量方程, 说明海浪研究是否可以采用静力近似。
- ✓ 推导无量纲的热力学(浮力)方程, 求解 B 的表达式,
- ✓ 推导无量纲的垂向动量方程, 并说明为什么海浪研究可以采用均质流体假设。

[分析] ① 海浪的 Rossby 数为: $Ro = \frac{U}{f_0 L} \sim \frac{1}{10^{-4} \times 10} = 10^3 \gg 1$, 由此可知海浪为

小尺度运动, 即科氏力相对惯性力可以忽略。

② $\frac{\text{非线性平流项}}{\text{局地时间导数项}} = \frac{U^2/L}{U/T} = 0.1$, 非线性平流项比局地时间导数项小一个数量级,

故可以忽略。

③ 根据 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, 得 $w = \frac{D}{L}U = U$ 。结合前两问的分析可知, 科氏力、平流项均

可以忽略, 故水平动量方程(以 x 为例)为 $\frac{U}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\Phi}{L} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}$, 从而得到 $\Phi = \frac{LU}{T}$ 。垂

向的动量方程为: $\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{TU}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z} + \frac{BT}{U} \bar{b}'$ 。显然, 此时的

局地时间导数项相对平流项已经不能忽略, 所以不满足静力平衡。

④ 无量纲浮力方程为: $\frac{B}{TUN_0^2} \left[\frac{\partial \bar{b}'}{\partial t} + \frac{TU}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial z} \right) \right] + \bar{w} \bar{N}^2 = 0$, 平流

项小一个数量级可以忽略, 从而有 $\frac{B}{TUN_0^2} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial t} + \bar{w} \bar{N}^2 = 0$, 故 $B = TUN_0^2$

⑤ 将 $B = TUN_0^2$ 代入③中的垂向动量方程中, 浮力项的量级为 $T^2 N_0^2 \ll 1$ 可以忽略, 即由于流体密度差异(非均质流体)对流体运动产生的影响可以忽略不计, 从而使得动量方程与均质流体的动量方程是一致的, 故海浪研究可以采用均质流体假设。

(3) [内波] 内波是发生在层结流体内部的一种波动, 其频率在 f 与 N 之间。假定海洋内部 $N_0 = 10^{-2} s^{-1}$, $f = 10^{-4} s^{-1}$, 某内波的运动的水平尺度 L 和垂向尺度 D 皆为 $1km$, 运动的水平流速尺度为 $0.1m/s$, 并先验的认为 $W = UD/L = \delta U$ 。忽略湍流粘性和扩散项。

- ✓ 求解该内波的 Rossby 数大小。
- ✓ 推导无量纲的垂向动量方程, 说明该内波研究是否可以采用静力近似。
- ✓ 证明该内波频率的尺度为 N_0 。
- ✓ 根据以上结果, 检查先验假定 $W = UD/L = \delta U$ 是否合理。

[分析] ① $Ro = \frac{U}{f_0 L} = \frac{0.1}{10^{-4} \times 10^3} = 1$, 说明需要科氏力与惯性力都要考虑

② 由题意可知, 有 $W = U, D = L$, 以 x 方向的动量方程为例:

$$\frac{U}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{U^2}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - f_0 U \bar{v} = -\frac{\Phi}{L} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial x}$$

此时不再采用常规的除以 $f_0 U$ 的操作, 因为结合本题, 如果除以 $f_0 U$, 局地时间

导数项的量级为 $\frac{1}{f_0 T}$, 而 $\frac{1}{T} \in [10^{-4} s^{-1}, 10^{-2} s^{-1}]$, 从而 $\frac{1}{f_0 T} \sim [1, 10^2]$, 显然这样就

不方便与其他项进行比较, 我们希望得到的无量纲方程的系数应该等于 1 或远小于 1, 因此本题通过除以 $\frac{U}{T}$ 得到无量纲方程:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + Ro f_0 T \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - f_0 T \bar{v} = -\frac{\Phi T}{LU} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial x}$$

而 $Ro = 1, f_0 T \leq 1$, 从而 $\frac{\Phi T}{LU} = 1 \Rightarrow \Phi = \frac{LU}{T}$

垂向的动量方程为: $\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + Ro f_0 T \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z} + \frac{BT}{U} \bar{b}'$, 显然, 此时

的局地时间导数项与压强梯度力同量级不可以忽略, 所以不能采用静力平衡近似。

③ 对浮力方程进行尺度分析:

$$\frac{B}{T} \left[\frac{\partial \bar{b}'}{\partial t} + Ro f_0 T \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial z} \right) \right] + UN_0^2 \bar{w} \bar{N}^2 = 0$$

忽略平流项, 有 $\frac{B}{T} = UN_0^2 \Rightarrow B = TUN_0^2$, 代入垂向动量方程中得

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + Ro f_0 T \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial z} + T^2 N_0^2 \bar{b}'$$

浮力是影响内波的重要力之一, 不能忽略, $T^2 N_0^2 \ll 1$; 同时, 为了使得方程平

衡, $T^2 N_0^2 \gg 1$, 所以 $T^2 N_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{T} = N_0$

④ 根据水平动量方程可知: 平流项可以忽略, 局地时间导数项与压强梯度力项平

衡即 $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\Delta_h \phi' \neq 0$, 即水平散度不为零, 根据

连续方程, 可得垂向的量级与水平量级相当, 我们的先验假设是合理的。

(4) [近惯性内波] 海洋中的近惯性内波是频率非常接近 f 的一种内波，假设 $L=100\text{km}$ ， $D=100\text{m}$ ， $f=10^{-4}\text{s}^{-1}$ ， $N=10^{-2}\text{s}^{-1}$ ， $U=0.1\text{m/s}$ ，并先验的认为 $W = UD/L = \delta U$ 。忽略湍流粘性和扩散项。

- ✓ 证明 $Bu \ll 1$, $Ro \ll 1$, $\frac{L}{TU} \gg 1$
- ✓ 推导无量纲的热力学(浮力)方程，求解 B 的表达式。
- ✓ 推导无量纲的垂向动量方程，证明近惯性内波满足静力近似，并求解 Φ 的表达式。
- ✓ 推导无量纲的水平动量方程，并找出占主导作用的项。
- ✓ 根据以上结果，检查先验假定 $W = UD/L = \delta U$ 是否合理。

[分析]

$$\textcircled{1} \quad Bu = \frac{N_0^2 D^2}{f_0^2 L^2} = 10^{-2} \ll 1, \quad Ro = \frac{U}{f_0 L} = 10^{-2} \ll 1, \quad \frac{L}{TU} \sim \frac{L f_0}{U} = Ro^{-1} = 10^2 \gg 1$$

② 对浮力方程进行尺度分析有：

$$\begin{aligned} \frac{B}{T} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{t}} + \frac{UB}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{WB}{D} \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{z}} + W N_0^2 \bar{w} \bar{N}^2 &= 0 \\ \downarrow \\ \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{t}} + \frac{UT}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{b}'}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\delta U N_0^2 T}{B} \bar{w} \bar{N}^2 &= 0 \end{aligned}$$

注意到 $T \sim \frac{1}{f_0}$ ，所以 $\frac{UT}{L} \sim Ro \ll 1$ ，故 $\frac{\delta U N_0^2 T}{B} = 1 \Rightarrow B = \delta U N_0^2 T = \frac{UD N_0^2}{f_0 L}$

③ 对垂向的动量方程进行尺度分析有

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{UW}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{W^2}{L} \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\Phi}{D} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{z}} + B \bar{b}' \\ \downarrow \\ \delta f_0 U \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + Ro \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \delta \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) \right] &= -\frac{\Phi}{D} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{z}} + B \bar{b}' \\ \downarrow \\ \delta f_0 U \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \approx -\frac{\Phi}{D} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{z}} + B \bar{b}' &\Leftrightarrow \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \approx -\frac{\Phi f_0}{\delta U D N_0^2} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{z}} + \bar{b}' \end{aligned}$$

显然 $\frac{f_0^2}{N_0^2} \ll 1$ ，所以可以认为近惯性内波满足静力近似，且 $\Phi = \frac{\delta U D N_0^2}{f_0} = \frac{U D^2 N_0^2}{f_0 L}$

④ 水平动量方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f_0 v = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f_0 u = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \end{cases}$$

进行尺度分析如下：

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{U}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{U^2}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{WU}{D} \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - f_0 U \bar{v} = -\frac{U D^2 N_0^2}{f_0 L^2} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{x}} \\ \frac{U}{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{U^2}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{WU}{D} \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + f_0 U \bar{u} = -\frac{U D^2 N_0^2}{f_0 L^2} \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{y}} \end{cases} \\ & \quad \downarrow \\ & \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + Ro \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) - \bar{v} = -Bu \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + Ro \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{u} = -Bu \frac{\partial \bar{\phi}'}{\partial \bar{y}} \end{cases} \end{aligned}$$

由①可知 $Ro \ll 1, Bu \ll 1$ ，所以局地变化项与科氏力项占主导地位。

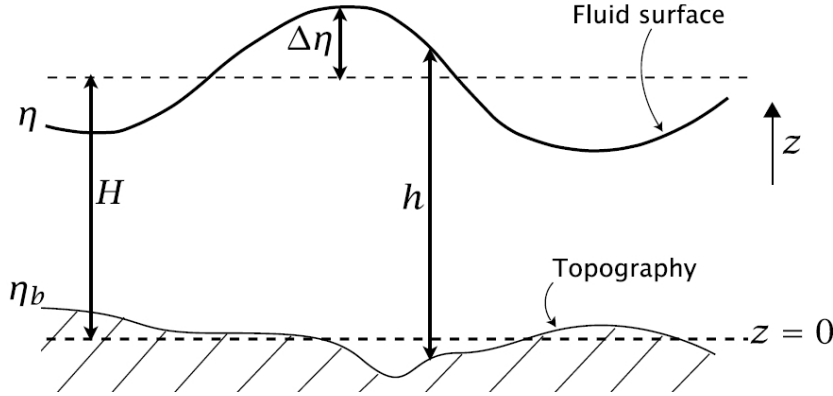
⑤ 通过前面的分析可知局地项与科氏力项平衡：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f_0 v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -f_0 u \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f_0 \zeta \neq 0$$

所以 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$ ，可以认为我们的先验假设是合理的。

§ 1.7 浅水方程

1. 单层流体浅水方程



四个前提条件：均质不可压流体；忽略流体的粘性；静力近似；β平面近似

(1) 静力近似

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} = -\rho g, \text{ 从海表面向深海积分, 有 } p(x, y, z) = -\rho g(z - \eta(x, y)) + p_0,$$

忽略大气压, 有 $p(x, y, z) = \rho g(\eta(x, y) - z)$, 两边求水平梯度, 有 $\nabla_h p = \rho g \nabla_h \eta$

(2) 水平动量方程与位势涡度

假设初始流速与 z 无关, 那么动量方程中的 $\frac{\partial}{\partial z}$ 项可以忽略。结合上述静力近似的表达, 于是得到水平动量方程表达式如下

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = f v - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -f u - g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2) \end{cases}$$

下面计算 $\frac{\partial}{\partial x}(2) - \frac{\partial}{\partial y}(1)$, 其中

$$\frac{\partial}{\partial y}(1) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} v + f \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = -\frac{\partial f}{\partial x} u - f \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

↓

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\beta v - f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

因为涡度的定义为 $\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, 所以上述式子最终化简为:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\beta v - f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

↓

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\beta v - (f + \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\beta v + (f + \zeta) \frac{\partial w}{\partial z}$$

因为 f 仅是 y 的函数，所以对上述公式进一步变形可以得到

$$\frac{d(f + \zeta)}{dt} = \frac{\partial(f + \zeta)}{\partial t} + u \frac{\partial(f + \zeta)}{\partial x} + v \frac{\partial(f + \zeta)}{\partial y} = -(f + \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

定义 $\zeta_a = \zeta + f$ ， ζ_a 称为绝度涡度， ζ 称为相对涡度(牵连涡度)， f 称为地转涡度。

(3) 连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

对方程两边分别从 η_b 到 η 积分有

$$\int_{\eta_b}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = - \int_{\eta_b}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz \Leftrightarrow h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = w \Big|_{z=\eta}^{z=\eta_b}$$

根据前面的边界条件，海底面方程为 $z = \eta_b(x, y)$ ，满足 $u \frac{\partial \eta_b}{\partial x} + v \frac{\partial \eta_b}{\partial y} - w = 0$ ；海

面方程为 $z = \eta(x, y, t)$ ，满足 $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} - w = 0$ ，代入上式得到

$$\frac{\partial(\eta - \eta_b)}{\partial t} + u \frac{\partial(\eta - \eta_b)}{\partial x} + v \frac{\partial(\eta - \eta_b)}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0$$

上述的方程物理意义也十分明显，当局地海表面变化变化时，将会引起水平方向的海水体积输送，即我们所说的海水的辐聚与辐散。

(4) 垂向流速与水柱拉伸

根据连续方程 $\frac{\partial w}{\partial z} = -\nabla_h \mathbf{V}_h$ ，做定积分

$$\int_{w_b}^w dw = - \int_{\eta_b}^z \nabla_h V_h dz \Leftrightarrow w = w_b - \nabla_h V_h (z - \eta_b)$$

上述式子可改写为 $\frac{dz}{dt} = \frac{d\eta_b}{dt} - \nabla_h V_h (z - \eta_b) \Leftrightarrow \frac{d \ln(z - \eta_b)}{dt} = -\nabla_h V_h$ ，将变量 z 换成

η ，有 $\frac{d \ln(\eta - \eta_b)}{dt} = -\nabla_h V_h$ ，于是得到

$$\frac{d \ln(z - \eta_b)}{dt} - \frac{d \ln(\eta - \eta_b)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{z - \eta_b}{\eta - \eta_b} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{z - \eta_b}{h} \right) = 0$$

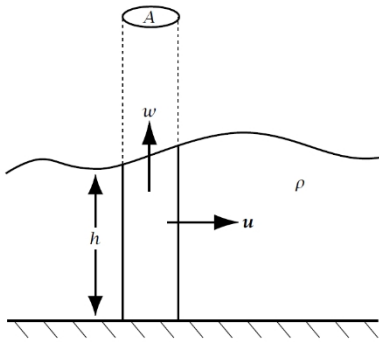
也就是说，当海表面与海底之间的距离发生变化时，海洋中任意深度处的海水与海底的距离也会随之发生变化，这就好比拉伸或者压缩一个弹簧。

(5) 位势涡度守恒与开尔文环流定理

前面推导水平动量方程时有涡度方程 $\frac{d\zeta_a}{dt} = -\zeta_a \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ ，在推导连续方程

时有 $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial(hu)}{\partial x} + v \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$ ，两式相比较有

$$\frac{1}{\zeta_a} \frac{d\zeta_a}{dt} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{d \ln \zeta_a}{dt} = \frac{d \ln h}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta_a}{h} \right) = 0$$



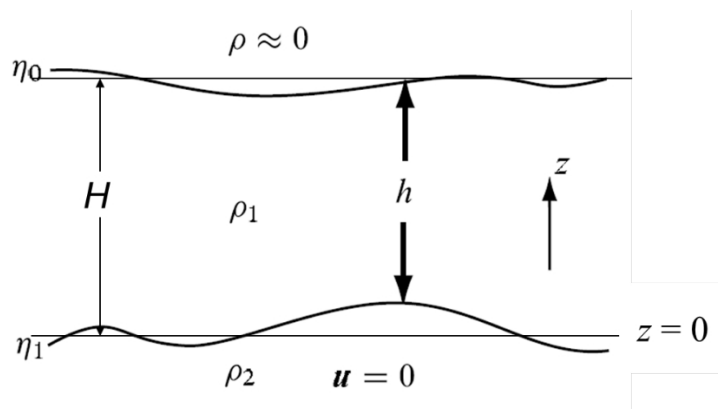
定义位势涡度 $q = \frac{\zeta_a}{h}$ ，可见位势涡度是守恒的。

开尔文环流定理表明，涡通量等于环流，而

$$\int \zeta_a dA = \int \frac{\zeta_a}{h} \cdot h dA = \int q dV$$

也即是说位势涡度的体积分与涡通量是等价的，且均等于环流。

2. 约化重力模型



该模型考虑的假设：每一层流体皆为均质不可压缩流体；忽略粘性效应；静力近似；β平面近似；无限深海，且深层流体近似为静止状态(也就是把海洋分成上下两层，下层是不运动的)

类比单层流体的水平动量方程(仍然认为初始流速与 z 无关)，于是得到上层的动量方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u \frac{\partial u_1}{\partial x} + v \frac{\partial u_1}{\partial y} = f v_1 - g \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + u \frac{\partial v_1}{\partial x} + v \frac{\partial v_1}{\partial y} = -f u_1 - g \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \end{cases}$$

同样可以得到连续方程表达式为 $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial (h u_1)}{\partial x} + v \frac{\partial (h v_1)}{\partial y} = 0$ ($h = \eta_0 - \eta_1$)

但是下层有所不同，对 $\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} = -\rho g$ 在 η_0 到 z ($z < 0$) 积分得到

$$p = \rho_1 g (\eta_0 - \eta_1) + \rho_2 g (\eta_1 - z) \Leftrightarrow \rho_1 g \eta_0 = -\rho_1 g' \eta_1 + \text{const}$$

其中 $g' = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$ 称为约化重力，显然 $g \gg g'$ ，所以可以得到 $\Delta \eta_0 \ll \Delta \eta_1$ ，即海

面的起伏可以忽略，称该条件为刚盖近似，从而连续方程中的 $h \approx H - \eta_1$ ，水平

动量方程中的 $-g \frac{\partial \eta_0}{\partial x} = g' \frac{\partial \eta_1}{\partial x}$ 。

3. 考虑粘性的情形

(1) 考虑水平湍流粘性

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = fv - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_H \nabla_H^2 v \\ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial hu}{\partial y} + \frac{\partial hv}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

(此时仍可认为水平流速与 z 无关)

(2) 考虑垂直湍流粘性

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{cases}$$

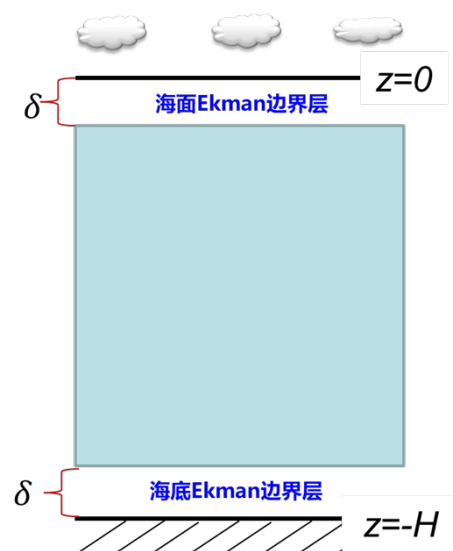
考虑了垂向流速以后,水流流速便不再与 z 无关了。考虑垂向运动尺度 $H=4000\text{m}$

垂向湍流粘性系数 $A_z=10^{-2}\text{m}^2/\text{s}$,

$f=10^{-4}\text{s}^{-1}$, 那么垂向 Ekman 数

$E_{k,v} = \frac{A_z}{fH^2} \ll 1$, 从尺度分析的结果来看, 湍

流粘性作用相对于科氏力可以忽略, 但是, 从另一个方面来说, 垂向湍流粘性作用一定不能忽略, 否则风无法驱动海水运动, 海底的流速也无法变为零。为了解决这个矛盾, 需要用边界层理论来解释。



在边界层中湍流粘性作用不可忽略; 在边界层以外垂向湍流粘性作用可忽略; 边界层厚度 δ 远小于水深 H ; 在边界层内运动的垂向尺度为 δ 。对动量方程做如下积分:

$$\frac{1}{H} \int_{-H}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dz = \frac{1}{H} A_z \int_{-H}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dz$$



$$\frac{1}{H} \int_{-H+\delta}^{-\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dz = \frac{1}{H} A_z \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=0}^{z=-H}$$



考虑垂向均匀无剪切, 忽略 $w \frac{\partial u}{\partial z}$ 项

$$\frac{H-2\delta}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\tau_{w,x} - \tau_{b,x}}{H \rho_0}$$



$\delta \ll H$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \frac{\tau_{w,x} - \tau_{b,x}}{H \rho_0} (\tau_{,x} = \rho_0 k u)$$

因此考虑垂直湍流粘性的水平动量方程可以写为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = fv - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{w,x} - \tau_{b,x}}{H \rho_0} (\tau_{,x} = \rho_0 k u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{w,y} - \tau_{b,y}}{H \rho_0} (\tau_{,y} = \rho_0 k v) \end{cases}$$

4. 浅水方程应用题

【例题 1】对于一层流体的浅水方程组:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = fv - g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{II})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (\text{III})$$

其中 u 和 v 水平流速, h 为从海面到海底的距离(这里假定平坦海底, 并设海底处 $z=0$), f 为科氏参数并随纬度变化。试回答以下问题:

- (1) 推导动能的控制方程, 并说明动能是否守恒?
- (2) 推导机械能的表达式, 并证明其守恒。
- (3) 设海面处 $z=0$, 重新推导机械能的表达式, 并探讨与(2)中的异同。

[分析] (1) 将上述标量方程写成矢量形式有

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g\nabla h & (1) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0 & (2) \end{cases} \quad (\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j})$$

(1)式两边点乘 $h\mathbf{u}$ 有

$$\begin{aligned} h \frac{d|\mathbf{u}|^2}{dt} &= -h\mathbf{u} \cdot (g\nabla h) \Leftrightarrow h \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial t} + h\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + gh\mathbf{u} \cdot \nabla h = 0 \\ &\downarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} h \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}) - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \nabla \cdot (h\mathbf{u}) + g\nabla \cdot (h^2\mathbf{u}) - gh\nabla \cdot (h\mathbf{u}) &= 0 \\ &\downarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} h \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \cdot (h\mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}) + g\nabla \cdot (h^2\mathbf{u}) - gh\nabla \cdot (h\mathbf{u}) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho_0 h \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \cdot (\rho_0 h\mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}) + g\nabla \cdot (\rho_0 h^2\mathbf{u}) - \rho_0 gh\nabla \cdot (h\mathbf{u}) &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

对(3)式做积分

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho_0 h \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dS + \nabla \cdot \left(\int_S \rho_0 h\mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dS \right) + g\nabla \cdot \left(\int_S \rho_0 h^2\mathbf{u} dS \right) - \int_S \rho_0 gh\nabla \cdot (h\mathbf{u}) dS = 0$$

注意到 $E_k = \int_S \rho_0 h \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dS$, 而 $\int_S \rho_0 h\mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dS = \int_{E_{k,-h}}^{E_{k,0}} \mathbf{u} dE_k$, $\int_S \rho_0 h^2\mathbf{u} dS = \int_{p-h}^{p_0} h dp$, 其中 p

表示动量, 对于整层海水而言, 初始状态静止, $E_{k,0} = 0$, 在海底也有速度为 0,

即 $E_{k,-h} = 0$, 而动量与动能的关系为 $\frac{p^2}{2m} = E_k$, 从而可以得到

$$\int_S \rho_0 h\mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dS = \int_S \rho_0 h^2\mathbf{u} dS = 0$$

所以动能方程为 $\frac{\partial E_k}{\partial t} = \int_S \rho_0 gh\nabla \cdot (h\mathbf{u}) dS$ (4), 显然动能不守恒。

(2) 以海底为零势能面, 单位面积上处在深度为 z 处的海水微团的势能可以表示为 $dE_p = \rho_0 g z dz$, 于是海水的总的势能可以表示为

$$E_p = \int_S \left(\int_0^h \rho_0 g z dz \right) dS = \int_S \rho_0 g \frac{h^2}{2} dS \Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial t} = \int_S \rho_0 g h \frac{\partial h}{\partial t} dS = - \int_S \rho_0 g h \nabla \cdot (h\mathbf{u}) dS$$

结合(4)式, 有 $\frac{\partial E_k}{\partial t} = -\frac{\partial E_p}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial (E_k + E_p)}{\partial t} = 0$, 即机械能是守恒的。

(3) 若将参考平面设在海面, 那么此时势能的表达式发生变化(设海水的平均深度为 H):

$$E_p = \int_S \left(\int_{-H}^{h-H} \rho_0 g z dz \right) dS = \int_S \rho_0 g \frac{h^2}{2} dS - H \int_S \rho_0 g h dS$$

于是 $\frac{\partial E_p}{\partial t} = - \int_S \rho_0 g h \nabla \cdot (h \mathbf{u}) dS - H \frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho_0 g h dS$, 根据质量守恒可知 $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho_0 g h dS = 0$,

所以仍然有 $\frac{\partial (E_k + E_p)}{\partial t} = 0$, 即机械能是守恒的。

【例题 2】梯度风平衡(gradient wind balance): 对于定常流动的一层流体的浅水方程组:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = f v - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -f u - g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2)$$

其中 u 和 v 水平流速, η 为海表面高度(这里假定平坦海底, 并设静止海面处 $z=0$), f 为科氏参数并采用 f 平面近似。试回答以下问题:

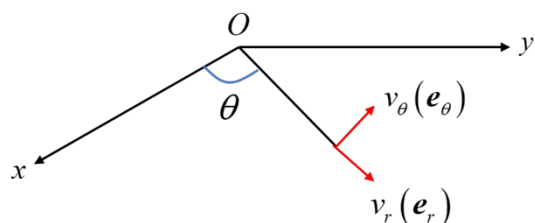
(1) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 求解方程(1)和(2)在极坐标系下的表达式

(2) 假设流动不依赖于 θ , 此即为梯度风平衡。进一步假设 $\eta = A e^{-r}$ (其中 A 可正可负), 请比较梯度风平衡与地转平衡下流动的差异。并说明在何种情况下, 梯度风平衡可以近似为地转平衡?

[分析] (1) 同样的我们把标量方程写成矢量形式

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g \nabla h$$

容易证明, 二维极坐标下, 梯度算子可以表示为: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$



在极坐标系下, 速度矢量为

$$\mathbf{u} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \text{ 且}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r \text{ 于是}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = v_r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

而科氏力项又可以写为 $f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -fv_\theta \mathbf{e}_r + fv_r \mathbf{e}_\theta$, 综上, 可以得到极坐标系下的运动方程组为

$$\begin{cases} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) - fv_\theta = -g \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) + fv_r = -g \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{cases}$$

(2) 根据假设有 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, 上述方程化简为

$$\begin{cases} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) - fv_\theta = -g \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) + fv_r = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{匀速率圆周运动}} \begin{cases} -\frac{v_\theta^2}{r} - fv_\theta = -g \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ fv_r = 0 \end{cases}$$

对于大尺度运动 ($Ro \ll 1$), 可认为 $r \rightarrow \infty$, 此时 $-fv_\theta = -g \frac{\partial \eta}{\partial r}$, 即梯度风平衡可以近似认为是地转平衡。

参考资料

- [1] [海水运动基本方程](#)
- [2] [流体力学\(旋转流体动力学\)](#)
- [3] [卫星上的钟——三谈势场及其零点的选取](#)
- [4] [各种度, 梯度, 散度, 旋度坐标变换](#)
- [5] [三种常用坐标系中的矢量场](#)
- [6] [流体力学课件: Chapter8-湍流](#)
- [7] [第三章海洋的声学特性资料](#)
- [8] [大气海洋学 \(ustc.edu.cn\)](#)
- [9] [地球流体力学: 第二章 第二节 海洋近似](#)

第二章 海流

§ 1.1 地转流

1. 海流

海流是海水大规模的具有相对稳定速度的非周期性流动。可以对物质、热量进行迁移,起到调节气候、输送污染物等作用,在寒暖流的交汇处,还能形成渔场。按动力学成因可以称为风生海流(海面风、盛行风所致),按热力学成因又可以称为热盐环流(受降水蒸发导致密度不均)。

2. 地转流

不考虑海面风的作用,远离沿岸的大洋中部大尺度、准水平、定常的海水流动,此流动是水平压强梯度力和科氏力平衡的流动

$$fv = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

我们仍然考虑静力近似: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, 积分可以得到

$$p = p_{air} + \int_z^\eta \rho g dz = p_{air} + \int_z^0 \rho g dz + \int_0^\eta \rho g dz$$

第三项可以表示海表面起伏产生压强,实际情况海表面起伏很小,所以可以取密度为常数,故 $\int_0^\eta \rho g dz = \rho_0 g \eta$, 两边取水平梯度散度,水平气压对海水压强的变化很小可以忽略,有

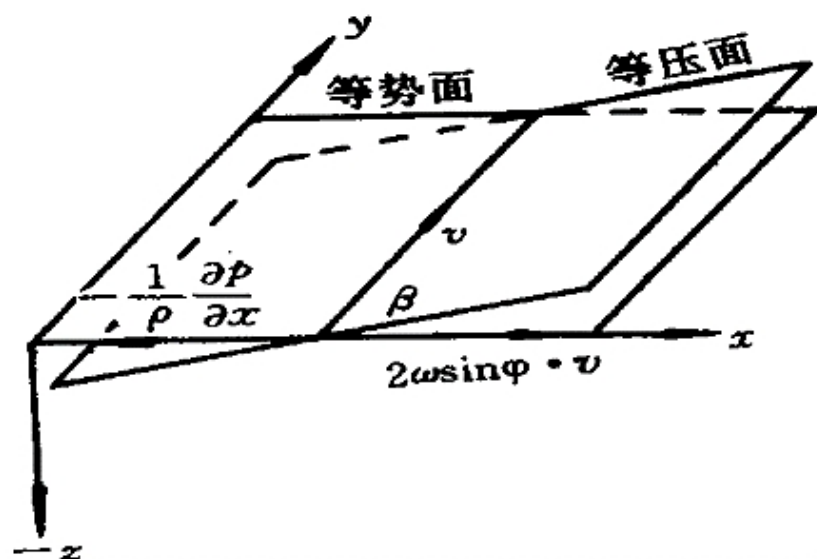
$$\nabla_h p = \rho_0 g \nabla_h \eta + g \int_z^0 \nabla_h \rho dz$$

如下图所示,假设等势面为 xOy 面,等压面只沿 x 方向倾斜($p = p(x, z)$), 夹角为 β , 在等压面上满足 $dp = 0$, 进行全微分展开有 $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz$, 即 $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dx}$, 于是可得地转流的大小

$$v = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{f\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dx} \right) = \frac{g}{f} \tan \beta$$

上式表明,地转流的流速大小与等压面倾角的正切成正比,与科氏参量 f 成反比,

注意在赤道处 $f=0$ ，上式不适用。



地转流的两种形式——梯度流和倾斜流，下面分别对这两种流动展开讨论。

【知识补充】海洋中的压强场

- (1) 内压场：由海洋内部密度差异形成的斜压场。其特点：上层斜压性强；随深度增加，斜压性减弱至某一深度，等压面与等势面基本平行。
- (2) 外压场：外因(风、径流、降水)引起海面倾斜所产生的压力场。
- (3) 总压场：内压场与外压场叠加在一起。海洋实际多是如此。

3. 倾斜流

海水密度为常数；水平方向的压强梯度是由海面倾斜引起的，有

$$\nabla_h p = \rho_0 g \nabla_h \eta + g \int_z^0 \nabla_h \rho dz$$

将地转平衡公式代入，可得 $f v = g \frac{\partial \eta}{\partial x}$ ， $-f u = g \frac{\partial \eta}{\partial y}$ ，该式表明，倾斜流与

海表面的高度等值线平行。倾斜流从表至底流速流向相同(不考虑底摩擦)，压强梯度力相同。在北半球，背向流速而立，右侧水位高，左侧水位低。

4. 梯度流

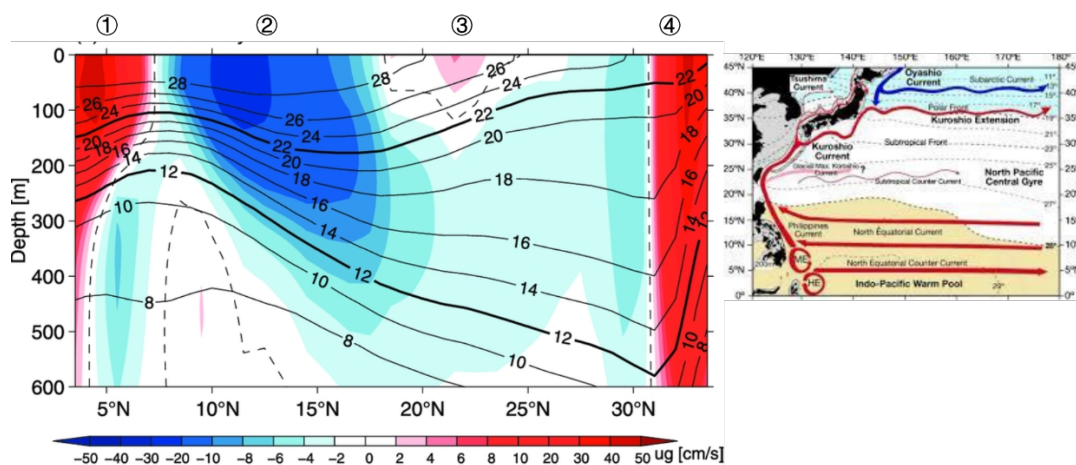
海表面高度为常数；水平方向的压强梯度是由密度的水平分布不均匀引起的，有

$$\nabla_h p = \rho_0 g \nabla_h \eta + g \int_z^0 \nabla_h \rho dz$$

同样的将地转平衡公式代入可得到重要的热成风关系:

$$f \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad f \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

热成风关系构建了垂直流速的变化和水平密度(温度)变化之间的关系,是大洋中非常重要的流速和密度(温度)的关系式。假设流速垂向递减(这样的话 u 的方向可以由 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 来确定),有结论:北半球,背向流速,右侧为低密度(高温、低盐)海水,左侧为高密度(低温、高盐)海水;南半球相反。(可以结合下图理解该结论)



▲ 北半球纬向流速-深度剖面

(①北赤道逆流; ②北赤道流; ③副热带逆流; ④黑潮延伸体。等值线表示温度, $u > 0$ 表示自西向东流动)

§ 1.2 考虑摩擦的定常流动

1. Ekman 漂流

由恒速定常的风长时间驱动大尺度、均匀密度的海洋,所产生的处于稳定状态的海流称为 Ekman 漂流。在远离海岸的深海中,海底对运动没有影响(无底摩擦效应),称为无限深海的漂流。在近岸水域中,海底将产生一定影响(有底摩擦效应),称为有限深海的漂流(或浅海风海流)。

2. 无限深海漂流(重点掌握)

(1) 基本假定

- 北半球稳定风场、长时间吹(局地变化项可以忽略);
- 无限广阔、无限深海, 远离海岸;
- 海水密度均匀、海面水平(不考虑水平压强梯度力);
- f 平面近似, 即不考虑科氏力随纬度的变化
- 只考虑由铅直湍流导致的水平湍切应力, 且假定铅直湍流粘滞系数为常数

(2) 基本假定下的方程组

$$\begin{cases} 0 = fv + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} & (1) \\ 0 = -fu + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} & (2) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

(3) 方程的求解——利用复变函数理论

构建复数 $W = u + iv$, 将 (1) + (2) $\times i$ 有

$$A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + iA_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = f(iu - v) \Leftrightarrow A_z \frac{\partial^2 (u + iv)}{\partial z^2} = if(u + iv) \Leftrightarrow A_z \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = ifW$$

将 $f = 2\Omega \sin \varphi$ 代入, 有

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{2i\Omega \sin \varphi}{A_z} W = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 W}{dz^2} - j^2 W = 0 \left(j^2 = (1+i)^2 a^2, a = \sqrt{\frac{\Omega \sin \varphi}{A_z}} \right)$$

上述方程的通解为: $W = Ae^{-jz} + Be^{jz}$, 假定在 $z = 0$ 处, 风只沿 y 轴向北吹, 则有

风应力 $\tau = \tau_x + i\tau_y = i\tau_y$ 。边界条件为

$$\begin{cases} z = 0: \quad \rho A_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \rho A_z \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \\ z \rightarrow -\infty: \quad u = v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0: \quad \rho A_z \frac{\partial W}{\partial z} = \tau \\ z \rightarrow -\infty: \quad W = 0 \end{cases}$$

代入边界条件可以解得 $A = 0, B = \frac{\tau}{j\rho A_z}$, 所以 $W = \frac{\tau}{j\rho A_z} e^{jz} = \frac{i\tau_y}{(1+i)a\rho A_z} e^{(1+i)az}$

(4) 方程解的讨论

根据欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 有 $i = e^{i\frac{\pi}{2}}, 1+i = \sqrt{2}i = \sqrt{2}i^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, 所以

方程的解又可以写为 $W = \frac{\tau_y}{\sqrt{2a\rho A_z}} e^{az+i\left(\frac{\pi}{4}+az\right)}$ ，当 $z=0$ 时， $W_0 = \frac{\tau_y}{\sqrt{2a\rho A_z}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ ；当

$z = -\frac{\pi}{a}$ 时， $W_{D_0} = \frac{\tau_y}{\sqrt{2a\rho A_z}} e^{-\pi+i\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right)}$ 。容易证明， $e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ，从而可见 W_0 与 W_{D_0}

相差了 180° ，从表达式也可以知道，在表层的方向为 45° ，在 D_0 处方向为 225° (-135°)。由此定义摩擦深度 $D_0 = \frac{\pi}{a}$ ，它表示 Ekman 漂流流向随深度增加

而偏转至与表层相反时的深度。因此速度表达式又可以写为

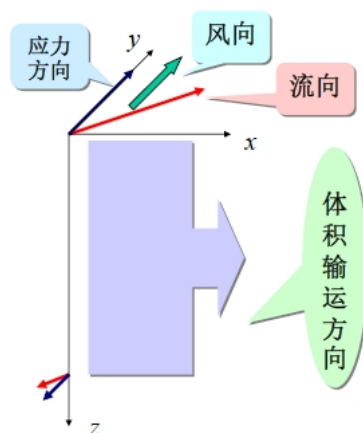
$$W = \frac{\tau_y}{\sqrt{2a\rho A_z}} e^{az+i\left(\frac{\pi}{4}+az\right)} = \frac{\tau_y}{\sqrt{2a\rho A_z}} e^{\frac{\pi}{D_0}z+i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{D_0}z\right)}$$

在摩擦深度处，其流速大小为表层的 $e^{-\pi}$ 倍(0.0432)。其空间结构为：表层流速最大流向偏向风向的右方 45° ；随深度增加 流速逐渐减小流向逐渐右偏；至摩擦深度 流速是表面流速的 4.3%， 流向与表面流向相反且运动可忽略。连接各层流速的矢量端点构成 Ekman 螺旋；Ekman 螺旋在平面上的投影称为 Ekman 螺线。

对复速度在垂向上积分，有

$$S = \int_{-\infty}^0 W dz = \frac{i\tau_y}{(1+i)a\rho A_z} \int_{-\infty}^0 e^{(1+i)az} dz = \frac{\tau_y}{2\Omega \sin \phi \rho} = \frac{\tau_y}{f\rho} + 0i$$

上式表明 **体积输运方向垂直风向，在北半球向风向右边 90° 输运**。它是风应力与科氏力相平衡的结果。



3. 有限深海漂流

在无限深海假设中，将无限深改为有限深，同样有

$$\begin{cases} 0 = fv + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = -fu + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 W}{dz^2} - j^2 W = 0 \left(j = (1+i)a, a = \sqrt{\frac{\Omega \sin \varphi}{A_z}} \right)$$

$$\begin{cases} z=0: \quad \rho A_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \rho A_z \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \\ z=-H: \quad u = v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0: \quad \rho A_z \frac{\partial W}{\partial z} = \tau \\ z \rightarrow -H: \quad W = 0 \end{cases}$$

为了方便后面求解和表示，我们设通解形式为 $W = Ae^{-j(z+H)} + Be^{j(z+H)}$ ，代入边界条件

$$\begin{cases} \rho A_z (-jAe^{-jH} + jBe^{jH}) = \tau \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B = -A = \frac{\tau}{2\rho j A_z \cosh(jH)}$$

所以解为 $W = \frac{\tau}{2\rho j A_z \cosh(jH)} [e^{j(z+H)} - e^{-j(z+H)}]$ ，关于解的讨论：

(1) $H \gg D_0$

此时可以认为 H 很大，有 $e^{-jH} \approx 0$ ，所以 $2\cosh(jH) \approx e^{jH}$ ，此时方程的解又

可以写为 $W = \frac{\tau}{j\rho A_z} e^{jz}$ ，这便是无限深海的情形。

(2) $H \ll D_0$

此时认为水十分的浅，所以有 $e^{\pm j(z+H)} \approx 1 \pm j(z+H)$ ，所以

$$\frac{e^{j(z+H)} - e^{-j(z+H)}}{2\cosh(jH)} = \frac{e^{j(z+H)} - e^{-j(z+H)}}{e^{jH} + e^{-jH}} = \frac{1 + j(z+H) - 1 + j(z+H)}{1 + jH + 1 - jH} = 2j(z+H)$$

故方程的解又可以写为 $W = \frac{\tau}{\rho A_z} (z+H)$ ，此时有 $\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\tau}{\rho A_z} = \text{const}$ ，即从表面到

底部的应力是一致的，也就是表面的风应力与底部的摩擦力相平衡，此时可以不考虑科氏力的影响。

[注]

➤ $H \geq 2D_0$ 时，有限深海漂流流速流向与无限深海相同；

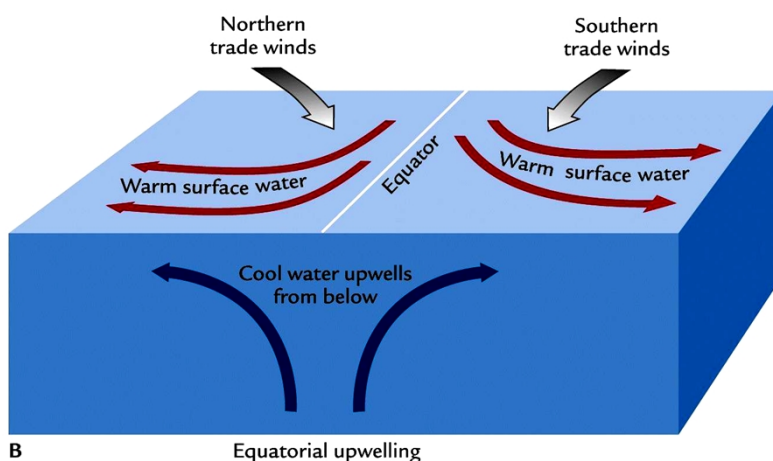
- 水深越浅，流向随深度增加右偏(北半球)越缓慢；且从上层到下层的流速矢量越是趋近风矢量的方向。

4. 升降流——结合 Ekman 体积输运的概念理解

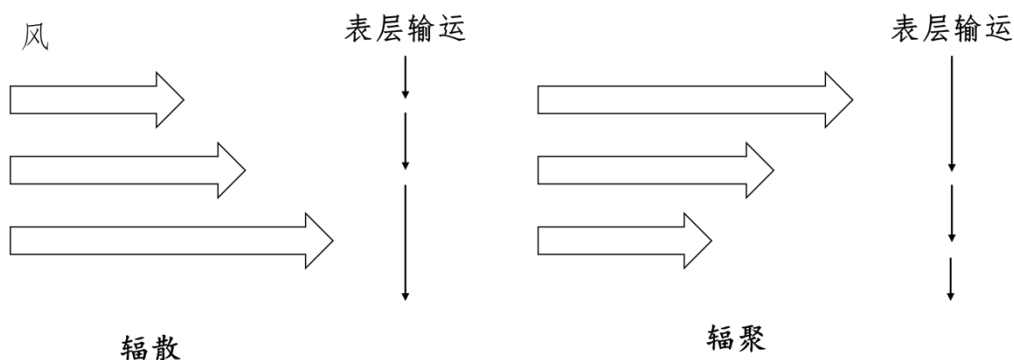
定义：是由不均匀风场或风场和地形配合产生的“较强烈”的铅直向流动。



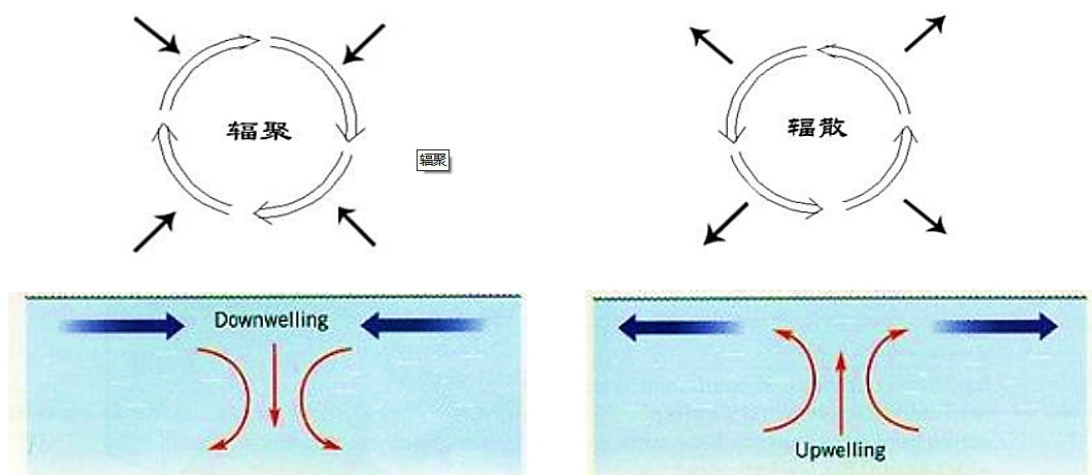
(1) 非均匀风场引起的辐聚、辐散



- ▲ 赤道附近，北半球海表面为东北信风，海水体积输运在风向右侧；南半球海表面为东南信风，海水体积输运在风向左侧。



(2) 气旋和反气旋产生的升降流



5. Ekman 抽吸与风应力的关系

$$\begin{cases} \rho f v + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0 & \tau_x = \rho A_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ -\rho f u + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0 & \tau_y = \rho A_z \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} S_{Ey} &= \int_{-d}^0 v dz = -\frac{1}{f\rho} \int_{-d}^0 \frac{\partial \tau_x}{\partial z} dz = -\frac{\tau_{x,0}}{f\rho} \\ S_{Ex} &= \int_{-d}^0 u dz = \frac{1}{f\rho} \int_{-d}^0 \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz = \frac{\tau_{y,0}}{f\rho} \end{aligned}$$

或者根据前面的推导有关系式 $W = \frac{\tau}{(1+i)\rho a A_z} e^{(1+i)az} \left(a = \sqrt{\frac{\Omega \sin \varphi}{A_z}}, \tau = \tau_x + i\tau_y \right)$,

垂向积分可得

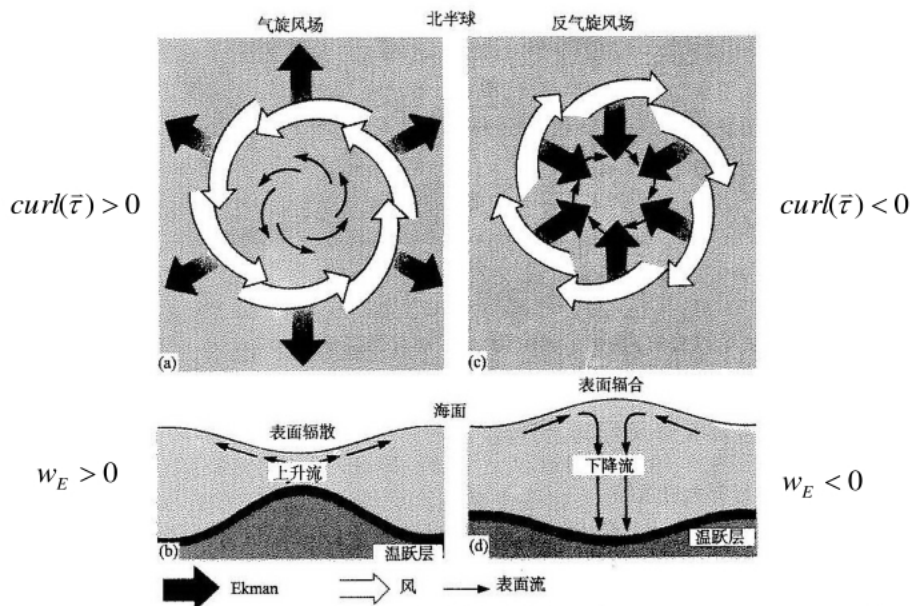
$$S = \int_{-d}^0 W dz = \int_{-d}^0 \frac{\tau_x}{(1+i)\rho a A_z} e^{(1+i)az} dz + i \int_{-d}^0 \frac{\tau_y}{(1+i)\rho a A_z} e^{(1+i)az} dz = \frac{\tau_y}{f\rho} - i \frac{\tau_x}{f\rho} (d \geq 2D_0)$$

对连续方程做积分

$$\begin{aligned} \int_{-d}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-d}^0 u dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-d}^0 v dz \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{-d}^0 w dz \right) \\ &\downarrow \\ \frac{1}{f\rho} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) &= -[\cancel{w(0)} - w(-d)] = w_E \end{aligned}$$

注意是在海表面处的垂向流速为 0，因为我们之前的假设是海表面的高度不发生变化，

其中 $w_E = \text{curl} \left(\frac{\tau}{\rho f} \right)$ (Curl 表示旋度符号) 代表 Ekman 底层的垂直速度。这个物理情景与我们前面提到的气旋式或反气旋式风场引起的升降流结论是一致的。



§ 1.3 惯性流

1. 假定

大尺度运动；远离海岸和海底； ρ 为常数；海面无倾斜；非定常风场。

2. 方程推导

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = 0(1) \\ \frac{dv}{dt} + fu = 0(2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \times u + (2) \times v} \frac{d}{dt}(u^2 + v^2) = 0 \Rightarrow u^2 + v^2 = V_0^2 (V_0 = \text{const})$$

3. 分析

(1) 有上面的方程推导可知惯性流为一匀速率运动；

(2) 科氏力在惯性运动中充当向心力，运动半径 $r = \frac{V_0}{f} = \frac{V_0}{2\Omega \sin \varphi}$ ，半径随纬度的

增加而减小，在赤道处 $r \rightarrow \infty$ ，水质点做直线运动。

$$\begin{cases} v = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{f} \frac{du}{dt} \\ u = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{dv}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{对 } t \text{ 积分}} \begin{cases} y - \left(y_0 - \frac{u_0}{f}\right) = \frac{u}{f} \\ x - \left(x_0 + \frac{u_0}{f}\right) = -\frac{v}{f} \end{cases} \Rightarrow (y - y'_0)^2 + (x - x'_0)^2 = \frac{V_0^2}{f^2} = r^2$$

(3) 周期： $T_i = \frac{2\pi r}{V_0} = \frac{2\pi}{f} = \frac{\pi}{\Omega \sin \varphi}$

- (4) 由于是科氏力提供向心力，所以惯性流的圆周运动方向只有一个，在北半球为顺时针，南半球为逆时针；
- (5) 静止海水，圆心位于同一条铅直线上，海水质点可认为在做刚体旋转；实际大洋的流动中海水不是静止的，所以海水并不是闭合的圆。

§ 1.4 风生大洋环流

1. Sverdrup 理论(重点掌握)

(1) 假设条件

定常流动的大尺度弱流；平坦海底；忽略底摩擦和侧摩擦；采用 β 平面近似

$$U \sim 0.1 \text{ m/s}, f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}, L = 10^7 \text{ m (万 km)}, \Delta\eta \sim 1 \text{ m}, H \sim 10^3 \text{ m}, \beta = \frac{2\Omega \cos \varphi}{a} \sim 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Ro \ll 1, U \ll \beta L^2, \Delta\eta \ll H$$

(2) 方程推导和解

根据假设，我们对运动方程进行简化

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= f v - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{w,x} - \tau_{b,x}}{H \rho_0} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -f u - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{w,y} - \tau_{b,y}}{H \rho_0} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 = f v - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{w,x}}{H \rho_0} & (1) \\ 0 = -f u - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{w,y}}{H \rho_0} & (2) \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}(2) - \frac{\partial}{\partial y}(1)} \beta v = \text{curl} \frac{\tau_w}{H \rho_0}$$

上式得到结论称为 Sverdrup 平衡。

(3) Sverdrup 解的物理意义

位涡守恒是海洋环流中的重要定理，下面从位势涡度来讨论 Sverdrup 关系。

参照前面浅水方程推导位势涡度的方法，可里得到位势涡度的表达式为

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \text{curl} \frac{\tau_w}{H \rho_0}$$

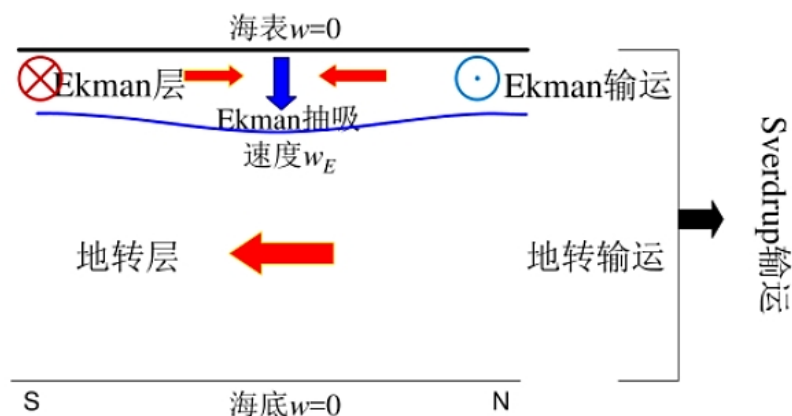
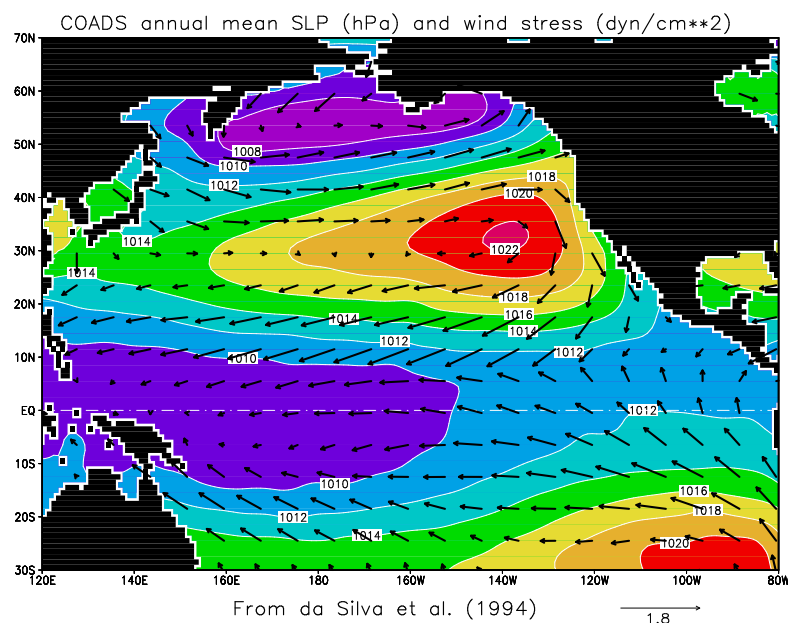
由连续方程 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$, 代入上式有

$$\zeta + f \left[\frac{1}{\zeta + f} \frac{d}{dt} (\zeta + f) - \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \right] = \text{curl} \frac{\tau}{\rho_0 H} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = \text{curl} \frac{\tau}{\rho_0 H h}$$

对于北半球副热带环流(反气旋式), 风应力的旋度为负, 从而流体微团的位势涡度在不断地减小。那么如何平衡这种减小呢? 我们对位势涡度进行数学处理

$$\frac{\zeta + f}{h} = \frac{f_0}{H} \cdot \frac{1 + \frac{\beta y}{f_0} + \frac{\zeta}{f_0}}{1 + \frac{\Delta \eta}{H}} \stackrel{\text{分母Taylor展开}}{\approx} \frac{f_0}{H} \left[\left(1 + \frac{\beta y}{f_0} + \frac{\zeta}{f_0} \right) \left(1 - \frac{\Delta \eta}{H} \right) \right] \approx \frac{f_0}{H} + \frac{\beta y}{H}$$

上式表明, 位势涡度的变化基本上由行星涡度 f_0 决定, 所以要满足位势涡度减小的条件, 应该使得行星涡度减小, 故流体应该向赤道流动。



(4) Sverdrup 解的局限性

引入流函数 ϕ ，并令 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = v, \frac{\partial \phi}{\partial y} = -u$ (这里和我们之前所学过的定义有所不同，

但是不影响我们的结论，主要是为了后面的方程推导表示方便)。代入 Sverdrup

解中有 $\beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = \text{curl} \frac{\tau_w}{H \rho_0}$ 。在东西边界上，我们假设水平无粘性，应改变满足法

向速度为 0 的条件，即 $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ ，但是 Sverdrup 方程显然是一个关于 ϕ 的一阶微分

方程，所以最多只能满足一个边界条件，这边是 Sverdrup 解的局限性所在。

$$\text{curl} \frac{\tau_w}{H \rho_0} = -F \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

$$\phi = \frac{(x_E - x)}{\beta} F \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad \phi = \frac{(x_W - x)}{\beta} F \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

2. Stommel 模型(考虑底摩擦)

此时水平动量方程为

$$\begin{cases} 0 = fv - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{w,x} - \rho_0 k u}{H \rho_0} & (1) \\ 0 = -fu - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{w,y} - \rho_0 k v}{H \rho_0} & (2) \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}(2) - \frac{\partial}{\partial y}(1)} \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{k}{H} \nabla^2 \phi = \text{curl} \frac{\tau_w}{H \rho_0}$$

(1) 无量纲化——大洋内区 $x = x'L, y = y'L$

$$\frac{\beta \phi}{L} \frac{\partial \phi'}{\partial x'} + \frac{k \phi}{HL^2} \nabla'^2 \phi' = F \text{curl} \tau'_w$$

我们仍然假设风应力项与 β 效应项是同量级的 $\frac{\beta \phi}{L} = F$ (与前面的 Sverdrup 模型一

致)，于是方程可化为

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'} + \frac{k}{\beta H L} \nabla^2 \phi' = \text{curl } \tau'_w$$

定义 **Stommel** 边界层厚度 $\delta_s = \frac{k}{\beta H}$ ，可以证明， $\delta_s \ll L$ (大洋内区尺度)，于是

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'} = \text{curl } \tau'_w \Leftrightarrow \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = \text{curl } \frac{\tau_w}{H \rho_0}, \text{ 即 Stommel 模型的内区解就是 Sverdrup 解。}$$

(2) 无量纲化——边界层 $x = x^* \delta_s, y = y' L$

$$\frac{\beta \phi}{\delta_s} \frac{\partial \phi'}{\partial x^*} + \frac{k \phi}{H \delta_s^2} \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^{*2}} + \frac{\delta_s^2}{L^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^{*2}} \right) = F \text{curl } \tau'_w$$

同样我们先验假设 $\frac{\beta \phi}{L} = F$ ，即边界层与大洋内区的流函数 $\phi = \frac{FL}{\beta}$ ，因为由

流函数的性质可知，它应该是连续的，所以在整个海盆它的量级应该一致，但是变化率可以有所不同(反映出流速的不同)。方程可以表示为

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x^*} + \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^{*2}} + \frac{\delta_s^2}{L^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^{*2}} \right) = \frac{\delta_s}{L} \text{curl } \tau'_w$$

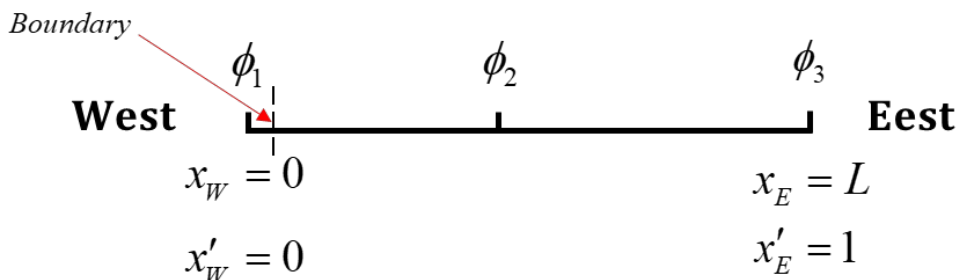
因为 $\delta_s \ll L$ ，所以方程简化为 $\frac{\partial \phi'}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^{*2}} = 0 \Leftrightarrow \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{k}{H} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$

(3) **Stommel** 模型的求解——假定边界层在大洋西边界

前面提到，在大洋内区满足方程 $\frac{\partial \phi'}{\partial x'} = -\sin(\pi y')$ ，而在边界层满足

$\frac{\partial \phi'}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^{*2}} = 0$ 。不妨假设解的构成为 $\phi' = \phi'_I + \phi'_B$ (内区解+边界层解)，边界条件为

$$x' = 0, x' = 1 \text{ 时, } \phi' = 0$$



[注意] 对于一个闭合的海盆，流过任意一个截面的流量应该守恒，如上图所示，这就要求在东西边界上， ϕ_1, ϕ_2 应该为同一个常数，又根据流函数的连续性，可知 $\phi = const$ ，不妨取 0 流线，即 $\phi = 0$ 。另外，对于 ϕ'_I, ϕ'_B ，他们只有在各自区域内才不为 0，例如，在边界层内 $\phi'_I = 0$

➤ 在大洋内区 $\phi' \approx \phi'_I$

$$\frac{\partial \phi'_I}{\partial x'} = -\sin(\pi y'), x' = 1, \phi' \approx \phi'_I = 0$$

解次微分方程可得 $\phi'_I = (1-x')\sin(\pi y') \Leftrightarrow \phi_I = \frac{F}{\beta}(x_E - x)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$

➤ 边界层内

$$\frac{\partial \phi'_B}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 \phi'_B}{\partial x^{*2}} = 0$$

我们可以从另一个角度来说明为什么 ϕ'_I 关于 x^* 的一阶、二阶偏导可以忽略。

由前面的分析可以知道 $\begin{cases} x = Lx' \\ x = \delta x^* \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{\delta}{L}x^*$ ，所以

$$\frac{\partial \phi'_I}{\partial x^*} = \frac{\partial \phi'_I}{\partial x'} \frac{dx'}{dx^*} = \frac{\delta}{L} \frac{\partial \phi'_I}{\partial x'} \left(\frac{\delta}{L} \ll 1 \right)$$

上述方程为一个二阶常系数齐次微分方程，其通解为

$$\phi'_B = C_1 e^{-x^*} + C_2$$

其边界条件为 $x^* = 0, \phi'_B = -\phi'_I; x^* \rightarrow +\infty$ (出边界层), $\phi'_B \rightarrow 0$ ，从而解得

$$\phi'_B = -\phi'_I|_{x^*=0} e^{-x^*} = -\sin \pi y' e^{-x^*}$$

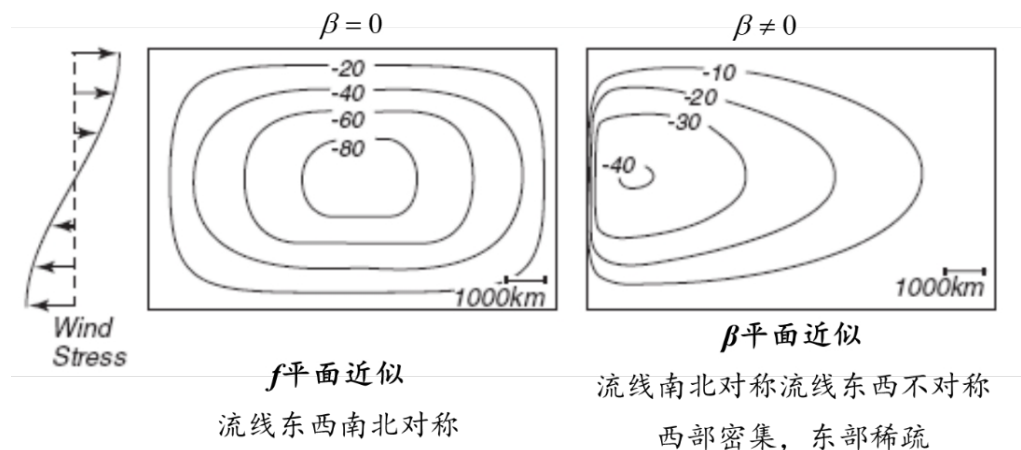
综上所述可得， $\phi = \frac{F}{\beta}(x_E - x)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) - \frac{F}{\beta}(x_E - x_w)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)e^{-\frac{x}{\delta}}$

显然，在大洋内区， $x = L \Rightarrow \frac{L}{\delta} \rightarrow +\infty$ ，即 Stommel 大洋内区解就是 Sverdrup 解。

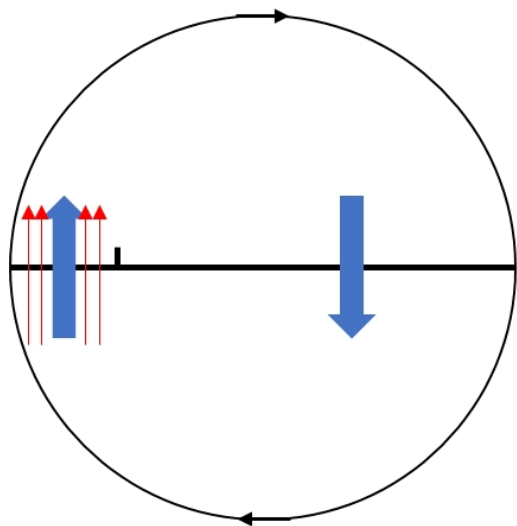
我们得出的结论是先验假定边界层在西边界区，可以证明，如果假设边界层

在东边界区，方程的形式与前面仍然相同，但其解与实际意义不相符。因为我们总是假定自西向东方向为 x 轴正向，当我们把边界层设定在东边时，边界条件应修改为 $x^* \rightarrow -\infty$ （出边界层）， $\phi'_B \rightarrow 0$ ，这样， $C_1 = C_2 \equiv 0$ ，这样的平凡解显然是不符合我们的要求的。

下图表明： **β 效应是引起大洋西向强化的重要原因。**



我们从物理现实的角度来理解为什么是在大洋西侧出现强流。



根据 Sverdrup 平衡解有 $\beta v = \text{curl} \frac{\tau_w}{H\rho_0}$ ，在

北半球的中纬度，风应力产生一个顺时针

环流，即 $\text{curl} \frac{\tau_w}{H\rho_0} < 0$ ，而 $\beta > 0$ ，这就要

求 $v < 0$ ，即大洋内区流动应该由南向北，

为保证通过任意一个截面的流量守恒，在

边界层内应该有由北向南的流动。由于边

界层的水平尺度比大洋内区的小，为保证

流量的守恒，这必然要求在边界层内的流动需要加强，即所谓的西向强化。

3. Munk 模型(考虑侧摩擦)

$$\begin{cases} 0 = f_v - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_{w,x}}{H \rho_0} + A_H \nabla^2 u (1) \\ 0 = -f_u - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_{w,y}}{H \rho_0} + A_H \nabla^2 v (2) \end{cases} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}(2) - \frac{\partial}{\partial y}(1)} \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} - A_H \nabla^4 \phi = \text{curl} \frac{\tau_w}{H \rho_0}$$

[注]

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial(\nabla^2 u)}{\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\ \frac{\partial(\nabla^2 v)}{\partial x} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(\nabla^2 v)}{\partial x} - \frac{\partial(\nabla^2 u)}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nabla^4 \phi$$

(1) 无量纲化——大洋内区 $x = x'L, y = y'L$

$$\frac{\beta \Phi}{L} \frac{\partial \phi'}{\partial x'} - \frac{A_H \Phi}{L^4} \nabla^4 \phi' = F \text{curl} \tau'_w$$

同样的我们有 $\frac{\beta \Phi}{L} = F$ ，于是上述方程可以化为

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'} - \frac{\delta_M^3}{L^3} \nabla^4 \phi' = \text{curl} \tau'_w \left(\delta_M = \sqrt[3]{\frac{A_H}{\beta}}, \text{Munk 边界层厚度} \right)$$

因为 $\delta_M \ll L$ ，所以 $\frac{\partial \phi'}{\partial x'} = \text{curl} \tau'_w$ ，所以 Munk 模型的内区解就是 Sverdrup 解。

(2) 无量纲化——西边界层 $x = x^* \delta_M, y = y'L$

$$\frac{\beta \Phi}{\delta_M} \frac{\partial \phi'}{\partial x^*} - \frac{A_H \Phi}{\delta_M^4} \left(\frac{\partial^4 \phi'}{\partial x^{*4}} + \frac{\delta_M^4}{L^4} \frac{\partial^4 \phi'}{\partial y^{*4}} \right) = F \text{curl} \tau'_w$$

$$\Phi = \frac{FL}{\beta}, \delta_M \ll L, \text{ 代入上式有 } \frac{\partial \phi'}{\partial x^*} - \frac{\partial^4 \phi'}{\partial x^{*4}} = 0 \Leftrightarrow \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} - A_H \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0$$

(3) 无量纲化——东边界层 $x - x_E = x^* \delta_M, y = y'L$

结果同上。

(4) Munk 模型的求解(推导过程仅供参考)

同样的我们设解的形式为 $\phi' = \phi'_I + \phi'_E + \phi'_W$ ，此时考虑侧摩擦后，有侧边界上的切

向速度为 0，所以边界条件为 $x' = 1, 0, \phi' = 0; x' = 1, 0, \frac{\partial \phi'}{\partial x'} = 0$

➤ 大洋内区的求解

同 Stommel 模型一样, 在内区有 $\phi_I = \frac{F}{\beta}(x_E - x) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$

➤ 西边界层

$$\frac{\partial \phi'_W}{\partial x^*} - \frac{\partial^4 \phi'_W}{\partial x^{*4}} = 0 \Rightarrow r(1-r)(1+r+r^2) = 0$$

所以 $\phi'_W = C_1 + C_2 e^{x^*} + C_3 e^{-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)x^*} + C_4 e^{-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)x^*}$, 而边界条件为

$$\begin{cases} x^* = 0, \phi'_W = -\phi'_I, \frac{\partial \phi'_W}{\partial x^*} = -\frac{\partial \phi'_I}{\partial x^*} \\ x^* \rightarrow \infty, \phi'_W \rightarrow 0, \frac{\partial \phi'_W}{\partial x^*} \rightarrow 0 \end{cases}$$

由 $x^* \rightarrow +\infty, \phi'_W \rightarrow 0$ 得到 $C_1 = C_2 = 0$, 于是 $\phi'_W = C_3 e^{-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)x^*} + C_4 e^{-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)x^*}$

$$\text{从而 } \frac{\partial \phi'_W}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)C_3 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)C_4$$

又 $\phi'_I = (1-x') \sin(\pi y') \Leftrightarrow \frac{\partial \phi'_I}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = -\sin(\pi y')$, 结合 $x^* = 0, \phi'_W = -\phi'_I$, 有

$$\begin{cases} C_3 + C_4 = -\sin \pi y' \\ \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)C_3 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)C_4 = \sin \pi y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -\sin \pi y' \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right) \\ C_4 = -\sin \pi y' \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \phi'_W &= -\sin \pi y' \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right) e^{-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)x^*} - \sin \pi y' \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right) e^{-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)x^*} \\ &= -\sin \pi y' e^{-\frac{x^*}{2}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right) e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x^*i} + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right) e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x^*i} \right] \\ &= -\sin \pi y' e^{-\frac{x^*}{2}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x^* - i \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x^* \right) + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x^* + i \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x^* \right) \right] \\ &= -\sin \pi y' e^{-\frac{x^*}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x^* + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x^* \right) \end{aligned}$$

➤ 东边界层

同样有 $\phi'_E = C_1 + C_2 e^{x^*} + C_3 e^{-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)x^*} + C_4 e^{-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)x^*}$, 而边界条件为

$$\begin{cases} x^* = 0, \phi'_E = -\phi'_I, \frac{\partial \phi'_E}{\partial x^*} = -\frac{\partial \phi'_I}{\partial x^*} \\ x^* \rightarrow -\infty, \phi'_E \rightarrow 0, \frac{\partial \phi'_E}{\partial x^*} \rightarrow 0 \end{cases}$$

由 $x^* \rightarrow -\infty, \phi'_E \rightarrow 0$ 得到 $C_1 = C_3 = C_4 = 0$, 于是 $\phi'_E = C_2 e^{x^*}$

根据 $x^* = 0, \phi'_E = -\phi'_I, \frac{\partial \phi'_E}{\partial x^*} = -\frac{\partial \phi'_I}{\partial x^*}$ 可得 $C_2 = -\sin \pi y'$, 于是 $\phi'_E = -\sin \pi y' e^{x^*}$, 所以

$$\phi' = \phi'_I + \phi'_W + \phi'_E$$

$$= (1 - x') \sin(\pi y') - \sin(\pi y') e^{\frac{x^*}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x^* + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x^* \right) - \sin(\pi y') e^{x^*}, \text{ 即}$$

$$\phi = \frac{F(x_E - x)}{\beta} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) - \frac{F(x_E - x_W)}{\beta} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{\frac{x}{2\delta_M}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2\delta_M} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2\delta_M} \right) - \frac{F(x - x_E)}{\beta} \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{\frac{x}{\delta_M}}$$

[1] [地转流](#)

[2] [第五讲-海洋环流基础知识](#)

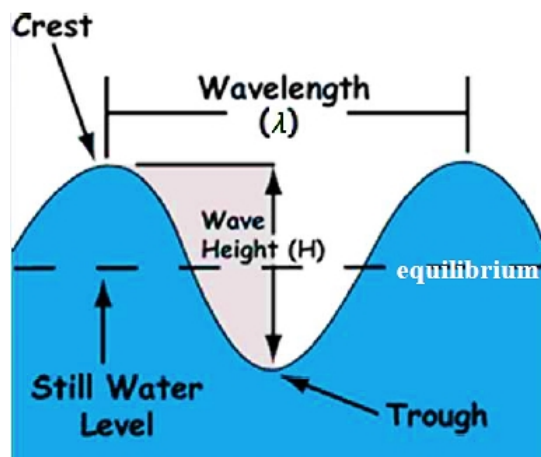
[3] [海洋学：第七章 大洋环流](#)

[4] [海洋环流：第4讲 风生大洋环流理论](#)

[5] [第六讲大洋环流理论](#)

第三章 表面重力波——海浪

1. 描述海浪的基本要素及海浪的基本特征



波峰、波谷、波长、周期、波速、波数、波高、波陡、波峰线、波向线。

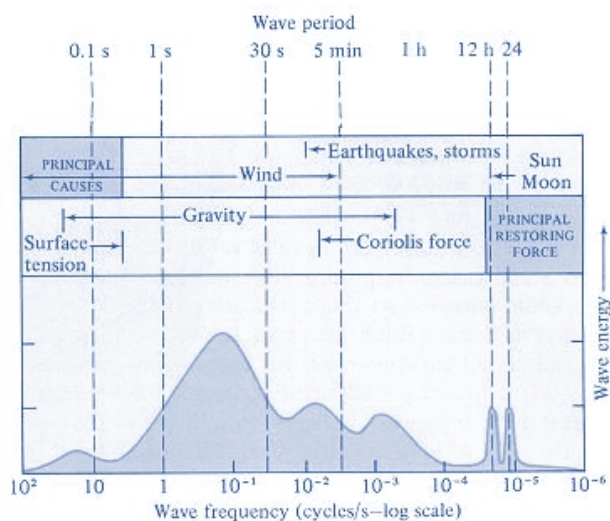
波陡表示为 $\delta = \frac{H}{\lambda}$ ，波陡越大，表示非线性作用越强，海浪越容易破碎。

海浪的周期：零点几秒~分钟

海浪的波高：几厘米~20 米，30 米以上罕见

海浪的波长：几十厘米~几百米

驱动力为风，恢复力为重力



周期为 1~30s 的重力波由风引起，所占能量最大；

周期为 3~15s 的波浪，对海岸工程问题最为重要。

2. 线性波动理论——小振幅重力波

小振幅重力波指波动振幅相对波长为无限小(波陡等于零), 重力是其唯一外力的简单海面波动。

(1) 假设

- ① 流体均质不可压缩, 其密度为常数;
- ② 自由水面的压力是均匀的且为常数;
- ③ 流体的运动是无旋的, 并假设波浪在 x - z 平面内作二维运动;
- ④ 海底水平且不可穿透;
- ⑤ 体积力仅为重力, 忽略表面张力, 科里奥利力及粘性力。
- ⑥ 波动振幅相对波长为无限小(波陡等于零), 重力是其唯一外力(小振幅假设)

(2) 波浪运动的控制方程组

基于上述的假设, 原始方程组可以简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

(3) 方程组的求解

上述方程组的变量过多, 因为假设运动无旋, 所以速度可以用一个势函数来表示, 即 $\mathbf{V} = \nabla \phi \Leftrightarrow u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$, 于是连续方程可以写为 $\nabla^2 \phi = 0$ 。由流体力学中的知识可知, 对于无旋运动, 有拉格朗日积分

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

若令 $\phi' = \phi + \int f(t) dt$, 则有 $\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi') \cdot (\nabla \phi') + \frac{p}{\rho} + gz = 0$, 常常略去上标:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) + \frac{p}{\rho} + gz = 0$$

以静止的海平面为 $z=0$ ，假设平均水深为 H ，海表面的起伏为 $\eta = \eta(x, z, t)$ 。下面探讨求解速度势的边界条件。

① 在海底处，没有穿透速度，即 $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, z = -H$ ；

② 在海表面处，应满足动力学边界条件，将速度势代入拉格朗日积分，有

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \bigg|_{z=\eta} + g\eta = 0$$

[注] 前面有推导得出结论，在海表面处的大气压强常常可以忽略不计，即认为 $p_a \approx 0(z = \eta)$

③ 在海表面处，还应满足运动学边界条件，设自由表面的方程为

$F(x, z, t) = \eta(x, t) - z$ ，根据 $\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - w = 0$ ，代入速度势，有

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \bigg|_{z=\eta} = 0$$

上述的边界条件仍然是非线性，我们再来看假设⑥，它表明， η, ϕ 均是小量，于是它们的偏导乘积项(二阶小量)可以忽略，从而有

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0}, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0},$$

那么，经过小振幅假设线性近似后，边界条件变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, z = -H \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, z = \eta \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, z = \eta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, z = \eta \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, z = 0$$

由于我讨论简单波动，如果是前进波，则可以认为波场中有关的物理量也具有这一特性，因此速度势可以表示成如下形式

$$\phi = \phi_0(z) \cos(kx - \omega t)$$

将其代入连续方程和边界条件中，有

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi_0}{dz^2} - k^2 \phi_0 = 0 \\ \left. \frac{d\phi_0}{dz} \right|_{z=-d} = 0 \\ \left(\frac{d\phi_0}{dz} - \frac{\omega^2}{g} \phi_0 \right)_{z=0} = 0 \end{cases}$$

由第 1 式，可以设通解为 $\phi_0 = Ae^{kz} + Be^{-kz}$ ，代入 2 和 3 式，有

$$\begin{cases} e^{-kH} A - e^{kH} B = 0 \\ (\omega^2 - gk) A + (\omega^2 + gk) B = 0 \end{cases}$$

上述方程要有非零解，需满足行列式 $\begin{vmatrix} e^{-kH} & -e^{kH} \\ \omega^2 - gk & \omega^2 + gk \end{vmatrix} = 0$ ，由此可以得到频散关

系和波速的表达式

$$\begin{cases} \omega^2 = gk \frac{e^{kH} - e^{-kH}}{e^{kH} + e^{-kH}} = gk \tanh(kH) \\ c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \tanh(kH) \end{cases}$$

由 $e^{-kH} A - e^{kH} B = 0$ ，设 $e^{-kH} A = e^{kH} B = \frac{1}{2} D$ ，其中 D 为一个不为零的常数，于是

速度势 ϕ 可以表示为

$$\phi = \left(\frac{1}{2} D e^{kH} e^{kz} + \frac{1}{2} D e^{-kH} e^{-kz} \right) \cos(kx - \omega t) = D \cosh[k(H+z)] \cos(kx - \omega t)$$

根据边界条件 $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0, z = \eta$ ，有

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = a \sin(kx - \omega t), a = -\frac{\omega}{g} D \cosh(kH)$$

上式中， a 即为波动的振幅，于是速度势也可以表示(消去了常数 D !) 为

$$\phi = -\frac{ag \cosh[k(H+z)]}{\omega \cosh(kH)} \cos(kx - \omega t)$$

从而得到速度的表达式为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk \cosh[k(H+z)]}{\omega \cosh(kH)} \sin(kx - \omega t)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{agk \sinh[k(H+z)]}{\omega \cosh(kH)} \cos(kx - \omega t)$$

由此可以来讨论水质点的运动轨迹。由于水质点运动的路程极短，设质点的平衡位置为 (x_0, z_0) ，则可用 (x_0, z_0) 近似替代双曲函数中的 (x, z) ，于是

$$\frac{dx}{dt} = \frac{agk \cosh[k(H+z_0)]}{\omega \cosh(kH)} \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{agk \sinh[k(H+z_0)]}{\omega \cosh(kH)} \cos(kx_0 - \omega t)$$

对 t 做积分，利用频散关系，得

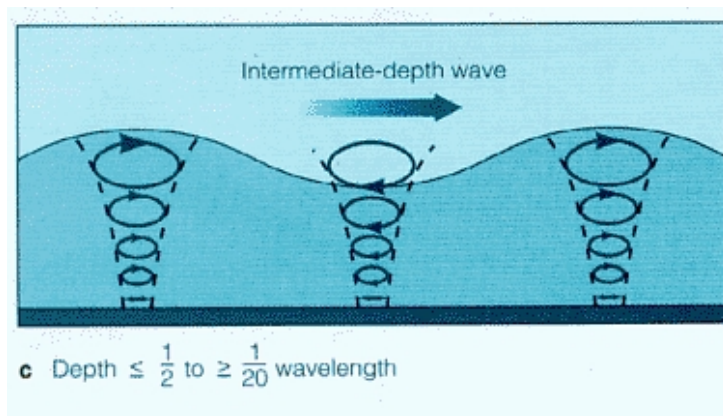
$$x - x_0 = a \frac{\cosh[k(H+z_0)]}{\sinh(kH)} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$z - z_0 = a \frac{\sinh[k(H+z_0)]}{\sinh(kH)} \sin(kx_0 - \omega t)$$

消去时间 t 后，得质点轨迹

$$\frac{(x-x_0)^2}{\left[a \frac{\cosh[k(H+z_0)]}{\sinh(kH)} \right]^2} + \frac{(z-z_0)^2}{\left[a \frac{\sinh[k(H+z_0)]}{\sinh(kH)} \right]^2} = 1$$

上式表明，对于有限水深情况，质点的运动轨迹为椭圆，椭圆的水平轴和铅直轴随着离开自由表面向下而逐渐减小，于水底处，铅直轴变为零，质点只作水平运动。



(4) 水深对线性波动的影响

将上述有限深度的结果取两个“极端”，有如下结论。

➤ 深水波($H > \frac{1}{2}\lambda$)

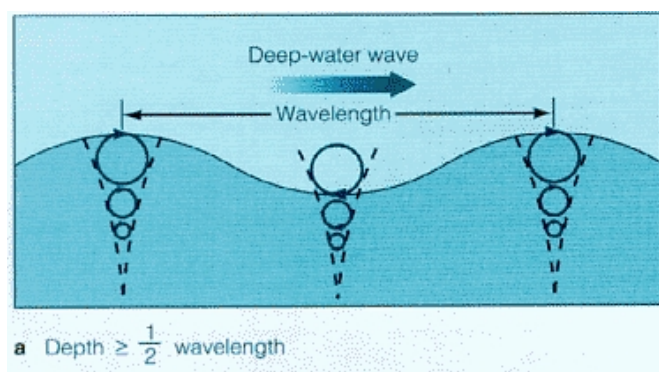
当水很深时, 即 $kH \rightarrow \infty$, 此时有 $\tanh kH \sim 1, \sinh kH \sim \cosh kH \sim \frac{1}{2}e^{kH}$, 于是有限水深的结果变为:

$$\omega^2 = gk, c^2 = \frac{g}{k}, \phi = -\frac{ag}{\omega} e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = (ae^{kz})^2$$

从上述可以得到以下结论:

- ① 波速与水深无关, 而依赖与波动性质(波数、波长、频率等);
- ② 质点的运动轨迹为一圆, 其半径随深度呈指数减小, 当达到很大深度时, 运动消失。例如, 当深度为 $z = -\lambda$ 处, $e^{-k\lambda} = e^{-2\pi} \approx 0.0019$, 由此可见表面波的性质。一般认为 $z < -\frac{\lambda}{2} \left(e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.21 \right)$ 后运动消失。



➤ 浅水波($H < \frac{1}{20}\lambda$)

当水很深时, 即 $kH \rightarrow 0$, 此时有

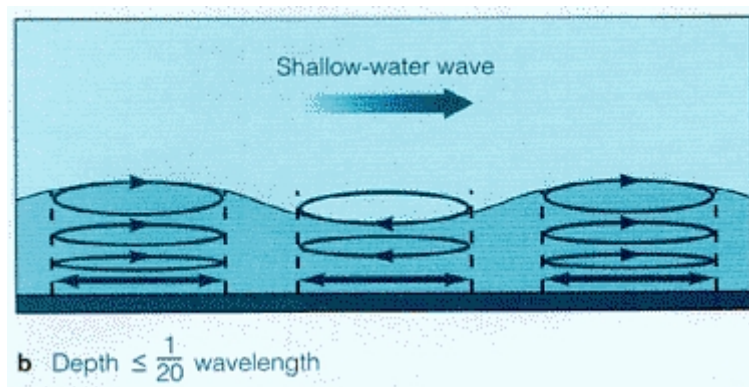
$$\tanh kH \sim kH, \sinh kH \sim kH, \cosh kH \sim 1 + \frac{k^2 H^2}{2} \sim 1$$

于是有限水深的结果变为:

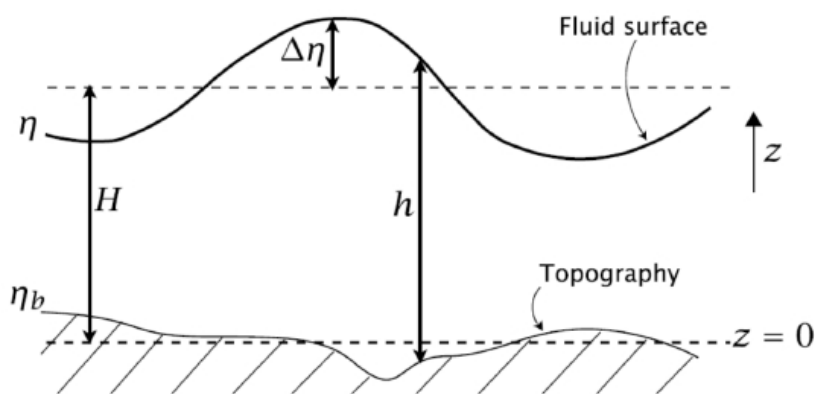
$$\omega^2 = gk^2 H, c^2 = gH, \phi = -\frac{ag}{\omega} \left[1 + \frac{k^2 (H+z)^2}{2} \right] \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{\left(\frac{a}{kH} \right)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{\left[a \left(1 + \frac{z_0}{H} \right) \right]^2} = 1$$

可以发现：浅水中，波速只与水深 H 有关，而与波动性质无关；质点的铅直速度大小显著地小于水平速度的大小，质点的运动轨迹仍为一椭圆，不过其水平轴(长轴)不随深度变化，而其铅直轴(短轴)相对于水平轴很短但仍随深度而变。



3. 小振幅重力波——浅水波波速的另一种导出



对于单层流体，由前面的推导可知其控制方程如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = fv - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

海浪的水平流速尺度 $U=1\text{m/s}$, $T=1\text{s}$, $L=10\text{m}$, 计算海浪的 Rossby 数为：

$$Ro = \frac{U}{f_0 L} \sim \frac{1}{10^{-4} \times 10} = 10^3 \gg 1, \text{ 由此可知海浪为小尺度运动, 即科氏力相对惯性}$$

力可以忽略。而 $\frac{\text{非线性平流项}}{\text{局地时间导数项}} = \frac{U^2/L}{U/T} = 0.1$ ，非线性平流项比局地时间导数

项小一个数量级，故可以忽略。实际上对于小振幅假设，取 $U = 0.1 \text{ m/s}$ 更为合适，上面的结论依然成立，故水平动量方程可以极大地简化为：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases}$$

又 $h = H + \eta$ ($H \gg \eta, H = \text{const}$)，所以连续方程可以简化为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (Hu)}{\partial x} + \frac{\partial (Hv)}{\partial y} = 0$$

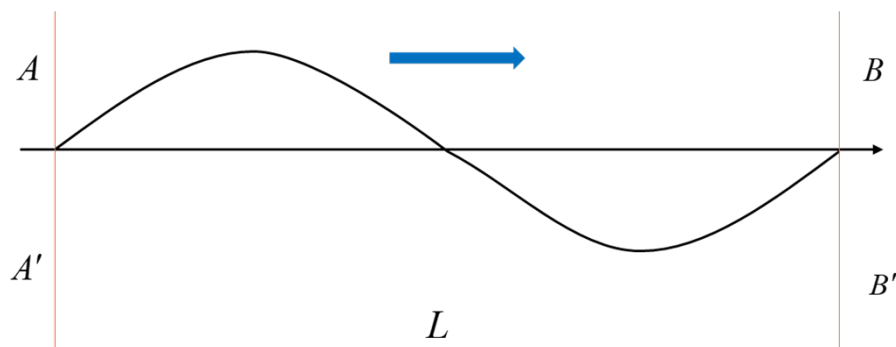
消去 u, v 得到方程 $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gH \cdot \nabla_h^2 \eta = 0$

4. 线性波动的能量

当流体发生波动时，流体质点具有速度，因而具有动能；由于海面的上下起伏，流体质点的位置不断发生上下变化，从而流体柱的重心位置发生变化，因而具有势能。另一方面，对进行波来说，流体的运动状态可从一点传播到另一点，因而在传播过程中还会伴随者能量的转移。

(1) 动能

在讨论波动的动能和势能时，一般总是取一个波长范围来讨论，因为对简单波动来说，在一个波长范围内其流体总质量总是一定的，它等于无波动时在同一范围内的流体质量。我们仍然考虑二维($x-z$)情形。



$$E_k = \int_0^L \int_{-H}^{\eta} \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dx dz = \frac{\rho}{2} \int_0^L \int_{-H}^{\eta} \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx dz$$

对于不可压缩流体, 有 $\nabla^2 \phi = 0$, 根据格林第一公式

$$\int_V \phi \nabla^2 \phi dV + \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi dV = \int_S \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$

L 为积分区域边缘所包围的曲线, n 为其区域的外法线方向。在 AA', BB' 平面上, $\phi \frac{\partial \phi}{\partial n}$ 的值相等但符号相反, 故相互抵消; 对于海底, 根据海底动力学边界条件,

有 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0$, 结合小振幅近似假设, 波动动能可表示为

$$E_k = \int_0^L \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} ds = \int_0^L \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} dx$$

将 $\phi = -\frac{ag \cosh[k(H+z)]}{\omega \cosh(kH)} \cos(kx - \omega t)$ 代入, 求得 $E_k = \frac{1}{4} \rho g a^2 L$

(2) 势能

我们以静止海面为零势能面, 故波动势能是相对于无波动的静止状态而言。

$$E_p = \int_0^L \left[\int_0^{\eta} \rho g z dz \right] dx = \int_0^L \frac{\rho}{2} g \eta^2 dx = \frac{1}{4} \rho g a^2 L$$

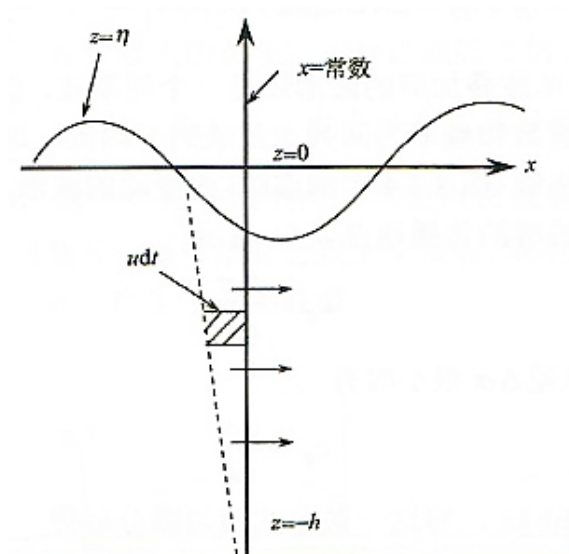
于是一个波长范围内的总能量(机械能)为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \rho g a^2 L$$

对于简单波动, 动能与势能相等, 均为总能量的一半。上述的结论是有限深情况下的计算结果, 对无限水深和浅水情形同样适用。

(3) 波动的能量(波能流)

能量流由三部分组成: 平流造成的动能输送、势能输送和压强 p 做的功。



也可以理解为：单位时间内通过某一铅直断面(AA 平面)输入的波动能量应等于该平面外侧有效压力所做之功。下面解释一下“有效压力”。前面推导线性

波动理论时有无旋积分 $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) + \frac{p}{\rho} + gz = 0$ ，考虑表面压强的作用，

并假设为常数 p_0 ，那么可以将 ϕ 用 $\phi + \frac{p_0}{\rho}$ 来进行代替，并结合小振幅假设，无旋

积分方程便可以化简为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho} + gz = 0$$

根据计算波能流的定义，垂直方向的压强及力的做功对水平能量的输送没有贡献

(即上述方程中的 $\frac{p}{\rho_0}, gz$)，所以有效压强为 $p_e = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ ，于是单位时间通过断面

区域的能量为：

$$P = \int_{-H}^{\eta} p_e u dz = - \int_{-H}^{\eta} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz = \frac{1}{2} \rho g a^2 c \left(1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right) \sin^2(kx - \omega t)$$

[注] 上述积分的具体推导过程，笔者给出的参考过程如下，用到了 $H \gg \eta$

$$\phi = -\frac{ag \cosh[k(H+z)]}{\omega \cosh(kH)} \cos(kx - \omega t) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{ag \omega \cosh[k(H+z)]}{\omega \cosh(kH)} \sin(kx - \omega t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{agk \cosh[k(H+z)]}{\omega \cosh(kH)} \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

$$P = -\int_{-H}^{\eta} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz = \int_{-H}^{\eta} \rho \frac{a^2 g^2 \omega k \cosh^2[k(H+z)]}{\omega^2 \cosh^2(kH)} \sin^2(kx - \omega t) dz$$

$$\omega^2 = gk \tanh(kH)$$

$$P = \frac{\rho g a^2 \omega \sin^2(kx - \omega t)}{\sinh(kH) \cosh(kH)} \int_{-H}^{\eta} \cosh^2[k(H+z)] dz$$

$$y = k(H+z) \Rightarrow dy = k dz \quad c = \frac{\omega}{k}, y \in [0, h] (h = k(H+\eta))$$

$$P = \frac{\rho g a^2 c \sin^2(kx - \omega t)}{\frac{1}{2} \sinh(2kH)} \int_0^h \cosh^2 y dy = \frac{\rho g a^2 c \sin^2(kx - \omega t)}{\frac{1}{2} \sinh(2kH)} \frac{1}{2} \int_0^h [1 + \cosh(2y)] dy = \frac{1}{2} \rho g a^2 c \left(1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right) \sin^2(kx - \omega t)$$

双曲函数的一些基本关系

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ &= 1 + 2 \sinh^2 x \\ &= 2 \cosh^2 x - 1 \\ \int \cosh x dx &= \sinh x + C \end{aligned}$$

图片制作：蒋斌

显然，上述的能量表达式随时间而变，于是在一个周期内求平均能流有

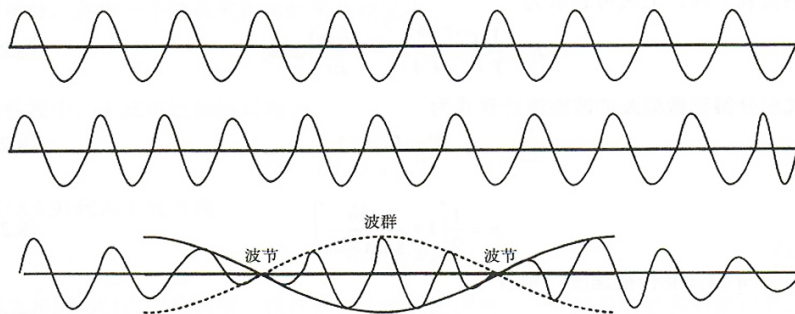
$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{2} \rho g a^2 \cdot \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right)$$

$\bar{E} = \frac{E}{L} = \frac{1}{2} \rho g a^2$ 为能量密度，或者称为单位表面积水柱内的总能量。对于深水波

水波， $kH \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \sim \frac{2kH}{e^{2kH}} \rightarrow 0$ ，从而 $\bar{P}_{deep} = \bar{E} \cdot \frac{c}{2}$ ；而对于浅水波，

$kH \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \sim 1$ ，从而 $\bar{P}_{shallow} = \bar{E} \cdot c$ 。

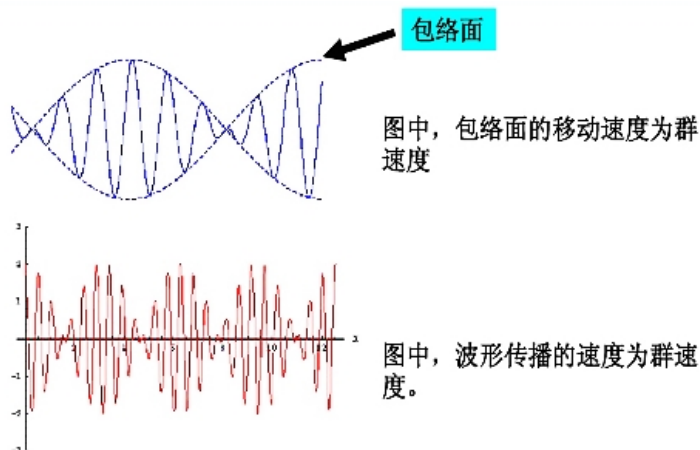
5. 线性波动的叠加——波群



假设有两列波高相同、波周期略有差异的正弦波

$$\begin{cases} \eta_1 = A \cos \left[\left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right] \\ \eta_2 = A \cos \left[\left(k - \frac{\Delta k}{2} \right) x - \left(\omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) t \right] \end{cases} (\Delta k \ll k, \Delta \omega \ll \omega)$$

它们叠加后, 为 $\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2A \cos(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$



可以看到, 叠加后的群波是两种波动的乘积, 一种是**高频载波**, 其波数、圆频率与各单谐波相近; 另一种是**低频调制波动**, 其波数、圆频率远小于各单谐波的。它是高频载波的“范围线”, 该“范围线”也称为包络线或波包。波包是高频载波最大振幅点的连线。波群中等振幅点的移速称为群速度, 用符号 c_g 表示。

它可以理解为波包的移速。由定义可以知道, 群速度的表达式为 $c_g = \frac{\Delta \omega / 2}{\Delta k / 2} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$,

取极限, 得到群速度的数学表达式为 $c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}$ 。若相速度与波

数无关(不依赖于波数), 则 $\frac{dc}{dk} = 0 \Rightarrow c_g = c$, 即群速度与相速度相等, 它表示波的能量随高频载波一起移动, 因而能量不频散, 称为非频散波。反之, 如果相速度与波数有关, 则波群能量的传播速度就与高频载波的不一致, 此现象称为频散现象, 对应的波称为频散波。

在频散关系式两边对 k 求导, 有

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = g \left[\tanh(kH) + kH \operatorname{sech}^2(kH) \right]$$

又因为 $\operatorname{sech}^2(kH) = \frac{1}{\cosh^2(kH)} = \frac{\sinh(kH)}{\cosh(kH)} \cdot \frac{1}{\sinh(kH)\cosh(kH)} = \frac{2 \tanh(kH)}{\sinh(2kH)}$, 所

以可以得到有限水深的群速度表达式为

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} \tanh(kH) \left[1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right] = \frac{c}{2} \left[1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right]$$

对于深水波, $c_g = \frac{1}{2}c$, 所以深水波是频散波; 而对于浅水波, $c_g = c$, 所以是**非频散波**。我们再来看前面推导的能流表达式, 发现平均能流正好等于能量密度与群速度的乘积, 所以, 常常也认为**群速度是能量的传播速度**。

6. 风浪和涌浪

(1) 风浪

指当地风产生, 且一直处在风的作用之下的海面波动状态。风浪的特征往往**波峰尖削**, 在海面上的分布很不规律, **波锋线短, 周期小**, 当风大时常常出现破碎现象, 形成浪花

➤ 风浪成长三要素

- **风速**——风力大小
- **风时**——指状态相同的风持续作用在海面上的时间;
- **风区**——指状态相同的风作用海域的范围。习惯上把从风区的上沿, 沿风向到某一点的距离称为风区长度

(2) 涌浪

指海面上由其它海区传来的或者当地风力迅速减小、平息, 或者风向改变后海面上**遗留下来的波动**。涌浪的**波面比较平坦, 光滑, 波锋线长, 周期、波长都比较大**, 在海上的传播比较规则。甚至传至其它海区, 经过漫长路程和时间而慢慢消衰。此时的波动称为涌浪。

涌浪在传播过程中的显著特点是波高逐渐降低, 波长、周期逐渐变大, 从而波速变快。这一方面由于**内摩擦作用**使其能量不断消耗所致, 另一方面是由于在传播过程中发生**弥散和角散**所致。

[注] 弥散和角散

- 弥散: 不同波长、周期、振幅的分波在传播过程中, 波长大的速度快, 短的速度慢, 使原来叠加一起的波分散开;
- 角散: 各个分波的传播方向也不尽一致, 在传播过程中向不同方向分散开来。

(3) 浅海和近岸的海浪

当波浪传至浅水及近岸时, 由于水深及地形、岸形的变化, 无论其波高、波长、波速及传播方向等都会产生一系列的变化。诸如波向的折射、波高增大从而能量集中, 波形卷倒、破碎和反射、绕射等。对海岸工程、海岸地貌的变化均具有重大影响。

① 波长、波速和周期的变化

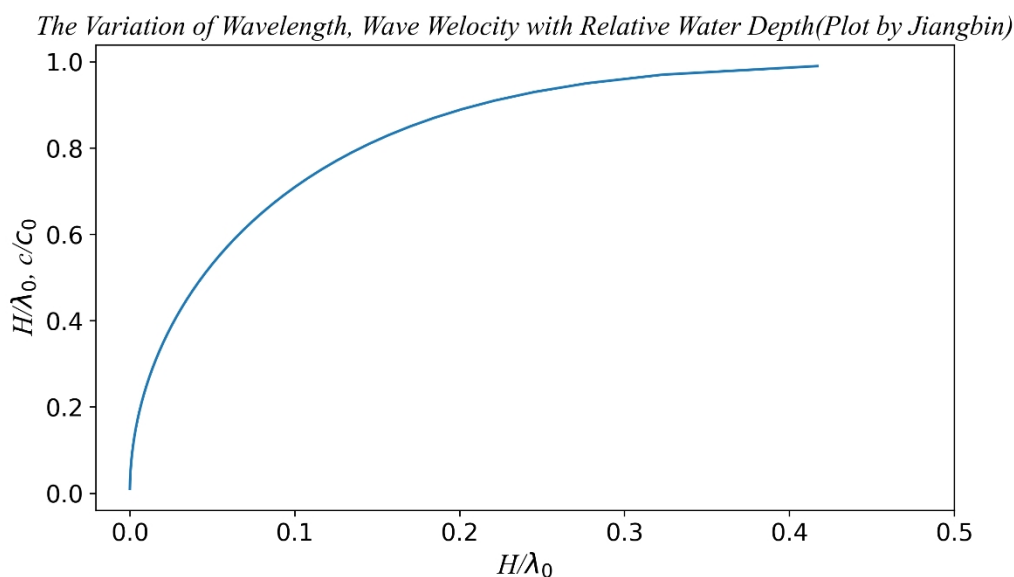
周期保持不变(?), 根据频散关系, 对于有限水深的波速为

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kH) = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)$$

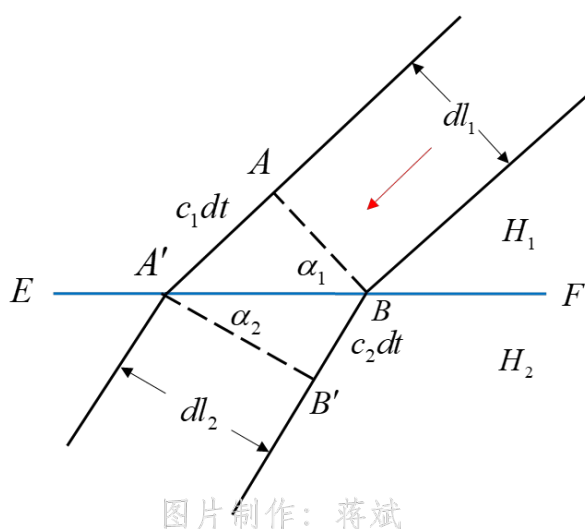
而对于深水情形, 有 $c_0^2 = \frac{g\lambda_0}{2\pi}$, 联立两式可得

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{c}{c_0} = \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right) = \tanh\left(2\pi \frac{H/\lambda_0}{\lambda/\lambda_0}\right)$$

将上述表达式绘成图形如下, 可以发现, 当水深逐渐变浅时, 其波速、波长都逐渐变小。



② 波向的折射



图片制作：蒋斌

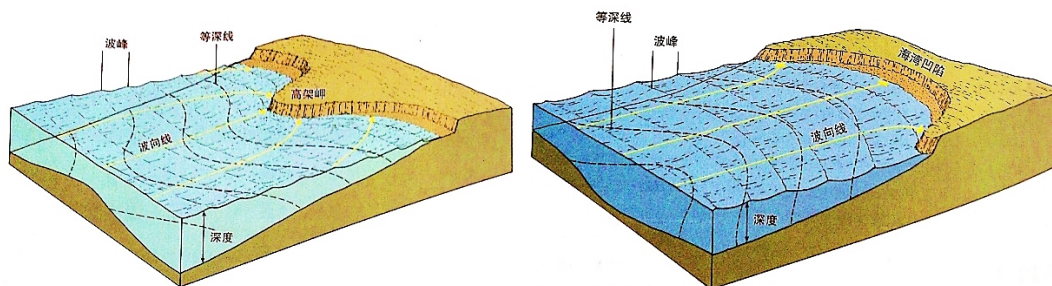
波浪传入浅水后, 由于波速和地形的影响, 导致波向发生转折。如左图所示, 设 EF 为等深线, 两边的水深与波速分别为 H_1, c_1 与 H_2, c_2 , 且 $H_1 > H_2, c_1 > c_2$ 等深线两边, 两波向线的距离分别为 AB 与 $A'B'$, 与等深线的角分别为 α_1 与 α_2 , 波浪经过 dt 时间后 A 点移动到了 A' , 距离为 $c_1 dt$, 而 B 点移

动到了 B' , 距离为 $c_2 dt$, 从图中可见, $\sin \alpha_1 = \frac{c_1 dt}{A'B}, \sin \alpha_2 = \frac{c_2 dt}{A'B}$, 合并两个式

子, 有 $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} > 1 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$, 这就说明, 波峰线 AB 由 H_1 (较深) 进入 H_2 (较浅)

的过程中, 有逐渐与等深线平行的趋势, 也就是波向线与等深线逐渐垂直的趋势。这正是在海岸上观察从外传来的波浪, 到达近岸时, 波峰线总是大致与海岸平行的原因。

由于折射的原因, 在海底凸出的海岬处, 波向线产生辐聚, 而在凹进的海岸处, 波向线辐散。因此在海岬处常出现较大的波浪, 而在海湾处相对较小。



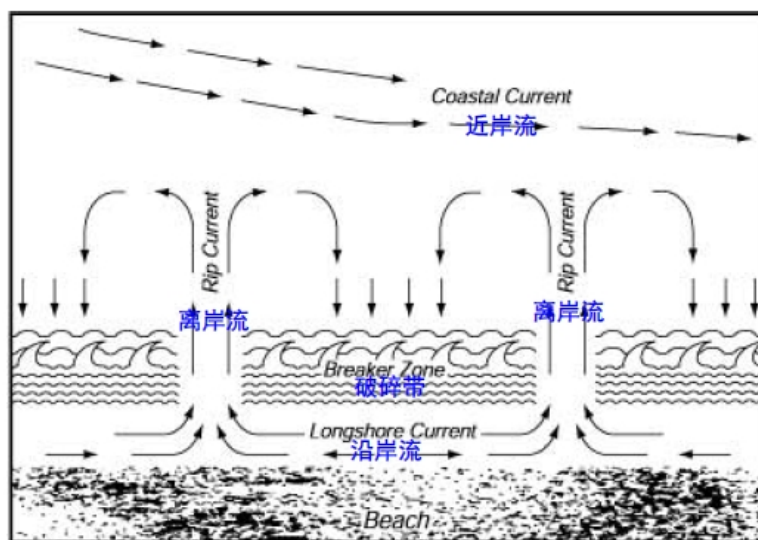
▲ 海浪的辐聚与辐散

③ 波高变化

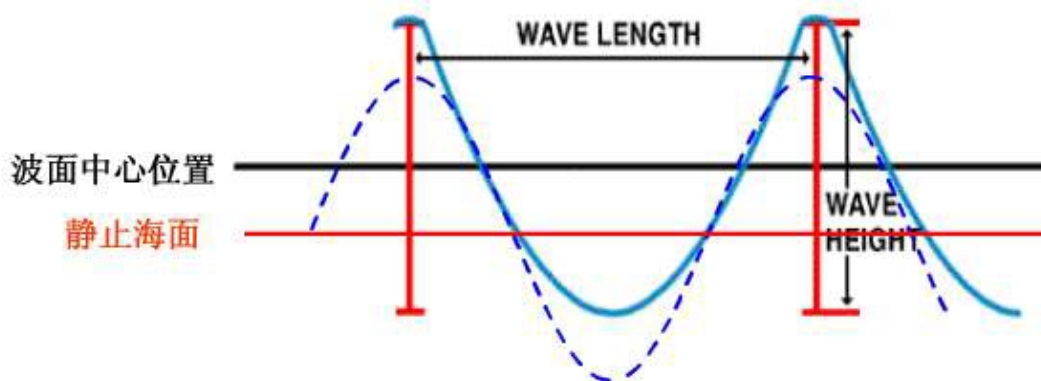
- 波向线辐聚时，能量集中，波高增大(海岬)
- 波向线辐散时，能量分散，波高减小(海湾)
- 波浪从深水进入浅水，波高略有降低，这是由于刚进入浅水后海底摩擦起主要作用所致，然后随相对深度的减小而迅速增大。

④ 沿岸流和离岸流

波浪破碎后形成沿着海岸线流动的沿岸流，沿岸流最终以离岸流回流到海中，对泥沙输运有重要意义。离岸流强度大，最大流速可达 1.5m/s 。



7. *非线性波动——Stokes 波



(1) 波面

关与横轴上下不对称，**水质点振动中心高于平均水面**。

(2) 波速

与波长有关，还与波高有关。当波陡愈大时，波速也愈大。近似公式：

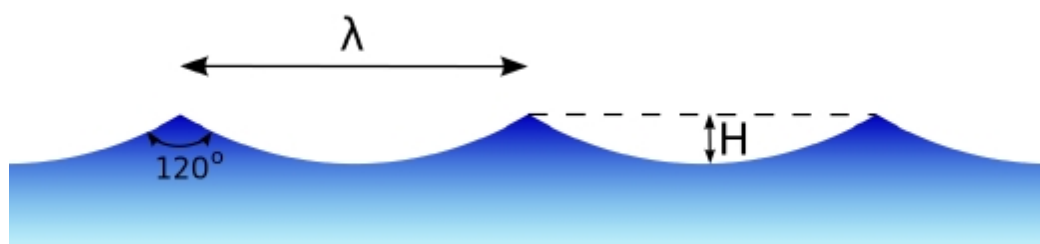
$$c^2 \approx \frac{gL}{2\pi} (1 + k^2 a^2) = \frac{gL}{2\pi} (1 + \pi^2 \delta^2) (\delta \text{ 为波陡})$$

当波陡很小的时候即为小振幅波速的形式。

(3) 水质点运动轨迹

接近为圆，但**在一个周期内不封闭，有净位移，此水平位移称“波流”或者 Stokes 漂流**。波流可解释物质输运现象。

(4) 波浪的破碎



当实际波浪的波陡大于某一数值时，波峰附近的波面发生破碎，出现浪花。Stokes 波的波陡增大时，波面变陡，波峰附近变尖。**极限情况下，Stokes 波的波峰角为 120° ，对应的波陡约为 $0.142 \approx \frac{1}{7}$** ，因此这两个特点也常常用来定性判断海浪是否会发生破碎。

[注] 此处的公式推导较为复杂，感兴趣的同学可以参考教材《物理海洋学》(叶安乐)，或者参考以下链接：

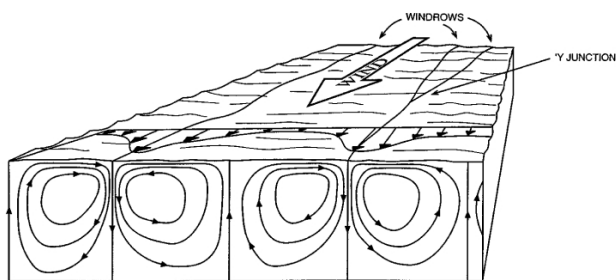
[1] [中国海洋大学波浪力学_有限振幅波理论](#)

[2] [中国海洋大学兰键【物理海洋学】哔哩哔哩_bilibili](#)

8. 混合层简介

混合层指的是在海洋上层由于混合作用，海水的密度、温度、盐度在垂直方向非常均匀的一层水体。维持海洋混合层的两个关键的物理机制分别是，风造成的流速剪切与波浪破碎产生的机械搅拌混合，以及海表面受到的包括加热冷却与蒸发降水等浮力强迫造成的热对流混合。混合层在**冬季**比较深厚，因为冬季一方面风速较大，机械强迫的混合较强，同时冬季气温较低，海洋在上边界受到冷却，容易造成对流不稳定性，造成进一步的对流混合。

9. * Langmuir Circulation(朗缪尔环流)——风应力的非定常性响应



由于风的不均匀、非定常性，产生了水平的剪切与垂向的涡管。风吹出的海浪有斯托克斯漂流(Stokes Drift)，将涡管掰成水平；一个一个的涡旋相间反向旋转的组织起来。这样，辐合辐散便也交替出现。在辐合上升处，海表面变粗糙，所以常常可以看到**沿着风的方向**有交替出现的白色条带，这而在这些白色条带之间，对应的就是辐散下沉区。

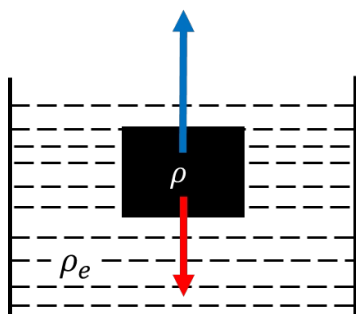
[注] 一些关于 Langmuir circulation 的资料

[1] [LANGMUIR CIRCULATION | 10.1146/annurev.fluid.36.052203.071431](#)

[2] [Langmuir Turbulence - an overview | ScienceDirect Topics](#)

第四章 层结与海洋内波

1. 层结与浮力振荡



阿基米德浮力定律指出，物体受到的浮力等于排开周围流体所受到的重力。于是，物体所受到的净浮力可以表示为

$$F_{net} = gV(\rho_e - \rho)$$

实际上，我们在研究大气或海洋的层结运动时，常常研究微团的运动特点，所以，根据上述表达式，可以求出微团的加速度为

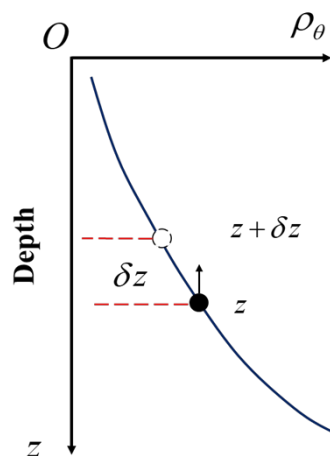
$$\frac{dw}{dt} = \frac{F_{net}}{\rho V} = g \frac{\rho_e - \rho}{\rho}$$

由上面的公式，我们可以区分三种层结：

- 中性层结，即经过小扰动后环境密度与微团密度始终一致，加速度为 0；
- 静力不稳定层结，经过小扰动后，微团产生的加速度使得微团永远偏离初始位置；
- 静力稳定层结，经过小扰动后，微团产生的加速度使得微团回到初始位置。

因此，浮力振荡的前提是静力稳定层结，下面推导浮力振荡的特征频率。

假设海洋的位势密度满足如右图所示的分布，即 $\frac{d\rho_\theta}{dz} < 0$ 。开始时刻有一海水微团，其密度与周围的海水密度一样，均为 $\rho = \rho_\theta(z)$ ，若微团向上运动了 δz ，此时，周围海水的密度为 $\rho_\theta(z + \delta z)$ ，假设海水在运动过程中位势密度守恒，那么在 $z + \delta z$ 处的微团的位势密度仍为 $\rho = \rho_\theta(z)$ ，于是微团进过微小位移后受到净浮力(单位体积)为



$$F = -g\delta\rho = -g[\rho_\theta(z) - \rho_\theta(z + \delta z)] = g \frac{d\rho_\theta}{dz} \delta z$$

根据加速度的动力学表达式与运动学表达式，可得到

$$a = \frac{d^2\delta z}{dt^2} = \frac{F}{\rho} = \frac{g}{\rho} \frac{d\rho_\theta}{dz} \delta z \Rightarrow \frac{d^2\delta z}{dt^2} - \frac{g}{\rho} \frac{d\rho_\theta}{dz} \delta z = 0$$

于是可以得到浮力频率的表达式为 $N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho_\theta}{dz}$ 。显然，浮力频率越大代表层结

越强，密度层结对流体运动的限制越大。

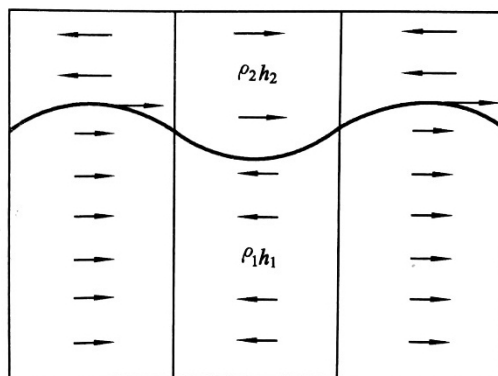
2. 内波概述

前面一章讨论的海浪是一种发生在自由海面上的显著波动，称之为表面波。如以振幅大小来表征，表面波的振幅在表面最大，随着离开海面向下逐渐衰减。而内波则是发生在密度稳定层化了的海洋内部的波动，其最大振幅出现在海洋内部，对自由海面没有多大影响。

其实，界面波与表面波并无本质的差别，表面波也是一种界面波，是发生在密度很小的空气与密度很大的海水之间界面上的波动，也是一种内波，只不过在研究表面波时，往往忽略了空气密度的影响。另一方面，自由海面的海水上升需要克服重力，因此大幅度的升高受到限制；但是海洋内部的海水上升时，本身的重量大部分被浮力所抵消，于是升高就比较容易。如果以相同的能量产生内波和表面波，则内波的最大振幅要比表面波的大得多。亦即，表面波的恢复力是重力，内波的恢复力是约化重力。

3. 两层流体间的界面波

两层密度不同的海水界面处的波动是最简单的一种界面内波，其图像如右图所示。流体密度满足 $\rho_1 > \rho_2$ ，这样才是静力稳定的。以海底为参考平面，设上下两层的厚度分别为 h_2, h_1 。



(1) 运动方程

采用 Boussinesq 近似，考虑二维情形，不计科氏力，摩擦力，其运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

(2) 边界条件

- 海底边界条件： $z=0, w_1=0$
- 自由面运动学边界条件： $z=h_1+h_2, w_2=0$
- 两侧流体界面处的运动学条件： $z=h_1, w_1=w_2$
- 压强条件： $\frac{d}{dt}(p_{01}+p_1)=\frac{d}{dt}(p_{02}+p_2)$ ， p_{01}, p_{02} 为两个水层中的均衡压强，

p_1, p_2 是两个水层中波扰动压强

(3) 方程的解

内波的频散关系

$$\omega^2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2) g k \sinh kh_2 \sinh kh_1}{\rho_1 \cosh kh_1 \sinh kh_2 + \rho_2 \cosh kh_1 \sinh kh_1}$$

内波的相速度

$$c^2 = \frac{g}{k} \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 \coth kh_1 + \rho_2 \coth kh_2}$$

(4) 约化重力模型

约化重力模型又称 **1.5 层模型**，假定海洋被温跃层(很薄的一个界面)分为两层，流动只发生在上层，下层流体静止且无限深。

根据约化重力模型的假设，有“上层浅，下层深”的特点，即

$$\frac{h_1}{L} \gg 1, \frac{h_2}{L} \ll 1 \Leftrightarrow kh_1 \gg 1, kh_2 \ll 1 \Rightarrow \coth kh_1 \sim 1, \coth kh_2 \sim \frac{1}{kh_2}$$

于是可以得到简化后内波的相速度为

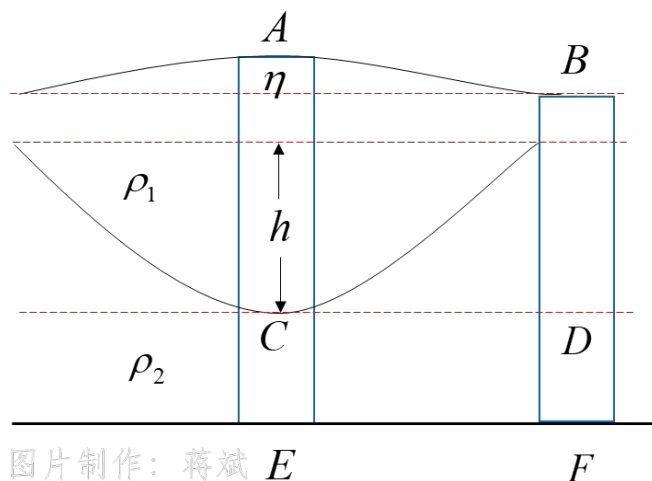
$$c^2 = \frac{gh_2(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 kh_2 + \rho_2} = \frac{gh_2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}{kh_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

海水是连续分层的流体，温跃层两侧的海水密度差大约几个 kg/m^3 ，因此可以认为上式分母中的 $\frac{\rho_2}{\rho_1} \approx 1$ ，而 $kh_2 \ll 1$ ，从而可以得到内波的相速度为

$$c^2 = gh_2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = g'h_2$$

式中 h_2 为上层水深度， $g' = g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ 称为约化重力。该结论表明，在约化重力模型中，内波是非频散波，且当内波从深海传到陆架附近时，由于水深变浅，内波的波速变慢。同时，和浅水波的相速度关系 $c^2 = gH_0$ 相比，内波的波速远比表面波“跑得慢”。

此外，约化重力模型也可以解释内波与表面波的振幅大小关系。



图片制作：蒋斌 E F

选定控制体，根据质量守恒，海面起伏和次表层温跃层起伏方向相反。如上图所示， A, B 两点的水平压强差由水柱 η 产生，压强差可以表示为 $\Delta P_{AB} = \rho_1 g \eta$ ，同样的，我们可以求出 C, D 两点的水平压强差为 $\Delta P_{CD} = g(\rho_2 - \rho_1)h$ ，约化重力模型中，我们的前提假设是下层流体静止，所以为了满足 $\Delta P_{EF} = 0$ ，需要有

$$\Delta P_{AB} = \Delta P_{CD} \Rightarrow \frac{\eta}{h} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \sim \frac{1}{1000}$$

这就说明了在波动在界面的起伏比重力表面波在海表面的起伏却要大很多。

4. 内波与海表面

内波虽然不会造成海表面的剧烈起伏但是会造成海表面显著的辐聚辐散，而内波的辐聚辐散又调制了表面波，会改变海表面的粗糙度，在海面呈现出条带状的纹理。



5. 连续层结的海洋内波

不考虑科氏力和摩擦力，内波的运动控制方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

设 $p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$, $\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$, 满足 $\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g$, 采用波动的线性理论(运动方程的平流项即非线性项不考虑)和 Boussinesq 近似, 对上述方程组进行简化, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} & \text{①} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} & \text{②} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\rho_0} & \text{③} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 & \text{④} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \text{⑤} \end{cases}$$

上述密度方程的简化用到了海水的不可压缩性，即 $\rho \approx \rho_0(z)$ 。利用③④式，消去密度 ρ_0

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial t} - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} w = 0$$

利用①②式消去速度 u, v 得到

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = 0$$

联立上述两式消去 p' (第一个方程取水平 *Laplace*)，可以得到内波垂向运动方程如下

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \nabla_h^2 w + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

注意到 $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}$ ，上式可以改写为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2 \nabla_h^2 w - \frac{N^2}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

在海洋中 $\frac{N^2}{g}$ 是一个小量，可以略去，所以简化后的内波垂向运动方程为

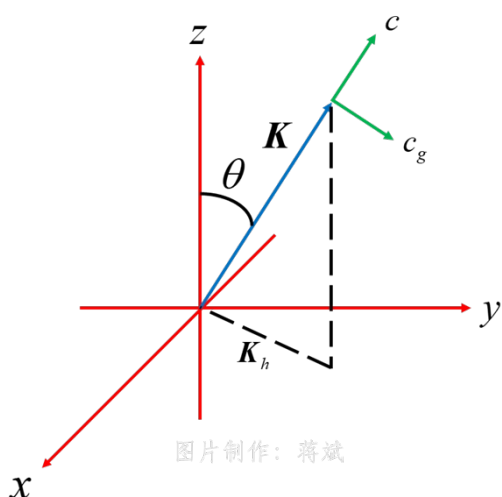
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2 \nabla_h^2 w = 0$$

[注] 上述消去 p' 的过程如下

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} (\nabla_h^2 p') &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \right) \right] = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} + \rho_0 \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t} \right] \\ &= \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

设垂向速度解为 $w = W_0 e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ ，代入上述垂向方程中得频率方程

$$\omega^2 (k^2 + l^2 + m^2) = N^2 (k^2 + l^2) \Leftrightarrow \omega = \pm N \frac{K_h}{K} \left(K_h^2 = k^2 + l^2, K^2 = k^2 + l^2 + m^2 \right)$$



上述表达式用图形表示为如左图所示。显然，

$$\sin \theta = \frac{K_h}{K}, \text{ 其中 } \theta \text{ 为波射线与铅直方向的夹角。}$$

因此，重力内波频率的上限是浮力振荡频率，亦即**内波的频率总小于浮力频率**。这可以理解：内波传播过程中，流体**质点沿倾斜的方向振荡，净浮力的一个分量作为该振荡的恢复力**，而对于同样层结条件下的浮力振荡，净浮力全部被用于作为垂向振荡的恢复力。

根据内波频率的表达式，我们可以写出其相速度和群速度的表达式

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \mathbf{j} + \frac{\partial \omega}{\partial m} \mathbf{k} = \frac{N}{(k^2 + l^2 + m^2)^{3/2}} \left(\frac{km^2}{\sqrt{k^2 + l^2}} \mathbf{i} + \frac{lm^2}{\sqrt{k^2 + l^2}} \mathbf{j} - m\sqrt{k^2 + l^2} \mathbf{k} \right) \\ \mathbf{c} &= \frac{\omega}{K} \frac{\mathbf{K}}{K} = \frac{N\sqrt{k^2 + l^2}}{(k^2 + l^2 + m^2)^{3/2}} (k\mathbf{i} + l\mathbf{j} + m\mathbf{k})\end{aligned}$$

由此可知， $\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{c} = 0$ 即内波的相速度和群速度是垂直的，且内波(这里是不考虑惯性力的)的水平分量方向相同，大小不同，垂直方向大小一样，方向相反。**群速度的方向是流体质点振动的方向**。当层结不变的条件下，当内波的频率变大，内波能量传播的方向将更趋近于垂直方向，而位相传播的方向更趋近于水平方向。

参考资料：[海洋内波的特性和内波荷载 - 道客巴巴 \(doc88.com\)](http://doc88.com)

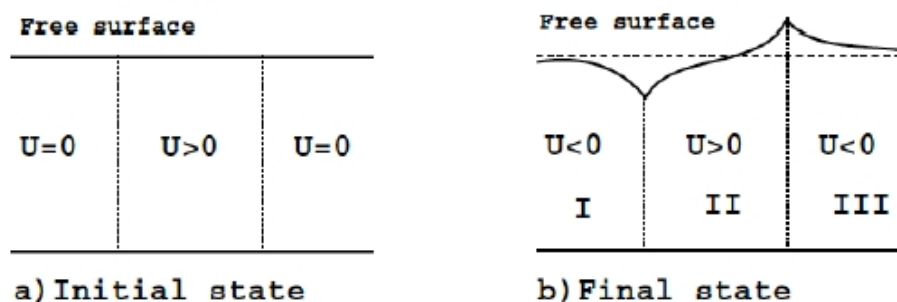
第五章 考虑地球旋转的海洋现象

注：本章节综合张正光老师的 8、9、10 章内容。

1. Rossby 变形半径—— $L_d = \sqrt{gH/f}$

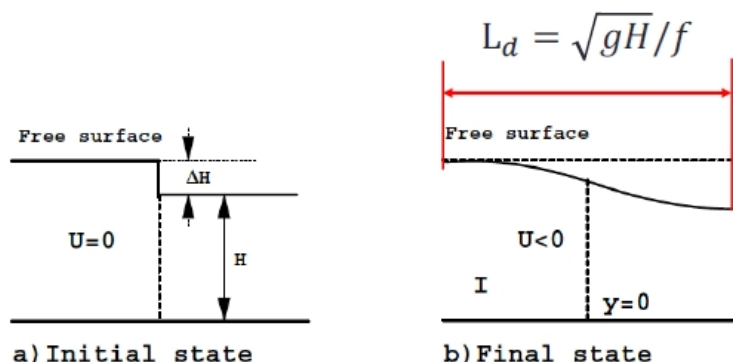
- (1) 从物理上理解为：Rossby 变形半径表示浅水重力波在一个惯性周期内走过的距离；
- (2) 由于 f 随纬度增加，所以 Rossby 变形半径在低纬度更大。

2. 地转适应的物理图像



▲ 压强向速度适应

第一种地转适应情形为：压强场向速度场适应。如上图 a) 所示，假设初始为均匀静止的海洋，中间在风应力的作用下，产生一个自西向东的流动。受科氏力的影响(或者利用 Ekman 输运解释)，流体向右“拐”，于是，两侧原本静止的流体均会受到向右的压强梯度力，为了保持平衡，需要两侧的流体产生一个相反方向的流动，最终经过适应，形成 b) 的情形。



▲ 速度向压强适应

第二种地转适应情形如上图所示，为速度场向压强场适应。初始时刻，由于流体自由面存在一个高度差，由此产生了一个水平压强梯度力，因此需要一个自东向西的流速，来与这个压力平衡，适应的结果是使得原来不连续的自由面变成连续的斜面，而这个斜面的水平宽度，正是 Rossby 变形半径的大小。

▲ 地转适应的一些结论

- (1) 地转适应是向着**能量最小状态**发展的一个自然过程；
- (2) 地转平衡状态是在**位涡守恒约束**意义下最稳定、最容易出现的状态；
- (3) 系统在初始状态时所具有的超出最小能量状态的那部分能量，将以**惯性重力波(频散波)的方式发射出去(能量频散)**。

3. 达到地转平衡的两个条件

- (1) 运动的空间尺度要大于 Rossby 变形半径；
- (2) 运动的时间尺度要大于惯性振荡的特征周期。

4. 惯性振荡

惯性振荡是物体或水团在旋转参考系下只在科氏力作用下进行的自由振荡运动，其在旋转参考系下表现为周期的圆周运动，但是其在绝对参考系下表现为一个往复性的振荡运动。

假设有一个下凹的光滑的圆盘，让这个圆盘以一定的频率 Ω 旋转，现在考虑两个小球：小球 1 放在曲面上的某一个位置时，其相对圆盘静止(即惯性离心力与支撑力平衡)，那么此时在绝对参考系下，小球 1 以 Ω 围绕圆盘中心旋转。再把小球 2 放在圆盘中心最底端，并给予一定的初速度，使其运动的最高点与小球 1 静止时的高度一致，并使其在绝对参考系视角下沿直线做振荡运动。于是在旋转参考系中小球 1 静止，小球 2 做惯性振荡，且当圆盘转动一圈时，小球 2 两次贴近小球 1，所以惯性振荡的频率是圆盘频率的两倍。亦即**惯性振荡的频率是非惯性参考系转动频率的两倍**。

5. 重力惯性表面波

线性化的浅水方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

假设上述方程的解为 $(u, v, \eta) = (U, V, \eta_0) e^{i(kx + lm - \omega t)}$ ，代入上式，采用算子行列式法，

得到如下算子：

$$\mathcal{L}(u, v, \eta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -f_0 & g \frac{\partial}{\partial x} \\ f_0 & \frac{\partial}{\partial t} & g \frac{\partial}{\partial y} \\ H \frac{\partial}{\partial x} & H \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2 - gH \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right]$$

于是可以得到重力惯性表面波的频率方程

$$\omega \left[\omega^2 - gH_0 (k^2 + l^2) - f_0^2 \right] = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{f_0^2 + gH (k^2 + l^2)}$$

假设波动与 y 方向无关，那么可以得到

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{gH_0 k^2 + f_0^2} = f_0 \sqrt{1 + k^2 \frac{gH}{f_0^2}} = f_0 \sqrt{1 + k^2 L_d^2} = f_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L_d}{L} \right)^2} \\ c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH + \frac{f_0^2}{k^2}} \\ c_g = \frac{d\omega}{dk} = gH / \sqrt{gH + \frac{f_0^2}{k^2}} \end{cases}$$

关于重力惯性波，有如下结论：

- (1) 旋转效应的重要性由波长与变形半径的比例决定。随着波长的增大，频率开始降低，加速度相对科氏力项的作用逐渐减弱，运动趋于惯性圆运动；
- (2) 质点水平运动轨迹是惯性圆运动与重力表面波往复运动的综合，因此是一个椭圆(也可以理解为，对于浅水重力波，其质点在水平方向做往复直线运动，在此基础上考虑了科氏力，这种往复运动由直线变成了椭圆)；
- (3) 当加速度项趋于零时，运动恢复到惯性圆运动，频率为 f ，传播特性减弱；

当旋转效应趋于零时，运动恢复到经典重力表面波。



6. 惯性重力内波

参照前一章重力内波的方程组，经过线性化的 Boussinesq 近似方程组如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\rho_0} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

同样的，利用③④式，消去密度 ρ_0 得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial t} - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} w = 0$$

利用①②式，消去速度 u, v 得到

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = f^2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right)$$

联立上述两式，得到垂向运动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2 \nabla_h^2 w + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{N^2}{g} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} + f^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

于是可以得到简化的惯性重力外波的垂向运动简化方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2 \nabla_h^2 w + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

[注] 上述利用①②式消去 u , v 及垂向方程的推导过程如下

第一步, ①式对 x 求偏导, ②式对 y 求偏导, 而后两式相加。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} = f v_x - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -f u_y - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = f(v_x - u_y) - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I})$$

第二步, ①式对 y 求偏导, ②式对 x 求偏导, 而后两式相减。

$$\begin{cases} \frac{\partial u_y}{\partial t} = f v_y - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} = -f u_x - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (v_x - u_y) = -f(u_x + v_y) = f \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{II})$$

联立 I、II, 得到关系式

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = f^2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right)$$

对利用③④式消去密度的方程两边去水平 Laplace, 有

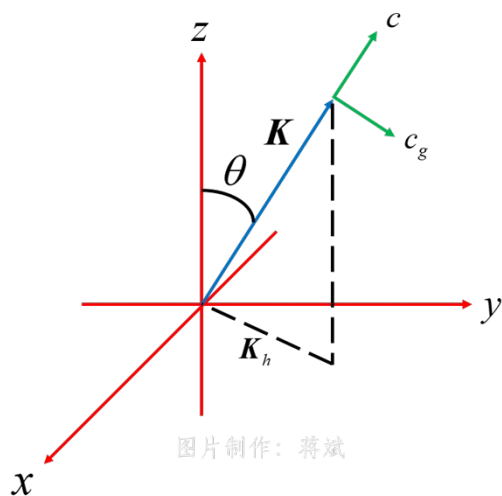
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_h^2 w + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p' \right) - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \nabla_h^2 w = 0$$

$$\text{而 } \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p' = \rho_0 \left[f^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_0 \left(f^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] = f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left(f^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right)$$

同样的, 我们设方程的解为 $w = W_0 e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$, 代入上述垂向方程中得频率方程

$$\omega^2(k^2 + l^2 + m^2) - N^2(k^2 + l^2) - f^2 m^2 = 0$$



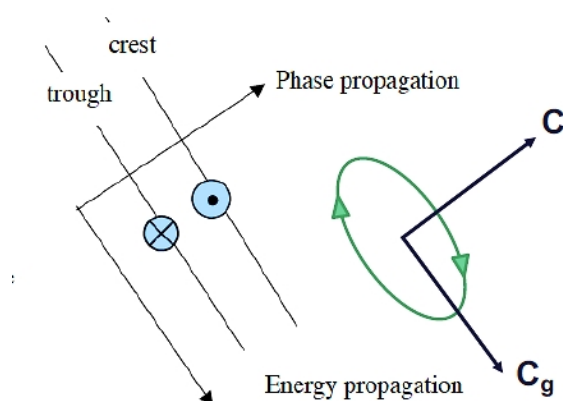
从而得到

$$\omega^2 = f^2 \cos^2 \theta + N^2 \sin^2 \theta$$

当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $K \sim m (m \gg k, l)$, 水平波数趋于 0, 波动垂向传播, 频率趋于 f , 为惯性振荡; 当 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $K \sim K_h (k, l \gg m)$, 垂向波数趋于 0, 波动水平传播, 频率趋于 ω , 为浮力振荡。可见, 惯性重力内波

的最小频率是 f , 最大频率是 N 。

流体质点沿着群速度方向, 因此, 类比重力内波的图像, 可得到惯性重力内波的质点运动轨迹。运动是浮力振荡、重力波与惯性圆运动的结合, 质点轨迹是倾斜的椭圆, 椭圆垂直于相速度。



7. 近惯性内波

- (1) 频率接近 f , 水平运动明显, 垂向运动较弱;
- (2) 水平波长较大(几十到百公里), 垂向波长较小, 垂向剪切较强, 跟混合密切相关;
- (3) 一般是风吹出来的, 其能量强就是因为风速与惯性圆运动共振产生的;
- (4) 在台风和大风天气容易激发, 流速能达到 1m/s;
- (5) 近惯性内波有向低纬度传播能量的趋势。低纬度 f 小, 惯性内波最小频率是局地 f , 高纬度产生的近惯性内波的频率大于低纬度的局地 f , 可以存在; 反

过来低纬度的近惯性内波频率小于高纬度的 f ，无法传播。

8. Kelvin 波

Kelvin 波是发生在海洋或大气中，被地形边界俘获的平衡科氏力的波动现象。Kelvin 波属于大尺度运动，摩擦项和非线性平流项相对于地转偏向力可以忽略不计，并假设是均匀水深的海洋 ($H + \eta \approx H$)，那么 Kelvin 波的控制方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{波动解设为}} \begin{cases} \eta = Z(x, y) e^{-i\omega t} \\ u = U(x, y) e^{-i\omega t} \\ v = V(x, y) e^{-i\omega t} \end{cases}$$

将速度波解代入水平动量方程中，消去因子 $e^{-i\omega t}$ ，有

$$\begin{cases} -i\omega U - fV = -g \frac{\partial Z}{\partial x} \\ -i\omega V + fU = -g \frac{\partial Z}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{g}{\omega^2 - f^2} \left(-i\omega \frac{\partial Z}{\partial x} + f \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \\ V = \frac{g}{\omega^2 - f^2} \left(-i\omega \frac{\partial Z}{\partial y} - f \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \end{cases}$$

假定 f 是常数，将上述结果代入连续方程中，得到

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\omega^2 - f^2}{gH} Z = 0$$

采用分离变量法求解上述偏微分方程，设 $Z(x, y) = X(x)Y(y)$ ，代入上述方程有

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{\omega^2 - f^2}{gH} = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} + \frac{\omega^2 - f^2}{gH} = -\frac{Y''}{Y} = \text{const}$$

于是可以分为三种情形： $\text{const} = \begin{cases} 0 \\ l^2 \quad (l^2 > 0) \\ -l^2 \end{cases}$ 。 $\text{const} = l^2$ 对应平面 Sverdrup 波；

$\text{const} = -l^2$ 对应 Kelvin 波，下面讨论 $\text{const} = -l^2$ 的情形。

此时，关于变量的方程组为

$$X'' + k^2 X = 0, Y'' - l^2 Y = 0 \left(k^2 = \frac{\omega^2 - f^2}{gH} + l^2 \right)$$

显然，上述两个方程为二阶线性齐次常微分方程，通解为

$$X = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, Y = A_2 e^{ly} + B_2 e^{-ly}$$

于是 $Z = XY = C_1 e^{ikx+ly} + C_2 e^{-ikx+ly} + C_3 e^{ikx-ly} + C_4 e^{-ikx-ly}$ ，该式表明**振幅随着 y 呈现出指数形式变化、且沿着 x 方向传播**。考虑到解的有界性，上述解只能存在半平面内。不妨考虑上半平面，从而有 $C_1 = C_2 = 0$ ，于是 $Z = C_3 e^{ikx-ly} + C_4 e^{-ikx-ly}$ ，由此可以求得相应的流速表达式

$$\begin{cases} U = \frac{g}{\omega^2 - f^2} [(\omega k - fl) C_3 e^{ikx-ly} - (\omega k + fl) C_4 e^{-ikx-ly}] \\ V = \frac{ig}{\omega^2 - f^2} [(\omega l - fk) C_3 e^{ikx-ly} + (\omega l + fk) C_4 e^{-ikx-ly}] \end{cases}$$

对于上半平面，满足固体边界条件 $V|_{y=0} = 0$ 。为了满足此条件，在北半球

$$\left(f = 2\Omega \sin \varphi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f > 0 \right), \text{ 有}$$

$$C_4 = 0, \omega l - fk = 0 \Rightarrow l = \frac{fk}{\omega} = \frac{f}{c}$$

将上述结果代入 Z, U, V 的表达式中(用 A 表示 C_3)，并考虑时间因子，可以得到

η, u, v 在上半平面的解为

$$\eta = A e^{-\frac{f}{c}y + i(kx - \omega t)}, u = \frac{g}{c} A e^{-\frac{f}{c}y + i(kx - \omega t)}, v = 0$$

上述解表示的波动就是 Kelvin 波。在求解方程的过程中，已经隐含了条件 $\omega \neq f$ ，所以上述解表示的 Kelvin 波要求 $\omega > f$ 或 $\omega < f$ 。同样的，下半平面或左半平面或右半平面都可获得类似的解。关于 Kelvin 波，有以下特点：

- (1) Kelvin 波的特点是其传播方向的右边必须有边界，所以 Kelvin 波是右界波；
- (2) 波动振幅是沿传播方向的左边，随距边界的距离呈指数衰减，所以 Kelvin 波又是左减波；(前两个结论在北半球条件下，南半球结论相反)

(3) 根据 $v=0$ ，可知 Kelvin 波不存在横向流速(垂直于波动传播方向)；

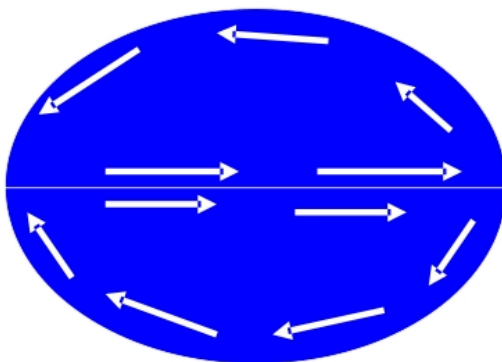
(4) 根据 $k^2 = \frac{\omega^2 - f^2}{gH} + \frac{f^2}{c^2}$ ，有 $\frac{\omega^2 k^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2 - f^2}{gH} + \frac{f^2}{c^2} \Rightarrow c^2 = gH$ ，即 Kelvin

波的相速度与浅水重力波的相速度一致，因而也是非频散波。

▲ 大洋中 Kelvin 波分为两种：岸界 Kelvin 波和赤道 Kelvin 波

(1) 对于岸界 Kelvin 波，不管北半球还是南半球，开尔文波在海盆西边界向赤道传播，东边界向极地传播。

(2) Kelvin 波作为一种边界波，需要边界的存在。科氏参数 f 在赤道为 0，形成了一种特殊的边界，产生了赤道 Kelvin 波。赤道 Kelvin 波向东传播。



▲ 向东传播的赤道开尔文波“撞击”海盆东边界，部分能量以行星波及重力波的形式反射回去，剩余的部分能量则以海岸开尔文波的形式向两极传递。

9. 潮汐与内潮

(1) **潮汐**：由引潮力的作用而产生，而月亮、太阳和地球自转是引潮力的决定性因素。

(2) **正压潮**：当只考虑潮汐引起的海表面波动时，密度的梯度是可以忽略的(参见倾斜流)，海水的流动不依赖水柱的深度。正压潮的尺度在 1000km 量级。

(3) **斜压内潮**：是正压潮与海底地形相互作用引起，尺度在 100km 量级。

(4) **内孤立波**：内潮经过非线性相互作用产生，尺度在 1km 量级。

10. Rossby 波

(1) 涡度方程的导出

不计摩擦的水平动量方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \quad (①) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \quad (②) \end{cases}$$

下面计算 $\frac{\partial}{\partial x}(②) - \frac{\partial}{\partial y}(①)$, 其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(①) &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} v + f \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x}(②) &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} u - f \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \\ &\quad \downarrow \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y} v - f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

因为铅直涡度的定义为 $\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, 所以上述式子最终化简为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ = -\frac{\partial f}{\partial y} v - f \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \quad \downarrow \\ \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial y} v - (f + \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

因为 f 仅是 y 的函数, 所以对上述公式进一步变形可以得到

$$\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -\underbrace{(f+\zeta)}_A \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)}_B - \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}\right)}_C + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x}\right)}_D$$

A

B

C

D

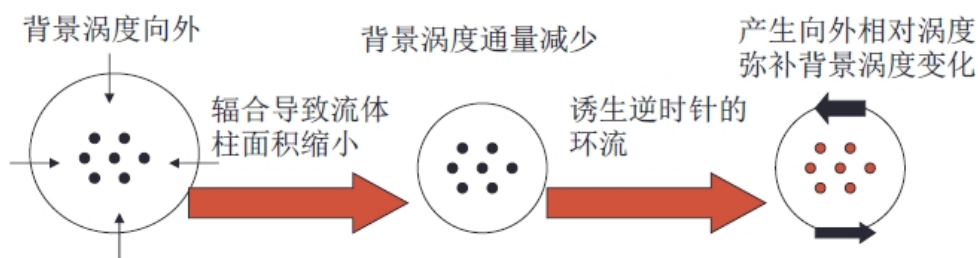
A: 绝对涡度的随体变化项, 即跟着水质点走, 看到的绝对涡度的变化;

B: 水平散度项, 与辐合辐散有关;

C: 涡管的扭曲(倾侧)项;

D: 斜压力管项。

Kelvin 环路定理: 在无粘性、正压流体中, 若外力有势, 则沿由相同流体质点组成的封闭曲线的速度环量在随体运动过程中恒不变。对于单连通区域, 由 Stokes 公式可知, 速度环量等于涡通量。利用 Kelvin 环路定理可以理解涡度方程中的水平散度项。由 Kelvin 环流定理可以写出定性公式: $\omega A = \text{const}$ 。假设初始背景涡度向外, 此时产生水平辐合, 则 A 减小, 从而背景涡通量减小, 为了保持通量守恒, 需要产生一个向外的相对涡度来弥补背景涡通量的减少。



(2) 位势涡度及守恒

在实际海洋中, 垂向速度的水平剪切造成的涡度非常小, 扭曲项较弱; 海水在动力学上基本是不可压缩流体, 压强梯度不变的情况下, 密度改变对加速度的影响微乎其微。因此涡度方程可以简化为

$$\frac{d(f+\zeta)}{dt} = -(f+\zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

浅水方程的连续方程为 $\frac{dH}{dt} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$, 结合两式消去散度项, 有

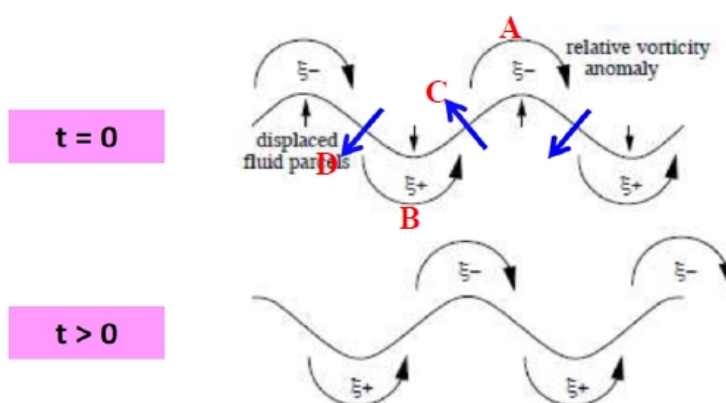
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{H} \right) = 0$$

位涡守恒的本质：是 Kelvin 定理+质量守恒

(3) Rossby 波西传机制的理解

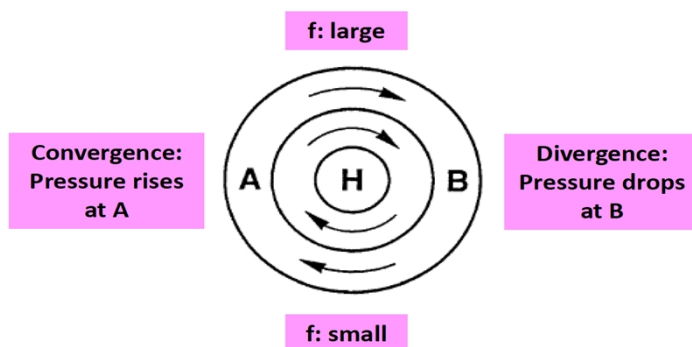
Rossby 波是由绝对涡度(位涡)守恒控制的一种波动。

➤ 方式一



利用位涡守恒、点涡产生诱导速度来解释 Rossby 西传。初始时刻，流线受到一个扰动呈现出正弦波的形状，根据位涡守恒，向北移动的质点 A 因 f 增大产生一个负的涡度；向南移动的质点 B 因 f 减小产生一个正的涡度。由此可以得到在 A 与 B 之间的流体 C 将会产生一个指向西北方向的诱导速度，同理也可以到在 D 会产生一个指向西南方向的诱导速度，这样的诱导速度分布，显然是使得波型会向西移动。

➤ 方式二



假设海表面发生了上凸，产生了一个高压中心，并假设由此产生的水平压强梯度力一样，在南侧，由于 f 较小，为了平衡水平压强梯度力，要求南侧的海水 u 更大；而在北侧，由于 f 较大，为了平衡水平压强梯度力，要求北侧的海水 u 更小。因此，从 A 到 B 输送的质量较少，而从 B 到 A 输送的质量较多，所以就造成 A 处辐聚， B 处辐散，即高压中心向西移动了。

(4) 斜压准地转 Rossby 长波

已知斜压 Rossby 波的频率表达式为

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + L_d^{-2}}$$

从而可以得到纬向相速度和群速度分别为

$$c_{px} = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + L_d^{-2}} < 0, c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \beta \frac{k^2 - l^2 - L_d^{-2}}{(k^2 + l^2 + L_d^{-2})^2}$$

由此可知，所有的波都向西传播，但是短波传播得更慢(短波的波数更多)；且相速度与波数有关，因此 Rossby 波是频散波。

其中，Rossby 长波的定义为： $k, l \ll L_d^{-1}$ ，亦即水平尺度远大于 Rossby 变形半径的波，此时， $c_{px} = -\beta L_d^2$ ，可见波速与 β 参数和变形半径有关，属于非频散

波。 β 随纬度减小， $L_d = \frac{\sqrt{gH}}{f}$ 随纬度也减小，所以 Rossby 波在低纬跑得快。